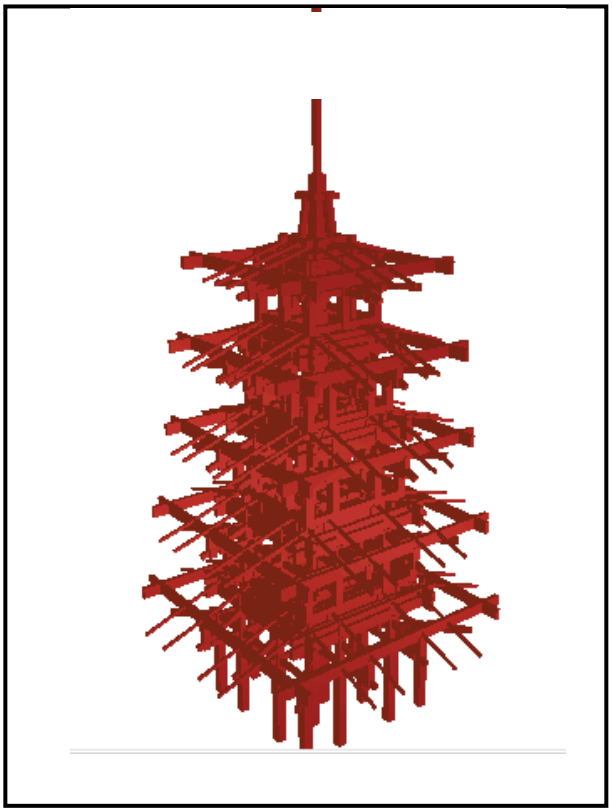
構造力学　基礎の初歩

First Steps of Learning for Structural Mechanics

SPace frame Analysis package for Civil Engineers, researchers and students



法隆寺 5 重の塔　SPACE による立体構造モデル制作：所司 卓也 氏

構造力学　基礎の初歩

これまで、「SPACE で学ぶ構造力学」シリーズの梁・柱編、骨組編、静的解析編、動的解析編、不規則振動と人工地震波編、アクティブ制振・免震編をウェブ上で公開してきました。これらのテキストは、構造力学を学びながら、SPACE の操作法を理解できるように編集されています。最初のうちは、学部生あるいは大学院生が学ぶテキストを目指していましたが、徐々に難しくなり、近頃では専門書レベルになっています。

そこで原点に戻り、構造力学の基礎や重要な項目を優しく書こうと思い立ち、「雑学　構造力学と数値解析」を企画しました。このテキストは、建築構造力学の基礎と数値解析の基本を概略理解することが目的で、知識集としてまとめました。ところが、ここでも話題が進むごとに難解になり、当初の目的を達成していません。

再度思い直し、構造力学の基本をこのテキストにまとめました。タイトルは「構造力学　基礎の初歩」です。その内容は学部生が学ぶ構造力学の大部分が含まれています。学部学生や、1 級建築士や 2 級建築士を受験する技術者・デザイナーの皆さん、このテキストを是非読み、構造力学を復習してください。必ずや役に立つと思います。

このテキストの特徴は、構造力学で大切な基礎理論を分かり易く説明していることです。テキスト内の演習で、理論をより深く理解できると思います。また、例題は SPACE を用いて数値解析しており、その解説と SPACE の解析ファイルが付録として添付されています。SPACE をダウンロードして、自ら試してください。きっと、構造力学の基礎が身に付くことでしょう。

「構造力学　基礎の初歩」は、全 144 話で構成されています。1 日 1 話を学び、1 週 6 話、1 月 24 話、半年で終了するように計画されています。ただし、構造力学の初学者は倍の 1 年を掛けて学ぶと良いでしょう。また、ノートをとり、学んだ個所は目次にチェックマークを入れましょう。SPACE を使用して演習問題の検証を行うと、さらに理解が進みます。是非実行してみてください。

テキストは少し長くなっていますが、読者の皆さん、途中であきらめずに最後まで、頑張りましょう。

2020 年 4 月 1 日

SPACE 開発チーム・代表
村田　賢（工学博士）
（株）飯島建築事務所
飯嶋俊比古（工学博士）

目　次

理解できたら、チェックマーク☑を入れよう

テキストで使われた例題を SPACE を用いて検証する。付録参照番号

構造力学　基礎の初歩

第 1 週

□基礎１話　構造力学の基礎知識　座標系の選択　付 1 話

□基礎２話　構造力学の基礎知識　力の釣合

□基礎３話　骨組モデルと力の釣合　付 2 話

基本構造の応用による反力計算

□基礎４話　No.1　単純梁と片持ち梁

□基礎５話　No.2　単純梁と片持ち梁の拡張型

□基礎６話　No.3　単純支持門型ラーメンと拡張型

第 2 週

□基礎７話　No.4　3 ヒンジ門型ラーメン

□基礎８話　No.5　3 ヒンジ山形ラーメン

材料特性　応力と歪の関係

□基礎９話　No.1　鋼の応力と歪の関係　弾性と塑性

□基礎１０話　No.2　コンクリートと木造の応力と歪の関係

軸力と曲げを受ける部材内の応力と断面力

□基礎１１話　No.1　応力分布と断面力　曲げモーメントと軸力の定義

□基礎１２話　No.2　断面力から応力分布や最大応力を求める

第 3 週

下線部タイトルのお話しは式が多くて複雑である。初学者はここをスキップしても良い

曲げによるせん断力とせん断応力

□基礎１３話　No.1　曲げによるせん断応力分布

□基礎１４話　No.2　せん断流れ理論とせん断中心

□基礎１５話　断面内の応力 モールの応力円

□基礎１６話　断面力による力の釣合

梁理論を理解する

□基礎１７話　No.1　ベルヌーイ・オイラー梁

□基礎１８話　No.2　梁の微分方程式の一般解

第 4 週

□基礎１９話　断面力と外力・反力との力の釣合

□基礎２０話　梁理論をまとめる

断面性能を知る

□基礎２１話　No.1　断面性能の特徴　長方形断面と円形断面

□基礎２２話　No.2　重ね合わせの原理　図芯以外の断面二次モーメント

□基礎２３話　No.3　等辺山形　溝形　H 型　各断面の断面二次モーメント

基本構造の曲げモーメント図を求める

□基礎２４話　No.1　断面力の釣合による微分方程式　単純梁＋中央集中荷重　付 2 話

第 5 週

□基礎２５話　No.2　単純梁＋等分布荷重　片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重　付 2 話

切断法で断面力を求める

□基礎２６話　No.1　単純梁＋中央集中荷重　付 2 話

□基礎２７話　No.2　単純梁＋等分布荷重　片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重　付 2 話

□基礎２８話　No.3　単純支持門型ラーメン＋対称荷重と逆対称荷重　付 3 話

断面力分布を描くためのルールを覚える

□基礎２９話　No.1　曲げモーメント図

□基礎３０話　No.2　せん断力図と軸力図

第 6 週

基本構造の外力を変更して断面力分布を求める

□基礎３１話　No.1　単純梁＋荷重変更　付 4 話

□基礎３２話　No.2　片持ち梁＋荷重変更　付 4 話

□基礎３３話　No.3　単純支持門型ラーメン＋荷重変更　付 4 話

基本構造の応用による応力解析

□基礎３４話　No.1　単純梁の拡張型　付 5 話

□基礎３５話　No.2　片持ち梁の拡張型　付 6 話

□基礎３６話　No.3　単純支持門型ラーメンの拡張型　付 7 話

第 7 週

□基礎３７話　No.4　両端ピン支持門型ラーメン＋逆対称荷重　付 8 話

□基礎３８話　No.5　3 ヒンジ門型ラーメン＋各種荷重　付 9 話

□基礎３９話　No.6　3 ヒンジ山形ラーメン＋各種荷重　付 9 話

□基礎４０話　No.7　3 ヒンジ山形ラーメンと斜め梁断面力の回転　付 9 話

□基礎４１話　No.8　片側方杖を有する門型ラーメン　付 10 話

□基礎４２話　No.9　両側方杖を有する門型ラーメン　付 10 話

第 8 週

トラス基本構造の応力解析

□基礎４３話　No.1　三角形基本トラス　節点法と切断法　付 11 話
□基礎４４話　No.2　基本形の山形・単純梁型・片持ち梁型トラス　付 11 話

トラス構造の応力解析

□基礎４５話　No.1　山型トラスその１　付 12 話
□基礎４６話　No.2　山形トラスその２　付 12 話
□基礎４７話　No.3　単純梁型トラス　付 12 話
□基礎４８話　No.4　片持ち梁型トラスその１　付 12 話

第 9 週

□基礎４９話　No.5　片持ち梁型トラスその２　付 12 話

基本構造のたわみを求める

□基礎５０話　No.1　梁の微分方程式でたわみを求める　単純梁＋中央集中荷重　付 2 話
□基礎５１話　No.2　単純梁＋等分布荷重 片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重　付 2 話

静定構造物のたわみを求める

□基礎５２話　No.1　はね出しを有する単純梁　先端集中荷重による先端変位　付 13 話
□基礎５３話　No.2　ひじ型骨組　水平荷重による柱頭水平変位　付 13 話

モールの定理でたわみを求める

□基礎５４話　No.1　モールの定理の解説　単純梁＋中央集中荷重　付 2 話

第 10 週

□基礎５５話　No.2　単純梁＋等分布荷重 片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重　付 2 話
□基礎５６話　No.3　はね出しを有する単純梁　はね出し部等分布荷重による先端変位　付 14 話
□基礎５７話　No.4　ひじ型骨組　水平荷重による柱頭水平変位　付 13 話

仮想仕事の原理で骨組変位を求める

□基礎５８話　No.1　単位荷重法の解説　片持ち梁先端集中荷重による先端変位　付 2 話
□基礎５９話　No.2　単純梁と片持ち梁　中央集中荷重と等分布荷重　付 2 話
□基礎６０話　No.3　はね出しを有する単純梁　ひじ型骨組　３ヒンジ門型ラーメン　付13, 15話

第 11 週

□基礎６１話　No.4　各種トラスの変位　付 15 話
□基礎６２話　不静定構造の応力解析　不静定次数を求める

不静定な基本構造の応力解析
□基礎６３話　No.1　両端固定梁＋中央集中荷重　断面力と最大変位　付 16 話
□基礎６４話　No.2　両端固定梁＋等分布荷重　付 16 話
少し複雑な不静定構造のたわみと断面力
□基礎６５話　No.1　一端固定・他端ピン支持梁＋等分布荷重　付 16 話
□基礎６６話　No.2　一端固定・他端ピン支持梁＋中央集中荷重　付 16 話

第 12 週
□基礎６７話　No.3　片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重　付 16 話
□基礎６８話　No.4　両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重　付 16 話
たわみ角法の基本式誘導
□基礎６９話　No.1　たわみ角法の基本式誘導
□基礎７０話　No.2　部材荷重や境界のある場合の基本式、変数変換による基本式
□基礎７１話　No.3　骨組全体の釣合式　節点モーメントと層モーメントの釣合
□基礎７２話　No.4　ひじ型骨組　水平荷重による柱頭水平変位　付 13 話

第 13 週
たわみ角法による簡単な不静定構造の応力解析
□基礎７３話　No.1　片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重　付 16 話
□基礎７４話　No.2　はね出しを有する単純梁＋先端集中荷重　付 17 話
□基礎７５話　No.3　両端固定支持の連梁＋右梁中央集中荷重　付 17 話
□基礎７６話　No.4　一端固定・他端ピン支持の連梁と両端ピン支持の連梁　付 17 話
□基礎７７話　No.5　両端ピン支持の門型ラーメン＋梁中央集中荷重　付 16 話
□基礎７８話　たわみ角法の基本式まとめ

第 14 週
整形門型ラーメンの応力解析
□基礎７９話　No.1　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　付 18 話
□基礎８０話　No.2　剛比を用いた両端固定支持門型ラーメンの解析　付 18 話
□基礎８１話　No.3　柱に部材荷重が加わる場合の層モーメントの釣合　付 18 話
□基礎８２話　No.4　柱に部材荷重が加わる場合で逆方向水平荷重　付 18 話
□基礎８３話　No.5　柱に部材荷重が加わる場合で同方向水平荷重　付 18 話
整形多層ラーメンの応力解析
□基礎８４話　No.1　2 層固定支持骨組＋梁等分布荷重　付 19 話

第 15 週

□基礎８５話　No.2　2 層固定支持骨組＋柱頭水平荷重　付 19 話

釣合式の機械的作表法

□基礎８６話　No.1　釣合式の機械的作表法

□基礎８７話　No.2　剛性行列と荷重項の作成

□基礎８８話　No.3　2 スパン・2 層骨組＋梁中央集中荷重と柱頭水平荷重　付 19 話

異形ラーメンの応力解析

□基礎８９話　No.1　部材角の独立部材と従属部材

□基礎９０話　No.2　従属関係を表す依存関係式

下線部のタイトルのお話しは式が多くて複雑である。初学者はここをスキップしても良い

第 16 週

□基礎９１話　No.3　仮想仕事の原理による釣合式

□基礎９２話　No.4　山形ラーメンの節点モーメントの釣合式

□基礎９３話　No.5　独立部材角によるモーメントの釣合式

□基礎９４話　No.6　2 層柱抜け骨組の節点モーメントの釣合式　付 20 話

□基礎９５話　No.7　山形ラーメンの数値解析例　付 20 話

□基礎９６話　No.8　2 層柱抜け骨組の数値解析例　付 20 話

第 17 週

固定法の解析手法誘導

□基礎９７話　No.1　固定法の考え方　不釣合モーメントの解放

□基礎９８話　No.2　分割率による分割モーメントと到達モーメント

□基礎９９話　No.3　固定法の表と反復計算　付 21 話

□基礎１００話　No.4　両端固定の連梁＋右梁の中央集中荷重　付 21 話

□基礎１０１話　No.5　固定以外の境界　有効剛比　付 21 話

□基礎１０２話　No.6　両端ピン支持門型ラーメン＋梁等分布荷重　付 21 話

第 18 週

固定法による節点移動のない不静定構造の応力解析

□基礎１０３話　No.1　2 層両端固定支持骨組＋梁等分布荷重　付 22 話

□基礎１０４話　No.2　外力と層せん断力の不釣合　仮想支持点　付 22 話

固定法による節点移動のある場合の解析手法の誘導

□基礎１０５話　No.1　節点移動の解析　部材角強制変位による固定端モーメント　付 23 話

□基礎１０６話　No.2　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　付 23 話

□基礎１０７話　No.3　一端ピン・他端固定の場合　固定端モーメント　付 23 話

□基礎１０８話　No.4　非対称剛性の両端ピン支持門型ラーメン＋梁等分布荷重　付 23 話

第 19 週

□基礎１０９話　No.5　両端ピン支持門型ラーメン＋柱部材荷重　付 23 話
□基礎１１０話　No.6　前回課題の続き　対称骨組の半解析モデル　付 23 話

多層骨組で節点移動のある場合の解析手法の誘導

□基礎１１１話　No.1　多層骨組の節点移動　解析法の解説
□基礎１１２話　No.2　2 層両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重　付 24 話
□基礎１１３話　No.3　前回課題の続き　2 層両端固定支持骨組　付 24 話
□基礎１１４話　No.4　2 層固定支持骨組＋柱頭・柱中央水平荷重　付 24 話

第 20 週

□基礎１１５話　No.5　前回課題の続き　2 層固定支持骨組　付 24 話

カーニー法による節点移動のある場合の解析手法の誘導

□基礎１１６話　No.1　カーニー法　解析手法の解説
□基礎１１７話　No.2　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　付 25 話
□基礎１１８話　No.3　一端ピン・他端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　付 25 話
□基礎１１９話　No.4　2 層両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重　付 19 話

固定法による節点移動のある場合の不静定構造の応力解析

□基礎１２０話　No.1　両端ピン支持門型ラーメン＋柱等分布水平荷重　付 26 話

第 21 週

□基礎１２１話　No.2　前回課題の続き　対称骨組の半解析モデル　付 26 話
□基礎１２２話　No.3　対称両端固定支持門型ラーメン＋対称・逆対称荷重モデル　付 26 話
□基礎１２３話　No.4　2 層・2 スパン両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重モデル　付 26 話
□基礎１２４話　No.5　前回課題の続き　2 層・2 スパン両端固定支持骨組　付 26 話
□基礎１２５話　線形構造力学　まとめ

非線形解析と不安定現象

□基礎１２６話　No.1　幾何学的非線形と材料非線形

第 22 週

□基礎１２７話　No.2　不安定現象と座屈の分類

オイラー座屈と鉄骨設計式を知る

□基礎１２８話　No.1　オイラー座屈と固有値問題　付 27 話
□基礎１２９話　No.2　鉄骨設計式　限界細長比と非弾性座屈
□基礎１３０話　No.3　境界条件と座屈長さ

鉄骨非弾性座屈

□基礎１３１話　No.1　非弾性座屈　接線係数理論と等価係数理論

□基礎１３２話　No.2　シャンレイモデルと分岐座屈

第 23 週

断面の全塑性モーメント

□基礎１３３話　No.1　曲げによる全塑性モーメント

□基礎１３４話　No.2　塑性断面係数と断面の形状係数

□基礎１３５話　No.3　荷重―変位関係とバイリニアモデル

仮想仕事の原理による骨組の崩壊解析

□基礎１３６話　No.1　一端ピン・他端固定支持梁の崩壊荷重　付 28 話

□基礎１３７話　No.2　骨組の塑性崩壊条件　極限解析の上界定理と下界定理　付 28 話

□基礎１３８話　No.3　門型ラーメンの崩壊荷重　同時増加の鉛直・水平荷重　付 28 話

第 24 週

□基礎１３９話　No.4　門型ラーメンの崩壊荷重　定鉛直荷重＋増加水平荷重　付 28 話

増分法による崩壊解析

□基礎１４０話　No.1　増分法の考え方　一端ピン・他端固定梁の崩壊過程　付 28 話

□基礎１４１話　No.2　荷重増分法と崩壊荷重

□基礎１４２話　非線形構造力学の基礎　まとめ

□基礎１４３話　建築物の構造設計法について

□基礎１４４話　耐震構造と免震・制振構造

基礎１話　構造力学の基礎知識
座標系の選択

付１話参照

ここには付録の参照番号を示す。数値解析結果で理論解の検証で使用する。SPACE をダウンロードして使えるようにしておこう。

SPACE 構造力学で検索し、SPACE のホームページ上で、登録申し込みをされたい。このテキストでは連立方程式を解くソフトが必要となる。同じくホームページ上の DOWNLOAD―マニュアルで、「SPACE で学ぶ構造力学　演習用 Excel VBA」をダウンロードし、同ソフトを使用されたい。

構造力学 基礎の初歩は、これから構造工学を学ぼうとする学生や若い技術者のためのテキストである。このテキストを活用して構造力学の基礎を学んでほしい。演習を多数行い、解く技術を習得することも大切であるが、基礎理論を学び・理解することは、より重要である。このテキストを読破する頃には、応用力が見に付き、各種問題も十分解けるようになろう。高度な技術を獲得するため、まずは第一歩を踏み出そう。

ここではテキスト全体を通して、注意すべき座標系と単位系についてお話しする。この 2 つは忘れがちであるが、実は基本中の基本である。しっかりと理解し、覚えておこう。テキスト中で以下のようなまとめを示す。覚えて活用しよう。

R0：このテキストの基本事項

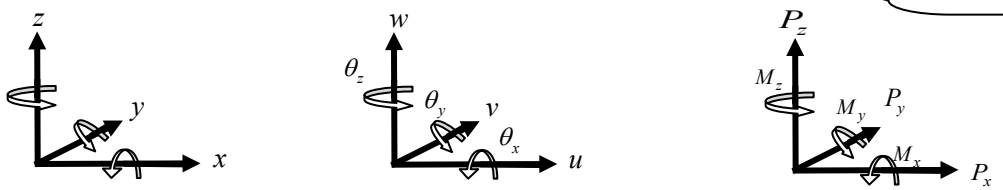
１：このテキストでは平面骨組を扱う
２：座標系を常に意識する
３：座標は右手右ねじの法則に従う
４：単位系を常に検証する

このテキストは、「雑学　構造力学と数値解析」の付録として書かれたもので、雑学では触れてこなかった構造力学の基礎理論を易しく解説している。一話ごと、ゆっくりと学ぶことにしよう。

建築構造は本来 3 次元であり、構造力学も同様である。ただ、力学初学者には、平面の方が圧倒的に理解し易い。そこで、このテキストでは全て平面骨組として解説する。ただし、次のように「力の釣合は 3 つの釣合式が必要」では、平面であるから 3 つであり、これが 3 次元空間内の骨組では 6 つ必要になる。このように少し異なる場合があるが、そのような場合は特に注記する。構造力学の基礎理論は 2 次元であっても、十分に理解できる。

構造力学を学ぶとき、常に座標系を意識して欲しい。一般に、**座標系は 3 次元の右手右ねじの法則**を用いる。平面座標系でも、図 1 に示す 3 次元座標系を意識し、回転方向を理解する必要がある。そうでないと、曲げモーメントなどの符号が逆になってしまい、結果が理解できないことになる。

平面骨組でも、座標系は常に立体を意識して！



(a) 座標系　　(b) 変位・回転ベクトル　　(c) 力・モーメント

図 1 骨組や部材で使用する 3 次元座標系

図2は、構造力学で良く使われる右手・右ネジの法則を示す。右手系は、親指が x 軸、人差し指が y 軸、中指が z 軸とすると、各々、指し示す方向が正となる。また、右ネジの法則とは、回転の正負の方向を決める指針であり、例えば $x-y$ 面で、正の回転方向は z 軸の正方向に向かって右手でネジを回しやすい方向となる。

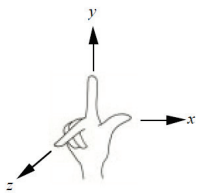
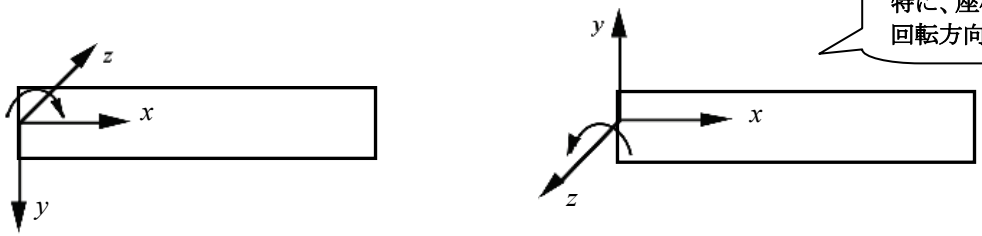


図 2 右手右ねじの法則

このテキストでは、常に $x-y$ 面を用いるが、その座標系として図3のように、y 軸正方向が下の場合と上の場合がある。無論、両座標系も右手系であるが、z 軸正方向は逆となり、同図(a)では本の裏側、同図(b)では読者の方向となる。従って、正の回転方向は、(a)では時計回りであり、(b)では反時計回りとなる。このように、座標系の選択で回転方向の正負が逆になる。

一般の構造力学テキストでは、図(a)の y 軸下向き正が多く、これは重力によって力が下向きに加わる事による。そのため、**回転方向の正は時計回り**となる。覚えておこう。

特に、座標系を選択した時、回転方向に注意しよう。



(a)　y 軸正方向を下とした座標系　　**(b)　y 軸正方向を上とした座標系**

図 3　$x-y$ 面を用いた梁内の座標系

物理式では単位に注意！
左右の項や右辺の 2 つの項は、常に同じ単位系となる。

構造力学では、多くの式やパラメータが使用される。例えば、次式は、曲げモーメントと軸力を同時に受けるとき、断面内の縁応力を求める式である。

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$

上式は物理式であり、当然、両辺の単位は同じである。また、右辺の第1項と第2項も同様に同一の単位を有する。

上式左辺項の σ_t は引張側の縁応力を表し、「力/長さの 2 乗」の単位を持つ。従って、右辺項の N/A と M/Z も、同じ「力/長さの2乗」の単位となる。つまり、第 1 項 N/A の分子 N は軸力であり、力の単位、分母の A は断面積を表し、長さの 2 乗の単位を有する。このように、N/A は左辺項と同じ単位を持つ。第2項 M/Z も同様で、分子 M は曲げモーメントで力×長さの単位を、分母 Z は断面係数、長さの3乗の単位を有する。割り算すると第 2 項も左辺項と同じ単位となる。最後に、長さの単位も mm,cm,m、力も N,kN と各種あり、計算する際は、同じ大きさの単位を使用する。今後、**単位に気を付けよう。**

基礎２話　構造力学の基礎知識
力の釣合

今回は、力の釣合についてお話しする。力の釣合は非常に重要で、これを理解するだけで、多くの情報が得られる。まず、次に示す力とモーメントの特徴を覚えておこう。

R1：力とモーメントはベクトル

１：力とモーメントはベクトルであり、ベクトルは矢印で表す
２：力は大きさ、作用点、方向の 3 つの要素を有する
３：力は分解でき、特に座標軸方向の分解が重要である
４：モーメントは力と作用点までの長さで決まる

構造力学の基礎はニュートンの運動 3 法則に基づいている。同法則とは、「１：慣性の法則：力が加わらなければ、物体はそのまま静止か、等速運動を続ける。２:運動の法則:物体に生じる加速度は力に比例し、質量に反比例する。３：作用・反作用の法則：静止物体に力を加えると逆方向から同じ大きさの力が加わる」である。

最初に、物体に働く力とモーメントについて復習しよう。力はその大きさと方向及び作用点で示される。つまり、力はベクトルであり、矢印で表す。大きさは矢印の長さで、方向は矢印の方向、作用点は矢印の先端あるいは尻尾で示す。さらに、力は任意方向に分解できる。特に、図 2 のように直交座標系 $x-y$ への分解は次式で表され、しばしば使用する。良く覚えておこう。

$$P_x = P\cos\theta; \quad P_y = P\sin\theta$$

モーメントも大きさと方向及び作用点で示され、ベクトルである。図 3 のようにモーメントも矢印で示され、その大きさは矢印の長さで、作用点は中心にある丸印で、また、モーメントの方向は、図 2 の座標系では、時計回りが正である。

物体に加わる力もモーメントを生じさせる。図 4 の力 P によるモーメントは、座標原点を中心とすると $M = l \cdot P$ で表される。ここで、アーム（腕の長さ）l は回転中心から力の作用線までの最も短い距離であり、図から分かるように、アームは力の作用線に直交する。無論、**力の作用線がモーメントの回転中心を通るとき、その力によるモーメントはゼロとなる**。アームの長さが不明の場合、図のように分解して P_y を求め、原点から力の方向と x 軸との交点までの長さ l_x を使用して、次式のようにモーメントを求める。無論、y 軸との交点を用いて、同様の手法でモー

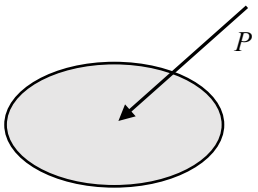


図 1　力はベクトル

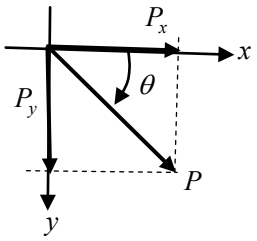


図 2　力の分解

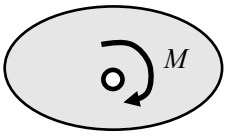


図 3　モーメントはベクトル

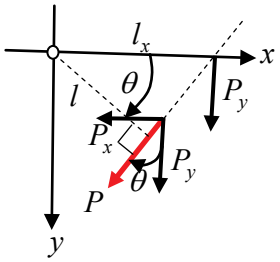


図 4　力によるモーメント

メントを求めても良い。つまり、都合の良い方法でモーメントを求めれば良いわけである。

$$M = l_x \cdot P_y$$

上式のモーメントと、$M = l \cdot P$ が同値であることは少し計算すれば直ぐに分かる。図 4 より、l_x は、$l_x = l / \cos\theta$ で与えられることから、上式は、次のように一致する。

$$M = l_x \cdot P_y = \frac{l}{\cos\theta} \cdot P\cos\theta = l \cdot P \leftarrow \quad P_y = P\cos\theta$$

モーメントの回転中心は任意点で良い。物体が静止状態であれば、どの点でもモーメントの釣合が得られている。また、図 4 に示す力の作用線上であれば、任意点で分解し、各アームの長さを用いてモーメントを求め、その和でモーメントが得られることも覚えておこう。

次に示す力の釣合は非常に重要であり、ルールを応用することで多くの静定骨組の応力や断面力が求められる。しっかり頭に入れておこう。

静止した物体は、任意点を中心とするモーメントの釣合を満たす。

力の釣合は、剛体系の釣合と質点系の釣合がある。

平面問題では、力の釣合は 3 つであり、立体では 6 つとなる。

R2：力の釣合

１：静止する物体は力の釣合が常に満たされる

２：力の釣合は 3 つの釣合式が必要：剛体系の力の釣合

３：釣合式は 3 種ある

3.1 2 方向の力の釣合と任意点のモーメントの釣合

3.2 1 方向の力の釣合と 2 つの任意点でのモーメントの釣合

3.3 一つの線上にない 3 つの任意点回りのモーメントの釣合

静止する物体は常に力の釣合がとれている。この力は**外力と反力**に分類され、**外力は荷重**とも呼ばれる。荷重は構造物の自重や風、地震、雪などによって生じる。反力はこの荷重に釣合うように地盤から生じる。物体がある大きさを持つと釣合条件は 3 つとなるが、1 点における釣合は 2 つで、両方向の力の釣合で表される。これを**質点系の釣合**と呼ぶ。

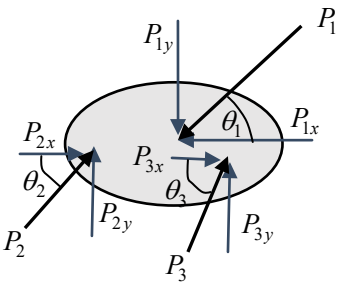


図 5 力の釣合

2 方向の力の釣合は、構造物に加わる外力及び反力の全てを、座標軸方向に分解する方法が理解し易い。図 5 に示す力を考えてみよう。物体に加わる全ての力を座標軸方向に分解する。図 5 では、3 つの力が加わっており、各々座標軸方向に分解すると、

$$P_{1x} = P_1\cos\theta_1; \quad P_{2x} = P_2\cos\theta_2; \quad P_{3x} = P_3\cos\theta_3$$
$$P_{1y} = P_1\sin\theta_1; \quad P_{2y} = P_2\sin\theta_2; \quad P_{3y} = P_3\sin\theta_3$$

となり、両方向の釣合は、上式を用いると次式で表される。

$$\sum_{i=1}^{3} P_{ix} = \sum_{i=1}^{3} P_i\cos\theta_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{3} P_{iy} = \sum_{i=1}^{3} P_i\cos\theta_i = 0$$

モーメントの釣合は任意点におけるモーメント外力の総和及び全ての外力と反力によるモーメントの総和より得られる。

力の釣合の基本は、両方向の力の釣合と、任意点を中心とするモーメントの釣合である。

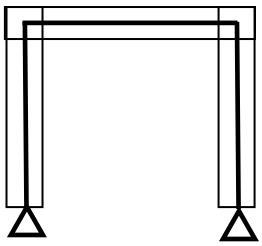
基礎３話　骨組モデルと力の釣合

付 2 話参照 ex3_1 ~ ex3_4
上記 ex3_1 などは SPACE で使用するファイル名を表す

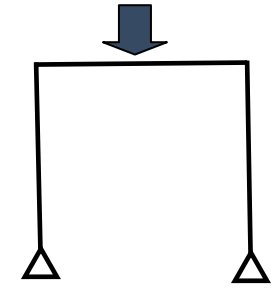
ここでは、骨組モデルを使用して、力の釣合について考える。まずは、構造力学で使用する最も単純な骨組モデルを紹介し、外力と反力、さらに骨組境界の分類と、各境界の自由度と反力について学ぶ。

R3：骨組モデルと境界

１：骨組モデルは、図芯によって描く
２：骨組に加わる力は外力(荷重)と反力
３：骨組の境界は、次の 4 種類がある
１．自由　２．ローラー支持　３．ピン支持　４．固定支持



(a) 門型ラーメンの実構造



(b) 門型ラーメンの解析モデル

図 1 骨組モデル

図 1 は、門型ラーメンと呼ばれ、構造力学では最も多く取り上げられるモデルである。同図(a)の梁・柱は細長いが 3 次元物体であり、図(b)の線でモデル化するためには、その線が断面内のどの位置かを知る必要がある。後の回で具体的にお話しするが、断面の中心、つまりその点は断面の中心位置にあるとし、そこを**図芯**と呼ぶ。この図芯を繋ぐ軸を**部材軸(図芯軸)**と呼び、この部材軸で図(b)の解析モデルが描かれる。

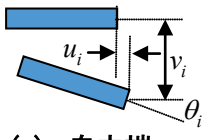
骨組に加わる力は、外力と反力に分類される。外力は**荷重**とも呼ばれ、自重や地震力、風力などで生じる。荷重は床を介し梁に直接加えられ、さらに柱に、最後に地盤に伝えられる。その際、作用・反作用の法則に従って、地盤からの力、つまり反力が生じて釣り合うことになる。

静定骨組の基本は単純梁と片持ち梁、荷重は中央及び先端集中荷重と等分布荷重である。境界には、固定、ピン支持、ローラー支持、自由がある。

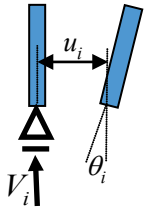
R4：境界における自由度と反力

１．自由端：端部変位は全て自由、反力なし
２．ローラー支持：鉛直方向拘束、水平方向と回転は自由、鉛直方向反力あり、他はなし
３．ピン支持：鉛直と水平方向拘束、回転は自由、鉛直と水平方向反力あり、モーメント反力はなし
４．固定支持：支持部の変位は全て拘束であり、鉛直、水平、モーメントの各反力があり

平面骨組における境界は上記の 4 つである。**平面骨組の部材端部 i の自由度は 3 つあり、部材軸方向の変位 u_i、部材軸に直交する変位 v_i、及び回転角 θ_i である。**従って、境界における条件もこの 3 つの変位を拘束するか否かで決まる。拘束が多い順に、固定支持、ピン支持、ローラー支持、拘束なしの自由端となる。端部を拘束すると反力が発生し、力の釣合からその値が決まる。これらの境界を骨組モデルで表す場合、図 2 の記号で示す。ここでは反力と共に示すので、4 つの境界をしっかり覚えておこう。



(a) 自由端



(b) ローラー支持

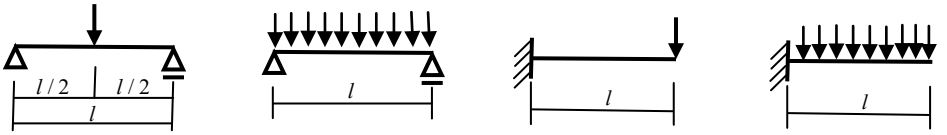
R5：静定構造物の基本構造　荷重と反力

１：基本構造は単純梁と片持ち梁

２：外力の基本は中央及び先端の集中荷重と等分布荷重

３：基本構造の反力は力の釣合から求められる

これから、色々なタイプの構造物の変形や応力状態を求めることになる。これを**応力解析**と呼ぶ。各種静的構造で、最も重要な形式は図 3 に示す 4 つの基本構造である。単純梁は長さ l の一端ピン・他端ローラー支持の梁であり、片持ち梁は長さ l の一端固定・他端自由の梁である。



(a) 中央集中荷重　(b) 等分布荷重　(c) 先端集中荷重　(d) 等分布荷重

単純梁 (simple beam)　片持ち梁 (cantilever)

図 3　4 種の静定基本構造

平面静定骨組の反力は、力の釣合より全て求めることができる。まず、静定構造物の基本である単純梁と片持ち梁の反力を求める。得られた結果を丸覚えすると応用問題に役に立つので、必ず頭に入れておこう。

静定基本構造の反力　単純梁と片持ち梁　　**ex3_1 ～ ex3_4**

１）図 4(a) のように節点番号を割り付け、反力を仮定する。次に、反力を含めた部材に働く力の釣合として、両方向の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合を次式で表す。第 1 式が水平方向の力の釣合であり、第 2 式が鉛直方向の力の釣合、第 3 式は節点 1 を中心とするモーメントの釣合を表す。

$$H_1 = 0; \quad P - V_1 - V_2 = 0; \quad Pa - V_2 l = 0$$

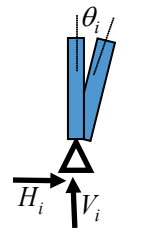
上の第 3 式より、$V_2 = Pa / l$ となり、結果、他の反力は $V_1 = Pb / l$ となる。基本構造である中央集中荷重の場合は、$V_1 = V_2 = P / 2$ となる。

２）図 4(b) の等分布荷重の場合、分布荷重を寄せ集めた仮想集中荷重 $\bar{P} = p_w l$ が、その中心である $l / 2$ の位置に加わるとすると、1）の基本構造と同様に、反力は $V_1 = V_2 = \bar{P} / 2 = p_w l / 2$ となる。

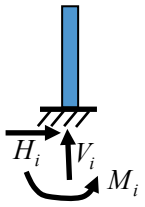
３）図 4(c) の先端集中荷重では両方向の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合より次式が得られ、モーメントの反力は $M_1 = Pl$ となる。

$$H_1 = 0; \quad P - V_1 = 0; \quad M_1 - Pl = 0 \rightarrow \quad V_1 = P; \quad M_1 = Pl$$

４）図 4(d) の等分布荷重の場合、分布荷重を合わせた集中荷重 $\bar{P} = p_w l$ が、その中心である $l / 2$ の位置に加わるとすると、３）の基本構造と同様であるが、上の第 3 式の長さは集中荷重までの距離である。鉛直方向反力及びモーメント反力は $V_1 = p_w l; \quad M_1 = p_w l^2 / 2$ となる。

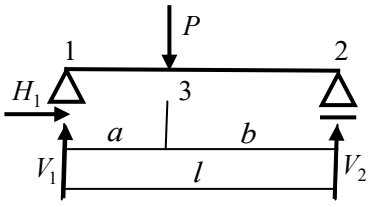


(c) ピン支持

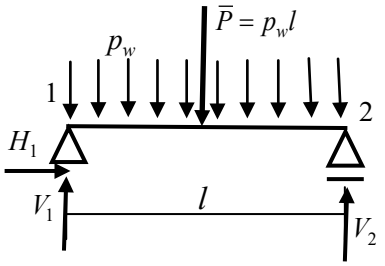


(d) 固定支持

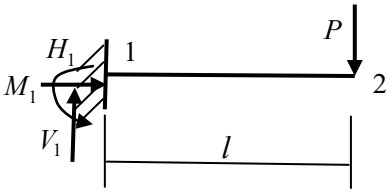
図 2 4 つの境界における変位の拘束と反力



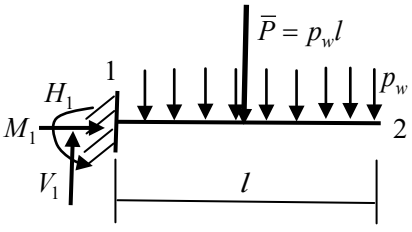
(a) 単純梁＋集中荷重



(b) 単純梁＋等分布荷重



(c) 片持ち＋先端集中荷重



(d) 片持ち＋等分布荷重

図 4　基本構造の反力

基礎４話 No.1　単純梁と片持ち梁

前回は静定平面骨組の基本構造である単純梁と片持ち梁の反力を、力の釣合より求めた。**ここでは基本構造に各種荷重を加えて反力を求め、応用力を養う**。全ての静定平面骨組を取り上げ解説することはできないが、応用力を見に付けることで他の問題も容易に解けよう。

R6：基本構造からの拡張

１：重ね合わせの原理
２：対称条件と逆対称条件を満たす構造の反力
３：基本構造からの拡張型構造
1. 荷重状態の拡張　2. 骨組の拡張　3 特殊な骨組

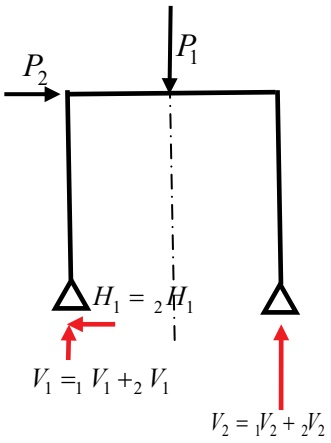
線形問題における反力の計算や応力解析では、**重ね合わせの原理**が有用である。非線形問題では「材料非線形」と「幾何学的非線形」があるが、このテキストで扱う構造力学は基礎理論であり、ほぼ非線形を考えない。そのため、重ね合わせの原理が成立する。例えば、図 1(a)の骨組に 2 種の荷重 P_1 と P_2 が加わり、反力 V_1, V_2, H_1 が得られているとする。同図(b)には荷重 P_1 による反力 ${}_1V_1, {}_1V_2$ が、また同図(c)には荷重 P_2 による反力 ${}_2V_1, {}_2V_2, {}_2H_1$ が求められている。重ね合わせの原理とは、この 2 つの反力の和は、同時に加えた際の反力に常に等しいことをいう。この重ね合わせの原理は反力計算だけでなく、応力解析や断面性能でも成り立つ。この原理は非常に便利であり、覚えておくと良い。

構造物が対称形状で荷重も対称の場合、変位や応力状態も対称となる。同様に、構造物が対称形状で荷重が逆対称の場合、変位や応力状態は逆対称となる。対称構造物では、図 1(b)のように中心線で左右に折り曲げると形状が全て同一、対応する部材も同じとなる。反力も同様に対称となり、応力状態も対称となる。

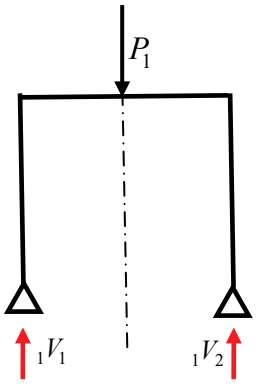
一方、逆対称荷重は、同図(c)のように中心線で左右に折り曲げると中心線を挟んで反対方向の荷重状態となる。ここでは、実際逆対称荷重ではないが、梁の軸方向剛性が大きいと逆対称とみなして良い。これについては後でお話しする。

R7：荷重状態が特殊な場合の反力の扱い方

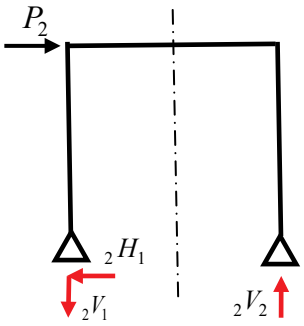
１：対称でない荷重状態の反力はモーメントの釣合より求める
２：斜め荷重は材軸方向と鉛直方向に分解して扱う
３：分布荷重は仮想的な集中荷重に置き換える



(a)　P_1, P_2 による反力



(b)　P_1 による反力



(c)　P_2 による反力

図 1　重ね合わせの原理

静定骨組の反力は力の釣合より求める。
斜め荷重は両座標軸方向に分解する。
反力のまとめは四角で囲んで示す。

基本構造の荷重状態を拡張し、反力を求めてみよう。

1）図 2 のように解析モデルを描いた後、反力を仮定し、3 つの釣合式より反力を求める。図 2 の偏った集中荷重による反力は、以下に示す力の釣合より両基本構造とも容易に求められる。**得られた反力が負の場合は、仮定した反力方向が反対であることを示す。**

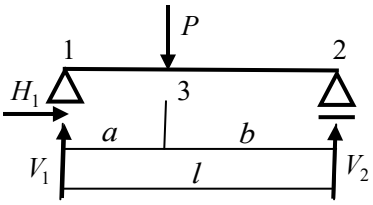
反力を求めるとき、分布荷重は、仮想の集中荷重に変換する。
左の釣合式は、第 1 式が x 方向、第 2 式が y 方向、第 3 式が節点 1 におけるモーメントの釣合を表す。

(a) 単純梁＋集中荷重

$H_1 = 0;\quad P - V_1 - V_2 = 0;\quad Pa - V_2 l = 0$

$V_2 = Pa/l \rightarrow \quad V_1 = P(1 - a/l) = Pb/l$

$H_1 = 0;\quad V_1 = Pb/l;\quad V_2 = Pa/l$

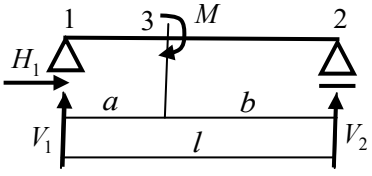


(b) 単純梁＋モーメント荷重

$H_1 = 0;\quad -V_1 - V_2 = 0$

$-V_2 l + M = 0 \rightarrow V_2 = M/l$

$H_1 = 0;\quad V_1 = -M/l;\quad V_2 = M/l$



(b) 片持ち＋集中荷重

$H_1 = 0;\quad P - V_1 = 0;$

$-M_1 + Pa = 0 \rightarrow M_1 = Pa$

$H_1 = 0;\quad V_1 = P;\quad M_1 = Pa$

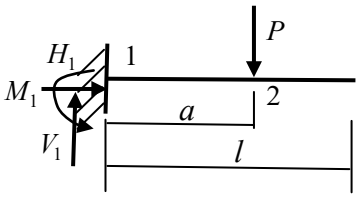


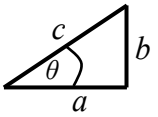
図 2 基本構造に加わる偏った集中荷重

2）荷重が図 3 のように材軸に対し傾いている場合、荷重を鉛直方向と材軸方向に分解する。

$$P_x = P\cos\theta;\quad P_y = P\sin\theta$$

分解した力を元に釣合より、反力を求める。

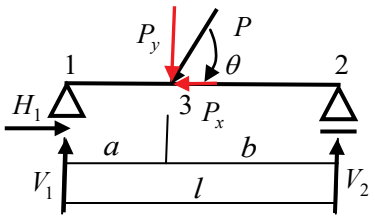
良く用いられる角度 θ は 30 度、45 度、60 度、あるいは a:b:c で 3 : 4 : 5 である。また、上記の角度の a:b:c は、順に、$\sqrt{3}:1:2$ 、$1:1:\sqrt{2}$ 、$1:\sqrt{3}:2$ である。良く使うので覚えておこう。



(a) 単純梁＋集中荷重

$H_1 = P_x;\quad P_y - V_1 - V_2 = 0;\quad P_y a - V_2 l = 0$

$H_1 = P_x;\quad V_1 = P_y b/l;\quad V_2 = P_y a/l$



(b) 片持ち＋集中荷重

$H_1 = P_x;\quad P_y - V_1 = 0;\quad -M_1 + P_y a = 0$

$H_1 = P_x;\quad V_1 = P_y;\quad M_1 = P_y a$

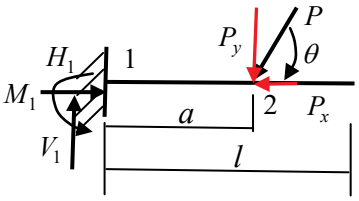


図 3 基本構造に加わる傾いた集中荷重

3）図 4 の幅 $2a$ の分布荷重 p_w は仮想的な集中荷重 $\bar{P} = 2p_w a$ に置き換え、位置は節点 1 より b とすると、後は先の集中荷重と同様に反力を求める。

図 4 (a) の反力

$H_1 = 0;\quad \bar{P} - V_1 - V_2 = 0;\quad \bar{P}b - V_2 l = 0$

$H_1 = 0;\quad V_2 = \bar{P}b/l;\quad V_1 = \bar{P}(l-b)/l$

図 4 (b) の反力

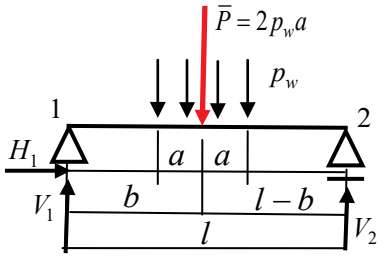
$H_1 = 0;\quad \bar{P} - V_1 = 0;\quad -M_1 + \bar{P}b = 0$

$H_1 = 0;\quad V_1 = \bar{P};\quad M_1 = \bar{P}b$

分布荷重が傾いている場合は、以下のように分解して、反力を求める。

$$P_{wx} = P_w\cos\theta;\quad P_{wy} = P_w\sin\theta \rightarrow \bar{P}_x = 2aP_{wx};\quad \bar{P}_y = 2aP_{wy}$$

(a) 単純梁＋等分布荷重



(b) 片持ち＋等分布荷重

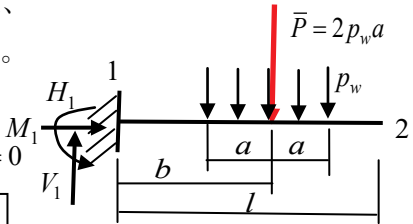


図 4 基本構造に加わる等分布荷重

基礎５話 No.2　単純梁と片持ち梁の拡張型

前回は静定構造物の基本である単純梁と片持ち梁について、荷重を変更した状態の反力を求めた。ここでは、その続きとして基本構造を少し変形した構造について反力を求める。全ての構造形式について解説できないが、その手法を理解することで自ら反力を求めることができよう。前回示したように、分布荷重は仮想的な集中荷重に置き換えることで反力が求められる。そのため、ここでは集中荷重が加わる骨組を多く取り上げる。

静定構造とは、力の釣合によって反力や部材内の応力が決定する構造形式であり、不静定構造とはそれ以外の構造形式をいう。

R8：基本構造拡張型構造の扱い方

１：単純梁からの拡張型構造
２：片持ち梁からの拡張型構造
３：門型ラーメンを基本構造に追加する
４：門型ラーメンからの拡張型構造

骨組の形状が変化しても、静定構造では、反力の求め方は、基本的に単純梁か片持ち梁と同じである。

単純梁を少し変形すると図 5 のように各種の骨組が得られる。これらも基本的には単純梁と同様の手法で反力が求められる。まず、同図のように反力を仮定する。まず、**単純梁拡張型構造**の反力を求める。

１）図 5(a)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: 3P - V_1 - V_2 = 0$$

回転方向に注意して、節点 1 及び 2 に関するモーメントの釣合を求める。

$$M_1 = 0: -V_2 l - Pa + 2P(l+b) = 0 \rightarrow V_2 = P(2(l+b) - a)/l$$
$$M_2 = 0: V_1 l + 2Pb - P(l+a) = 0 \rightarrow V_1 = P(l+a-2b)/l$$

上の 3 つの釣合式より、骨組の反力は以下のようである。

$$H_1 = 0; \quad V_1 = P(l+a-2b)/l; \quad V_2 = P(2(l+b)-a)/l$$

２）図 5(b)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 + P = 0 \quad y: -V_1 - V_2 = 0$$

節点 1 及び 2 に関するモーメントの釣合より、反力が求められる。

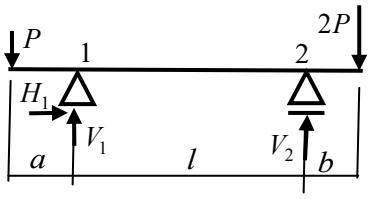
$$M_1 = 0: -V_2 l + Pc = 0 \rightarrow V_2 = Pc/l$$
$$M_2 = 0: V_1 l + Pc = 0 \rightarrow V_1 = -Pc/l$$

整理すると、各反力は以下のようである。

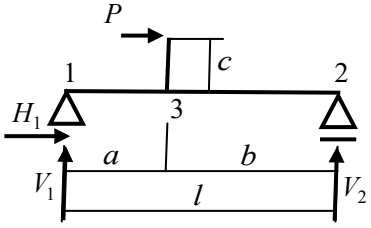
$$H_1 = -P; \quad V_1 = -Pc/l; \quad V_2 = Pc/l$$

３）図 5(c)の反力：両方向の力の釣合より

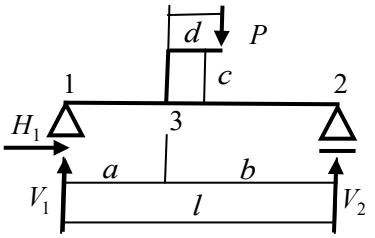
$$x: H_1 = 0 \quad y: P - V_1 - V_2$$



(a) 左右片持ち梁



(b) 中間部片持ち梁



(c) 中間部片持ち梁２

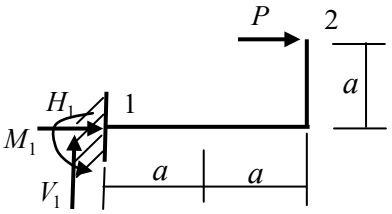
図 5 単純梁の拡張型構造の反力

節点 1 及び 2 に関するモーメントの釣合を求める。

$$-V_2 l + P(a+d) = 0 \rightarrow V_2 = P(a+d)/l$$
$$V_1 l - P(b-d) = 0 \rightarrow V_1 = P(b-d)/l$$

従って、

$$\boxed{H_1 = 0;\quad V_1 = P(b-d)/l;\quad V_2 = P(a+d)/l}$$



(a) 拡張型構造 1

続いて、**片持ち梁拡張型構造**の反力を求める。

4）図 6(a)の反力：両方向の力の釣合より

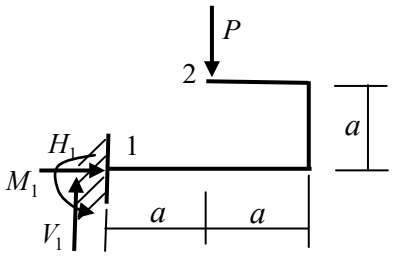
$$x: H_1 + P = 0 \quad y: -V_1 = 0$$

となり、続いて節点 1 に関するモーメントの釣合を求める。

$$-M_1 + Pa = 0 \rightarrow M_1 = Pa$$

従って、反力は次のように得られる。

$$\boxed{H_1 = -P;\quad V_1 = 0;\quad M_1 = Pa}$$



(b) 拡張型構造 2

5）図 6(b)の反力：両方向の力の釣合より

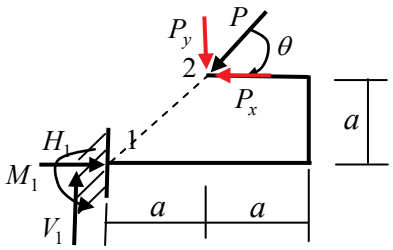
$$x: H_1 = 0 \quad y: P - V_1 = 0$$

節点 1 に関するモーメントの釣合を求める。

$$-M_1 + Pa = 0 \rightarrow M_1 = Pa$$

従って、

$$\boxed{H_1 = 0;\quad V_1 = P;\quad M_1 = Pa}$$



(c) 拡張型構造 2+斜め荷重

図 6 片持ち梁の拡張型構造の反力

6）図 6(c)の反力：斜め荷重を両座標軸方向に分解する。ここでは、荷重の作用線が節点 1 を通ることから、角度 θ は 45 度である。

$$P_x = P\cos\theta = P/\sqrt{2};\quad P_y = P\cos\theta = P/\sqrt{2}$$

分解した荷重を用いて、両方向の力の釣合より

$$x: H_1 - P_x = 0 \quad y: P_y - V_1 = 0$$

となり、続いて、節点 1 に関するモーメントの釣合を求める。

$$-M_1 + P_y a - P_x a = 0 \rightarrow M_1 = 0$$

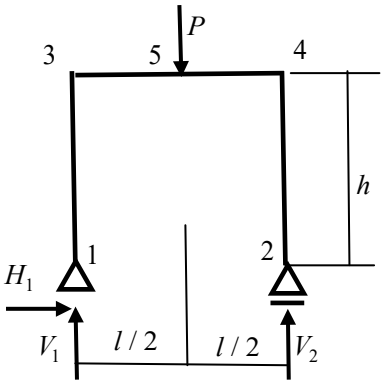
従って、

$$\boxed{H_1 = P_x = P\cos\theta;\quad V_1 = P_y \sin\theta;\quad M_1 = 0}$$

節点 1 でのモーメントの釣合で、荷重 P の作用線が節点 1 を通ることからモーメントのアームがゼロとなる。そのため、荷重 P の節点 1 回りのモーメントはゼロとなる。このことは重要であり、覚えておくと良い。

基礎６話 No.3　単純支持門型ラーメンと拡張型

今回は、基本構造である単純梁の拡張として、単純支持型の門型ラーメンとその拡張型構造の反力について考える。図 7 は単純梁の拡張である門型ラーメンである。支持条件が単純梁と同じであり、静定構造となる。この門型ラーメンは基本構造に準ずる構造で、荷重状態として図 7(a)の対称荷重と図 7(b)の逆対称荷重がある。



(a) 梁中央鉛直集中荷重

１）図 7(a)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: P - V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l + Pl/2 = 0 \rightarrow V_2 = P/2; \quad V_1 = P/2$$

以上の釣合式より反力を求め、以下のようにまとめる。

$$\boxed{H_1 = 0; \quad V_1 = P/2; \quad V_2 = P/2}$$

以下の例題は、単に読むだけでなく、まず、自分で解を求めてみよう。その後、答え合わせを行い、正誤を確認する。

２）図 7(b)の反力：両方向の力の釣合より

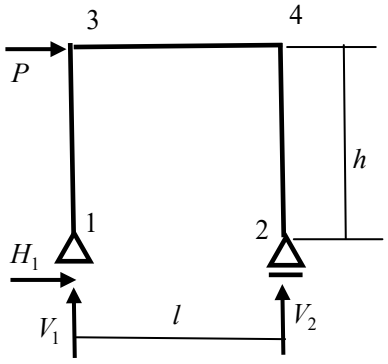
$$x: H_1 + P = 0 \quad y: V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l + Ph = 0 \rightarrow V_2 = Ph/l; \quad V_1 = -Ph/l$$

従って、

$$\boxed{H_1 = -P; \quad V_1 = -Ph/l; \quad V_2 = Ph/l}$$



(b) 柱頭水平集中荷重

図 7 門型ラーメン

次に、門型ラーメンの拡張型として、図 8 の荷重状態を考えよう。

３）図 8(a)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: P - V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より

$$-V_2 l + 3Pl/4 = 0 \rightarrow V_2 = 3P/4; \quad V_1 = P/4$$

従って、

$$\boxed{H_1 = 0; \quad V_1 = P/4; \quad V_2 = 3P/4}$$

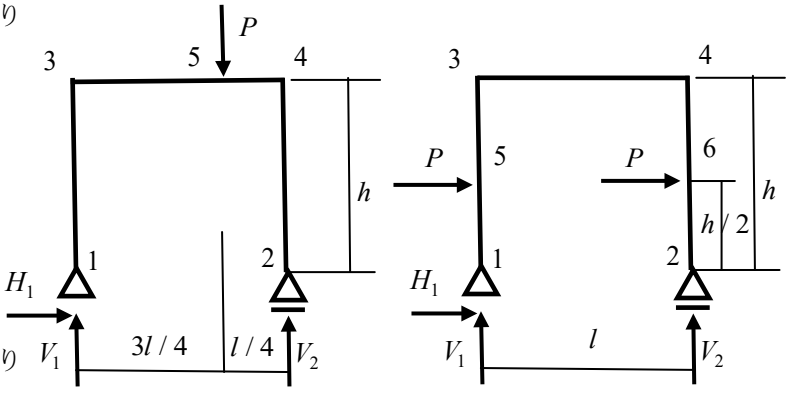
４）図 8(b)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 + 2P = 0 \quad y: -V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より

$$-V_2 l + 2Ph/2 = 0 \rightarrow V_2 = Ph/l; \quad V_1 = -Ph/l$$

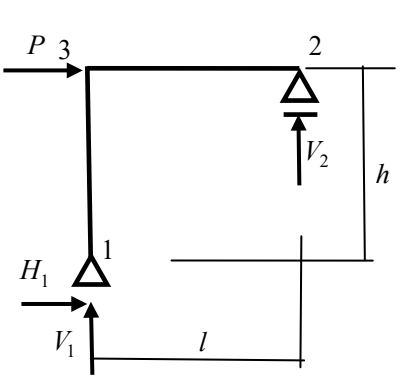
$$\boxed{H_1 = -2P; \quad V_1 = -Ph/l; \quad V_2 = Ph/l}$$



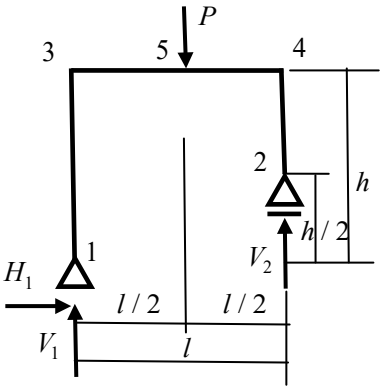
(a) 偏った位置の鉛直集中荷重　　(b) 柱中央水平荷重

図 8 荷重拡張型門型ラーメン

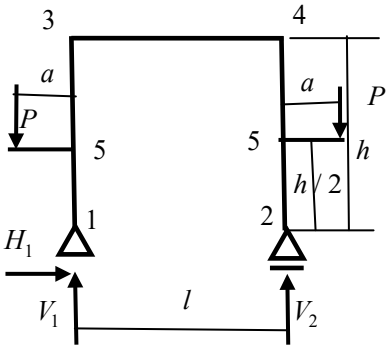
以下の門型ラーメンを拡張した骨組について反力を求めてみよう。



(a) 門型ラーメン１

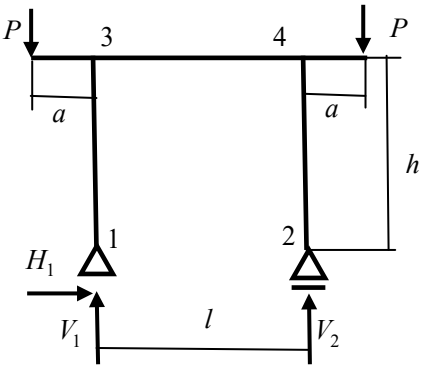


(b) 門型ラーメン２



(c) 門型ラーメン３

図 9 門型ラーメン拡張型構造



(d) 門型ラーメン４

５）図 9(a)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 + P = 0 \quad y: -V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l + Ph = 0 \rightarrow V_2 = Ph / l; \quad V_1 = -Ph / l$$

$$\boxed{H_1 = -P; \quad V_1 = -Ph / l; \quad V_2 = Ph / l}$$

６）図 9(b)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: P - V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l + Pl / 2 = 0 \rightarrow V_2 = P / 2; \quad V_1 = P / 2$$

$$\boxed{H_1 = 0; \quad V_1 = P / 2; \quad V_2 = P / 2}$$

７）図 9(c)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: 2P - V_1 - V_2 = 0$$

節点１に関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l - Pa + P(l + a) = 0 \rightarrow V_2 = P; \quad V_1 = P$$

$$\boxed{H_1 = 0; \quad V_1 = P; \quad V_2 = P}$$

８）図 9(d)の反力：両方向の力の釣合より

$$x: H_1 = 0 \quad y: 2P - V_1 - V_2 = 0$$

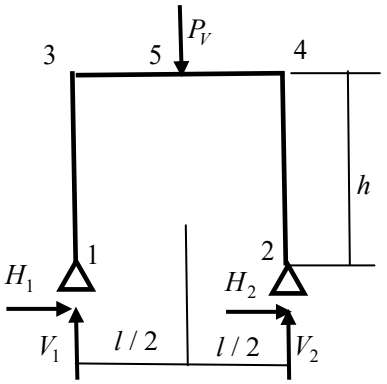
節点１関するモーメントの釣合より反力を求める。

$$-V_2 l - Pa + P(l + a) = 0 \rightarrow V_2 = P; \quad V_1 = P$$

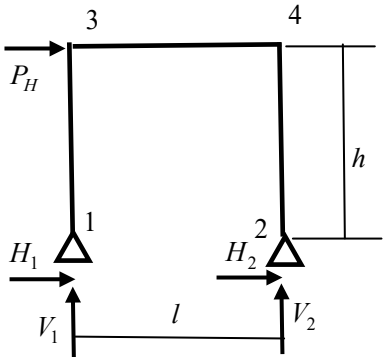
$$\boxed{H_1 = 0; \quad V_1 = P; \quad V_2 = P}$$

基礎 7 話 No.4　3 ヒンジ門型ラーメン

今回は基本構造である単純梁の拡張型である 3 ヒンジ門型ラーメンについてお話しする。まず、図 10 の門型ラーメンについて考える。両端ピン支持の門型ラーメンは反力の自由度が 4 であり、不静定構造である。梁・柱の剛性、つまりヤング係数や断面二次モーメントなど、部材の特性によって反力は変化する。この門型ラーメンは対称構造であり、同図(a)は対称荷重、同じく図(b)は逆対称荷重である。そのため、反力も前者は対称、後者は逆対称となる。同図(b)では、梁の軸剛性が大きく、軸方向剛体と見做せる場合で、節点 3 と 4 に同方向に $P_H/2$ が加わった場合と同じで、逆対称変形となる。



(a) 梁中央鉛直集中荷重



(b) 柱頭水平集中荷重

図 10 両端ピン支持門型ラーメン

同図(a)の構造・荷重状態で、対称条件を用いて荷重と反力の釣合を考えてみよう。まず、両方向の力の釣合は、

$$x: H_1 + H_2 = 0 \quad y: P_V - V_1 - V_2 = 0$$

であり、節点 1 におけるモーメントの釣合と対称条件より、

$$-V_2 l + P_V l/2 = 0 \rightarrow V_2 = P_V l/2; \quad V_1 = P_V l/2$$

として鉛直方向反力は求められるが、対称条件を用いても水平反力は決定しない。例えば、梁の曲げ剛性が柱のそれより圧倒的に大きい場合、梁端部の回転角は自由となり、支持点の水平反力はゼロとなる。逆に、梁の曲げ剛性が柱のそれより圧倒的に小さい場合、梁端部は固定支持状態となり、支持点の水平反力も生じる。このように梁・柱の剛性によって水平反力は変化する。これについては、不静定構造の項でお話しする。

一方、図 10(b)の逆対称荷重の骨組では、両方向の力の釣合より、

$$x: P_H + H_1 + H_2 = 0 \quad y: -V_1 - V_2 = 0$$

上式が得られ、また節点 1 におけるモーメントの釣合より、

$$-V_2 l + P_H h = 0 \rightarrow V_2 = P_H h/l; \quad V_1 = -P_H h/l$$

鉛直方向反力が得られる。一方、水平方向反力は逆対称条件と x 方向の力の釣合より、$H_1 = H_2 = P_H/2$ として求められる。このように逆対称荷重の場合は静定構造と同じで、反力も部材内の断面力も決定する。なお、h/l は**建物のアスペクト比**(縦横比)と呼ばれ、設計上重要なパラメータとなる。例えば、この値が大きい建物、つまり細長い構造では、引張反力 V_1 の値が大きくなり、自重を上回ると基礎の浮き上がり、あるいは杭の引き抜きが生じる。

次に、両端ピン支持門型ラーメンの梁中間部にピン接合がある場合の構造について考えてみよう。この構造は静定構造となり、容易に反力が

両端ピンの門型ラーメンは基本的には不静定構造である。ただし、逆対称荷重の場合は、静的構造と同様、材料特性に関係なく反力が求められる。

3 ヒンジ門型ラーメンは静定構造である。通常の 3 つの釣合式に、ヒンジ位置でのモーメントの釣合を一つ加えることで、４つの反力が求められることになる。

求められる。

R9：3 ヒンジ構造の扱い方

１：通常の 3 つの釣合を求める

２：切断法により骨組内のヒンジ位置でモーメントの釣合を追加する

２：3 ヒンジ構造には山型ラーメンや門型ラーメンがある

図 11(a)の節点 5 の丸印はヒンジ接合の位置を示し、接合部の回転角はヒンジ両端で不連続、曲げモーメントはゼロとなる。この 3 ヒンジ構造の反力の自由度は 4 つあるが、力の釣合は 3 つで、反力を決定するには釣合式が不足する。同図(b)のようにヒンジ位置を通る赤丸で骨組を囲い、荷重・反力及び切断した部材に仮想の力を加えて力の釣合を求める。無論、青丸で囲まれた領域を用いて釣合式を求めても良い。ここで使用する**切断法**は非常に有効であり、あらゆる場面で用いられる。切断法では、図(c)に示す「閉曲線で囲まれた骨組に加わる荷重や反力、さらに閉曲線が切断した部材断面に加えられる仮想の力は釣り合っている」を利用して、釣合式を求める。さらに、切断した断面内の応力は仮想の力と釣り合うことから求められる。この仮想の力の方向は任意で良いが、図 12 のように考えると扱いが便利である。

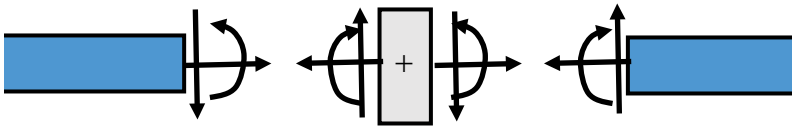


図 12 切断面における仮想の力

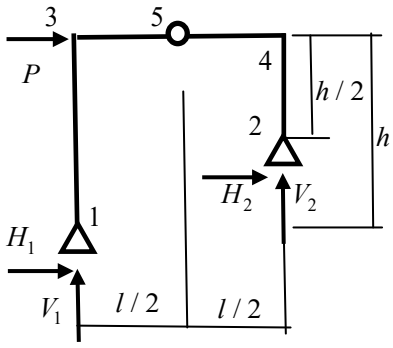
仮想の力は軸方向と鉛直方向の力及びモーメントであるが、仮定する方向は、図 12 の中央の断面力が正となる方向が良い。左側と右側では反対となるから注意されたい。これらについては断面力の項で詳しくお話しする。

図 11(c)の骨組において、節点 5 でのモーメントの釣合を求める。**節点 5 ではヒンジ接合であるため仮想のモーメントはゼロであり**、また、荷重 P はアームがゼロであることから、モーメントはゼロとなる。従って、節点 5 を中心とするモーメントは次式となる。

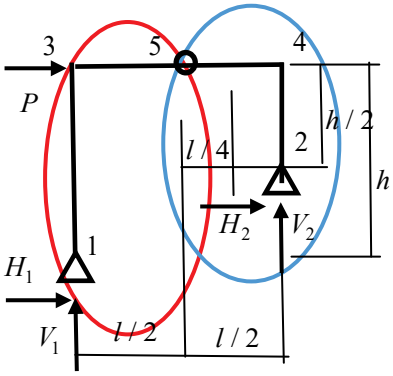
$$V_1 l/2 - H_1 h = 0$$

上記の釣合式を加えることで、4 つの反力が求められることになる。なお、図 11(a)に示す 3 つの力の釣合式、つまり両方向の力の釣合と節点 1 でのモーメントの釣合は次式となる。

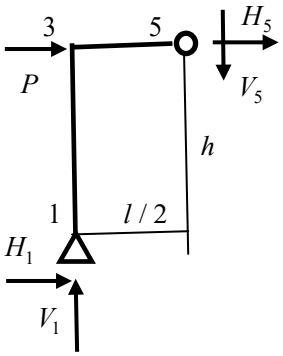
$$x: P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0; \quad Ph + H_2 h/2 - V_2 l = 0$$



(a) 柱頭水平集中荷重



(b) 赤丸部分で骨組を切断



(c) 切断面に加わる仮想の力

図 11 ピン接合位置でのモーメントの釣合

基礎８話 No.5　3 ヒンジ山形ラーメン

今回は基本構造である単純梁の拡張型として、3 ヒンジ門型ラーメンや 3 ヒンジ山形ラーメンの反力を求めてみよう。まず、図 13(a)に示される構造物の反力を求める。

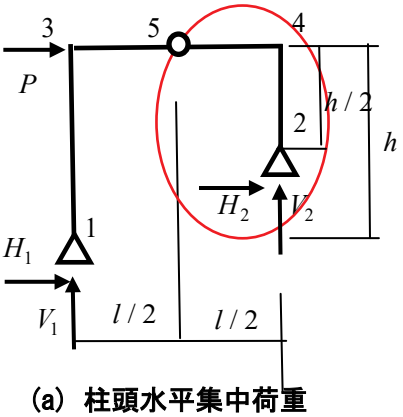
１）図 13(a)の反力：両方向の力の釣合より、釣合式は

$$x: P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

となり、節点 1 に関するモーメントは次式で与えられる。

$$Ph + H_2 h/2 - V_2 l = 0 \qquad \cdots(2)$$

ここで、前回お話しした赤丸で囲われた閉曲線内の力の釣合より、4 つ目の釣合式を求める。特に、節点 5 に関するモーメントの釣合を考える。ただし、節点 5 はヒンジ接合であることから、仮想のモーメントはゼロである。



(a) 柱頭水平集中荷重

$$-V_2 l/2 - H_2 h/2 = 0 \rightarrow \quad V_2 = -H_2 h/l \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式をモーメントの釣合式(2)に代入すると、

$$Ph + H_2 h/2 + H_2 h = 0 \rightarrow H_2 = -2P/3 \qquad \cdots\cdots(4)$$

となり、さらに、求めた H_2 を式(3)に代入すると、鉛直方向反力は

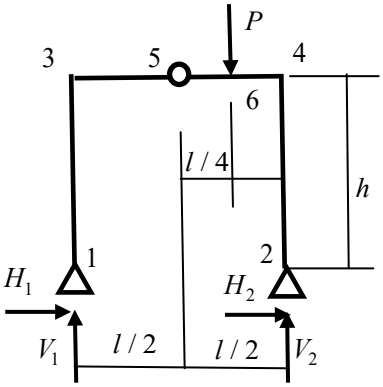
$$V_2 = \frac{2h}{3l}P \rightarrow \quad V_1 = -\frac{2h}{3l}P \qquad \cdots\cdots(5)$$

となる。式(1)と(4)より、H_1 が求められる。

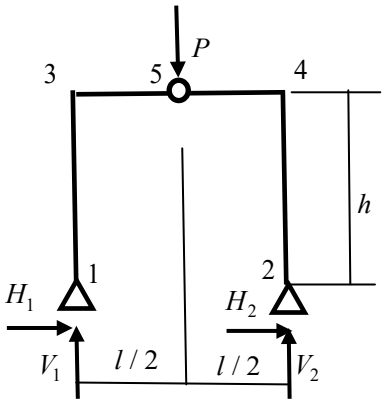
$$H_1 = -P - H_2 = -P + \frac{2}{3}P = -\frac{1}{3}P \qquad \cdots\cdots(6)$$

以上をまとめると、全ての反力は以下のようになる。

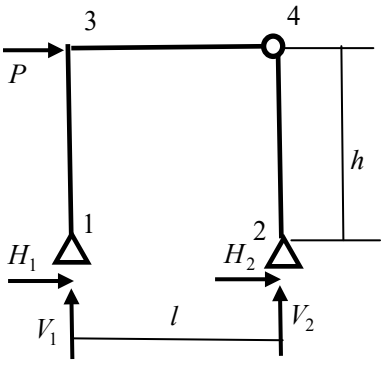
$$H_1 = -\frac{1}{3}P; \quad H_2 = -\frac{2}{3}P; \quad V_1 = -\frac{2h}{3l}P; \quad V_2 = \frac{2h}{3l}P$$



(b) 梁偏鉛直集中荷重



(c) 梁中央鉛直集中荷重



(d) 柱頭水平集中荷重

図 13 3 ヒンジ門型ラーメン

２）図 13(b)の反力：両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

$$x: H_1 + H_2 = 0; \quad y: P - V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$3Pl/4 - V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{3P}{4} \rightarrow V_1 = \frac{P}{4} \qquad \cdots\cdots(8)$$

節点 5 を切断し、節点 1 を囲む閉曲線において、節点 5 に関するモーメントの釣合及び上式と式(7)より、水平反力は次式となる。

$$V_1 l/2 - H_1 h = 0 \rightarrow \quad H_1 = \frac{l}{2h}V_1 = \frac{Pl}{8h}; \quad H_2 = -\frac{Pl}{8h} \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$H_1 = \frac{l}{8h}P; \quad H_2 = -\frac{l}{8h}P; \quad V_1 = \frac{P}{4}; \quad V_2 = \frac{3P}{4}$$

3）図 13(c)の反力：両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より、鉛直方向反力は、

$$x: H_1 + H_2 = 0; \quad y: P - V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$Pl/2 - V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{P}{2} \rightarrow V_1 = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$H_1 = \frac{l}{4h}P; \quad H_2 = -\frac{l}{4h}P; \quad V_1 = \frac{P}{2}; \quad V_2 = \frac{P}{2}$$

となり、また節点 5 を切断し、節点 1 を囲む閉曲線で節点 5 に関するモーメントの釣合及び式(10)と式(11)より、各水平反力は次式となる。

$$V_1 l/2 - H_1 h = 0 \rightarrow \quad H_1 = \frac{l}{2h}V_1 = \frac{l}{4h}P; \quad H_2 = -\frac{l}{4h}P \qquad \cdots\cdots(12)$$

4）図 13(d)の反力：両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

$$x: P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

$$Ph - V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{Ph}{l} \rightarrow V_1 = -\frac{Ph}{l} \qquad \cdots\cdots(14)$$

$$H_1 = -P; \quad H_2 = 0; \quad V_1 = -\frac{Ph}{l}; \quad V_2 = \frac{Ph}{l}$$

節点 4 を切断し、節点 2 を囲む閉曲線において、節点 4 に関するモーメントの釣合及び式(13)と式(14)より、水平反力は次式となる。

$$-H_2 h = 0 \rightarrow \quad H_2 = 0; \quad H_1 = -P \qquad \cdots\cdots(15)$$

続いて、**3 ヒンジ山形ラーメンの反力**を求めてみよう。

5）図 14(a)の反力：両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

$$x: H_1 + H_2 = 0; \quad y: P - V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(16)$$

$$Pl - 2V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{P}{2} \rightarrow V_1 = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(17)$$

節点 5 を切断し、節点 1 を囲む閉曲線において、節点 5 に関するモーメントの釣合及び式(16)と式(17)より、水平反力は次式となる。

$$V_1 l - H_1(h+a) = 0 \rightarrow \quad H_1 = \frac{l}{(h+a)}V_1 = \frac{l}{2(h+a)}P; \quad H_2 = -\frac{l}{2(h+a)}P \qquad \cdots\cdots(18)$$

$$H_1 = \frac{l}{2(h+a)}P; \quad H_2 = -\frac{l}{2(h+a)}P; \quad V_1 = \frac{P}{2}; \quad V_2 = \frac{P}{2}$$

6）図 14(b)の反力：両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

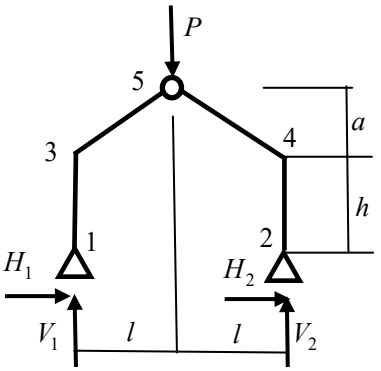
$$x: 2P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(19)$$

$$2Ph - 2V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{Ph}{l} \rightarrow V_1 = -\frac{Ph}{l} \qquad \cdots\cdots(20)$$

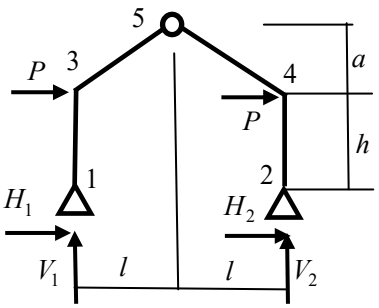
節点 5 を切断し、節点 1 を囲む閉曲線において、節点 5 に関するモーメントの釣合及び式(19)と式(20)より、水平反力は次式となる。

$$V_1 l - H_1(h+a) - Pa = 0 \rightarrow \quad H_1 = \frac{l}{(h+a)}V_1 - \frac{aP}{(h+a)} = -P; \quad H_2 = -P \qquad \cdots\cdots(21)$$

$$H_1 = -P; \quad H_2 = -P; \quad V_1 = -\frac{Ph}{l}; \quad V_2 = \frac{Ph}{l}$$



(a) 梁鉛直集中荷重



(b) 柱頭水平集中荷重

図 14 3 ヒンジ山形ラーメン

基礎９話 No.1　鋼の応力と歪の関係
弾性と塑性

今回は、建築構造用材料の鋼、コンクリート及び木材の力学的性質を学ぶことにする。下図は、構造用鋼材から切り出した試験片に、引張力を加えた場合の応力σと歪εの関係を示す。

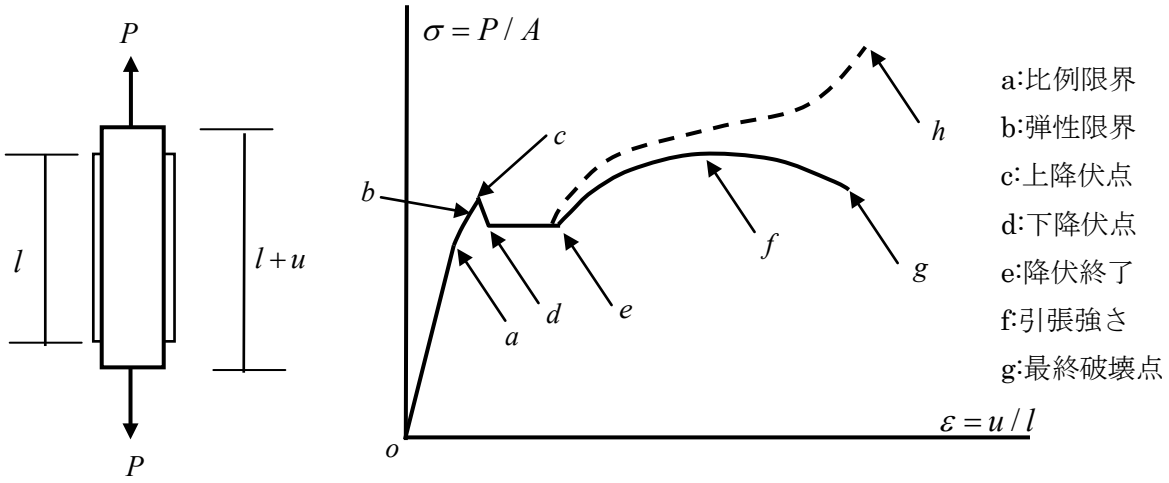


図１ 鋼の応力と歪の関係

図中の応力は、引張力Pを材の断面積Aで割って、

$$\sigma = P / A$$

として求められる。すなわち、応力の単位は単位面積当たりの力（$kN/cm^2, N/mm^2$）である。一方、歪は測定区間の伸び（変位量u）を測定区間lで割り、

$$\varepsilon = u / l$$

として求められる。歪の単位は、長さを長さの単位で割ったため、単位のない値、つまり無次元量である。

図1の応力と歪の関係をさらに詳しく見ていこう。応力が小さい領域は、応力と歪は比例関係を示し、図中の点aがその比例限界となる。従って、区間$o-a$は下記の比例関係が成立する。

$$\sigma = E\varepsilon$$

ここで、比例定数Eは、**縦弾性係数**あるいは**ヤング係数**と呼ばれ、材料固有の値である。その単位は、応力と同じで、単位面積当たりの力（$kN/cm^2, N/mm^2$）である。

ヤング係数は、応力と歪の関係を示す図1で、直線$o-a$の勾配となる。同図の点bは弾性限界であり、この点以前で荷重を除荷すると、歪は元の点oに戻る。実用的には点aとbは同一と考えても良い。点cは上降

構造材料のヤング係数

構造用鋼材：20500　kN/cm^2

コンクリート:2468　kN/cm^2

（おおよそ鋼の1/10）

木材:700 ～ 1000　kN/cm^2

伏点（または、単に降伏点）と呼ばれ、この点を越えると歪は進行するが、逆に応力は減少する。ただし、荷重の載荷速度が遅い場合、この上降伏点は明確に現れず、次の下降伏点に進む。点dは下降伏点と呼ばれ、この点から降伏の終了を示す点eまで、応力は一定のままで、歪が進行する。この区間dからeまでを**降伏棚**と呼ぶ。点eから、応力は再び上昇する。この現象を**歪硬化**と呼ぶ。

点fは最大応力を示し、この値を引っ張り強さという。この後は、歪が進行するに従って応力は低下し、最終的に点gで断面が破断する。実際は、降伏後に断面積が減少していくため、この減少した断面積を用いて応力を計算すると、図中の破線のように点eから破断点間の曲線（点eよりfまで）では、応力の上昇を示しつつ、歪は進行することになる。

応力と歪の関係は、図2に示すように二つの領域、弾性範囲と塑性範囲に分けられる。荷重が除去されると図3(a)のように歪がゼロとなる弾性範囲と、同図(b)のように歪が元の状態に戻らず、応力がゼロでも塑性歪が残る範囲である。

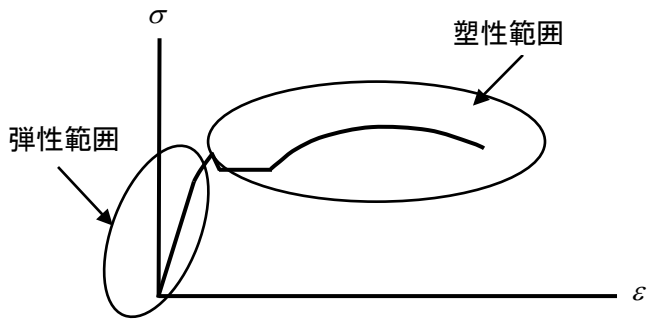
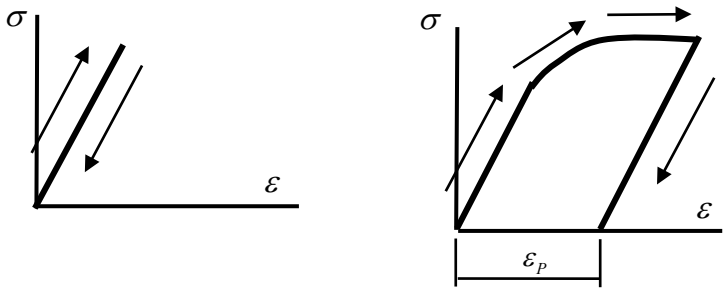


図 2 弾性範囲と塑性範囲

弾性：荷重を除去した場合、歪が完全に元に戻る性質をいう。

塑性：外力を除去した場合、歪が元に戻らない性質をいう。
塑性歪ε_P：荷重除去後、残った歪を塑性歪ε_Pという。



(a)弾性歪履歴　　**(b)弾塑性歪履歴**

図 3 弾性歪と塑性歪

鋼が圧縮力を受ける場合、応力と歪の関係は引張力を受ける場合とほぼ同一となるが、塑性後の挙動は、引張力を受けた場合と逆で、断面積が増大するため、引張力と同等以上の荷重を受けることができる。ただし、応力解析ではヤング係数と降伏点強度は引張の場合と同一として扱われる。鋼構造の設計における強度は、降伏点強度の下限値と引張強さの下限値の0.7倍とを比較し、小さい値を基準値(F値)として定めている。ただし、長い材では圧縮破壊が生じる前に、材軸と直交する方向に曲がって大きな変形を起こす。これは**座屈現象**のひとつで、この座屈に対する検討を別に行う必要がある。なお、座屈については後日お話しする。

基礎１０話 No.2　コンクリートと木造の応力と歪の関係

前回に続いて、材料特性である応力と歪の関係、特にコンクリートと木材についてお話しする。コンクリートに力を加えると、図4に示す応力と歪の関係が得られる。特徴として、比例領域が少なく、鋼のような明確な降伏点を示さない。また、関係を表す曲線はコンクリート強度や荷重を載荷する速度にも左右され、変化する。コンクリート強度は、通常、打設後28日目（４週強度）で測定され、一般に弾性範囲は最大圧縮強度の1/3 程度とする。打設後１週間を経過した時点では、圧縮強度は４週強度の70%程度、打設後5年経過時点では４週強度より20%程度増加する。コンクリートの履歴特性には、ほとんど直線部分がなく、曲線で表す必要がある。ただし、数値計算や理論解析では、近似的にしかも効率良く模擬することを目的に、図5の直線コンクリート型を用いることが多い。

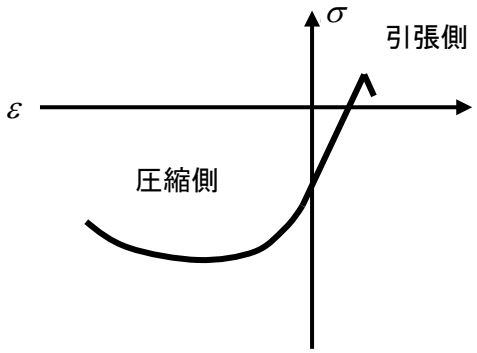


図 4 コンクリートの応力と歪の関係

コンクリートがせん断力を受けると、その耐力は圧縮強度の1/10 程度となり、また引張力を受けると、せん断強度の0.5から0.7程度となる。そのため、コンクリートの引張耐力はほとんど期待できない。鉄筋コンクリート部材に曲げモーメントが生じると、断面内の片側は圧縮応力に、他の片側は引張応力となる。上記の理由より、鉄筋コンクリート部材(RC造)では、「圧縮側はコンクリートと鉄筋が共同で抵抗し、引張側は鉄筋のみで抵抗する」として構造設計を行うことになる。

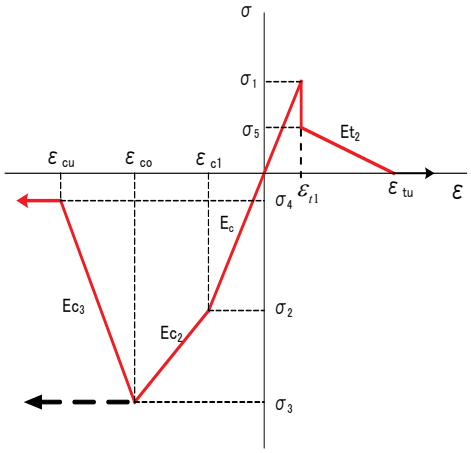


図 5 数値計算で良く用いられるコンクリートの履歴特性

次に、木材の力学的性質を考えてみよう。最大の特徴として材料特性には方向性があり、また節や割れなどの欠陥がある。そのため、繊維方向とこれに直交する方向とでは強度が異なる。通常長期に渡って荷重を受ける長期荷重時では、からまつや檜で繊維方向の圧縮強度は3.52kN/cm²である。この値を1とすると、引張は80% 弱、せん断は10% の許容応力となる。また、繊維と直交方向のめり込み応力は、20%以下に設定されている。この値は、材中間部より材端で、乾燥状態より湿潤状態において、大きく低減されることになる。

近年、集成材の技術が進歩したことで、大断面の柱・梁部材も出現し、大スパン構造の施工も可能となっている。集成材は、節による材料のばらつきや、材の方向性の問題などが解決され、信頼性の高い建築構造材

料として期待されている。

木材は天然の材料であり、その繊維は材軸方向に配列されている。そのため、木材の物理的、機械的特性は各方向で異なる性質を有し、これを**異方性**という。これらの特質は木材の成長過程によっても左右され、場所や環境によって変化する。木材の異方性は強度やヤング係数にのみ影響があるわけではなく、荷重の方向によっては脆性的(ぜいせい)な破壊を生じることになる。

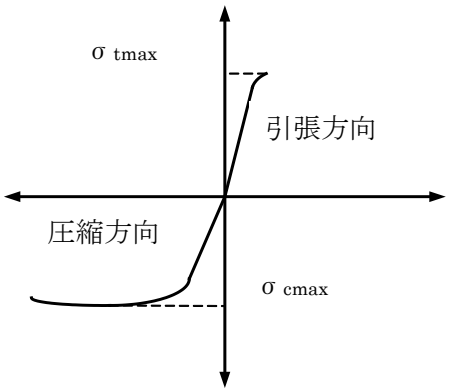


図 6 木材の軸方向の応力と歪の関係

一般的な木材の軸方向応力における応力と歪の関係を図 6 に示す。圧縮方向は非線形性があり、比較的靭性的(じんせい)な性質を持つが、引張方向は非常にもろく、ほぼ線形状態で破壊に至る。せん断や曲げについても、引張と同様に脆性的で、構造物として最も避けるべき性質を持つ。この特性は木構造物の変形を大きく左右する接合部でも同様で、脆性的な破壊を起こさないように、例えば圧縮側の靭性を利用する接合法、金物の延性を活用した接合具との併用等、を考慮した接合部設計が必須である。

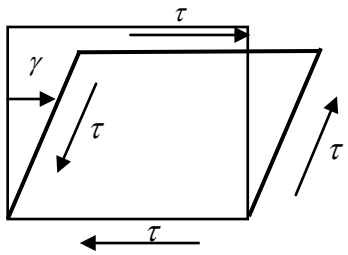
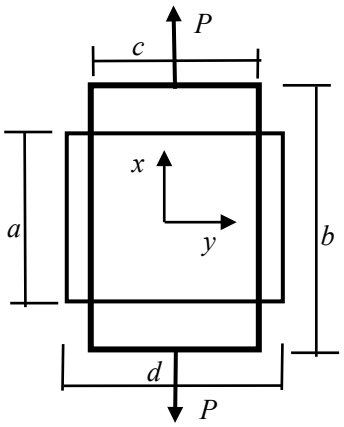


図 7 せん断応力とせん断歪

最後に、構造用材料全体における力学的特性の一つであるせん断応力とせん断ひずみの関係について考える。弾性範囲において、せん断応力 τ とせん断歪 γ の関係は、せん断弾性係数 G を比例定数として次式が成立する。式中のせん断弾性係数 G は、ヤング係数 E とポアソン比 ν を用いて、次式右で表すことができる。そのため、せん断弾性係数はヤング係数とポアソン比が決定されると自動的に決まる値である。

$$\tau = G\gamma; \quad G = E/(2(1+\nu))$$

ポアソン比 ν は、長さ方向の単位長さ当たりの伸びに対する、横方向の単位長さ当たりの縮み、との比で表される。すなわち、材軸方向に引張力を加えた場合、これと直交方向に材が縮む割合である。一方、材軸方向に圧縮力を加えた場合、これと直交方向に膨らむ割合を示す量でもある。ポアソン比は材料により固有の値を持ち、その代表的な値を以下に示す。なお、ポアソン比の逆数をポアソン数と呼ぶ。



$$\nu = \left|\varepsilon_y / \varepsilon_x\right|$$
$$\varepsilon_x = (b-a)/a$$
$$\varepsilon_y = (c-d)/d$$

図 8 ポアソン比

R10：線形梁部材の応力と歪の関係

１：梁理論の応力と歪の関係は $\sigma_x = E\varepsilon_x$ で表す

２：ヤング係数 E は材料特性であり、材料によって異なる

３：ポアソン比 ν は材料特性であり、以下に代表的な材について示す

鋼：$\nu = 0.3(0.25 \sim 0.33)$ ；コンクリート：$\nu = 0.17(0.15 \sim 0.20)$ ；弾性ゴム：$\nu = 0.46 \sim 0.49$

４：せん断弾性係数 G ： $G = E/(2(1+\nu))$ で与えられ、 E と ν で自動的に決まる

基礎１１話 No.1　応力分布と断面力
曲げモーメントと軸力の定義

今回は、部材が軸方向に押されると同時に曲げられるとき、断面内に生じる応力と断面力についてお話しする。まず、軸方向歪を復習する。図1に示すように長さ l の棒が引っ張られて、Δl だけ伸びたとすると、歪 ε_x は次式で与えられる。なお、ここでは部材を梁と称することもある。

$$\varepsilon_x = \frac{(l+\Delta l)-l}{l} = \frac{\Delta l}{l} \qquad \cdots\cdots(1)$$

圧縮される場合でも、引張と同様に求められる。そこで、引張歪は正で、圧縮歪は負で表す。

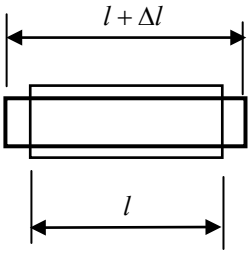


図 1 軸方向歪

次に、軸力と曲げを同時に受ける部材の断面内に生じる歪を考えてみよう。ここでは、梁理論で最も重要な仮定である「**平面保持**」を用いる。この平面保持を利用すると、断面を貫く中心線の変形状態によって、断面全体に分布する応力や歪を求めることができる。この中心線を**図芯軸あるいは材軸**と呼ぶ。まず、部材が変形をしていない状態で、図2に示す原点から任意の位置 x で、図芯軸に垂直となる平面を考える。部材が軸力と曲げにより変形すると、断面内に生じる歪の分布は、平面保持の仮定より、次のように断面内の y 軸に関する一次式で表すことができる。建築で用いる梁や柱では、断面の大きさに比較して、部材の長さが比較的長いため、一般的にこの仮定は妥当である。

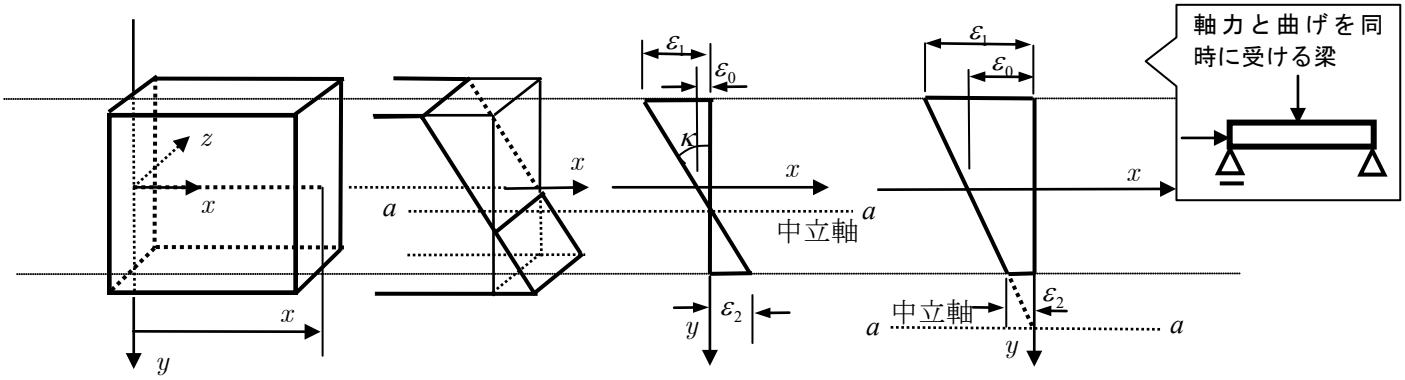
断面内の応力は偶力であり、その符号は重要である。正は引張応力、負は圧縮応力を表す。せん断応力の正は、時計回りを表す力、負は反時計回りである。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y \qquad \cdots\cdots(2)$$

上の歪で、ε_0 と κy は各々軸歪及び曲げ歪と呼ばれ、その具体的な表現は歪と変位との関係から求められる。部材内に生じる応力は、歪に関連して求められる。この応力と歪の関係は、前回お話ししたように、歪が弾性範囲であると、以下のように比例関係が成立する。

断面力が加わった際の断面内の応力状態を理解することは非常に重要である。良く覚えておこう。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \qquad \cdots\cdots(3)$$

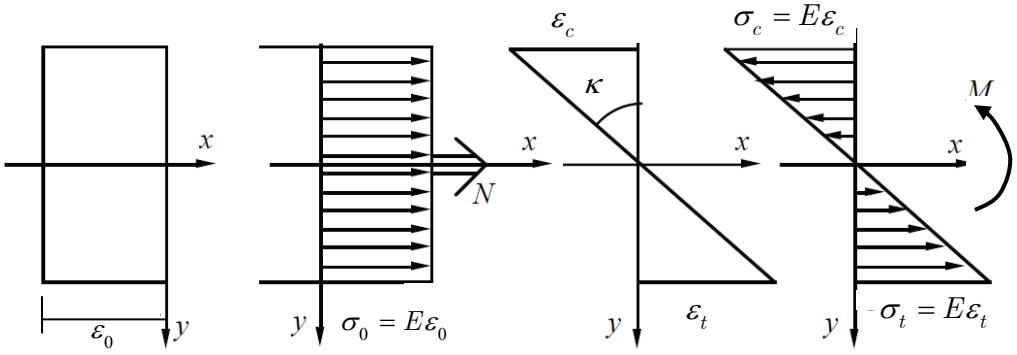


(a) 梁内部の歪分布　　(b) 中立軸が断面の外になる場合の歪分布

図 2 軸力と曲げを同時に受ける梁断面内の歪

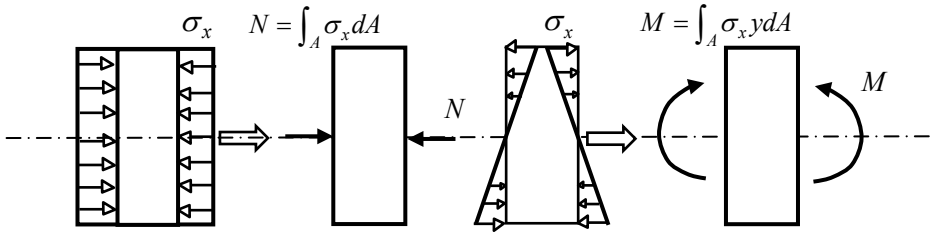
ここで、σ_x, ε_x の下添え字は部材の軸方向である x 軸方向を意味する。比例定数 E は縦弾性係数（ヤング係数）と呼ばれ、材料によって異なる値をとる。これについては既にお話しした。

次に、軸力と曲げを同時に受ける梁断面内の応力について考えてみよう。歪が比較的小さく、断面内に生じる最大応力が比例限界より小さい場合、断面内の応力は、図3に示すように仮定した歪にヤング係数をかけた分布状態となる。例えば、図3(a)は、梁の軸方向に引張力が加わった場合であり、同図(b)は曲げが加わった場合である。



(a) 引張力による応力分布　　(b) 曲げによる応力分布

図 3 断面内の歪分布と応力分布



（a）軸力　　（b）曲げモーメント

図 4 応力分布と断面力の定義

梁全体の応力状態を表す場合、常にこの応力分布を用いていたのでは、面倒で仕方がない。そこで、この応力状態を上手に言い表す方法を考える必要がある。まず、断面全体について、応力の積分値とモーメントを用いて代表させるというアイディアに思いつく。これが**断面力**という考え方である。具体的には、次式で示すように、軸力 N と曲げモーメント M を定義して用いる。

$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad M = \int_A \sigma_x y dA \qquad \cdots\cdots(4)$$

図4のように軸力 N は軸方向応力 σ_x を断面内全てについて寄せ集めた値、つまり積分値である。また、曲げモーメント M は軸方向応力 σ_x と図芯からの距離 y をかけたモーメントを断面内全てについて集めた値である。後は、次回お話しする。

基礎１２話 No.2　断面力から応力分布や最大応力を求める

前回に続いて、部材が軸力と曲げを同時に受けるとき、断面内に生じる応力分布についてお話しする。まず、前回定義した断面力、つまり軸力と曲げモーメントを具体的に求めてみよう。ここでは、歪分布は平面保持の仮定による式(2)を用い、応力と歪の関係は式(3)を用いる。軸力は式(4)左であり、ε_0 と κ が x のみの関数であることから次式となる。

$$N = \int_A \sigma_x dA = E\int_A \varepsilon_x dA = E\int_A (\varepsilon_0 + \kappa y) dA = E(\varepsilon_0 \int_A dA + \kappa \int_A y dA) \quad \cdots(5)$$

上式右の右辺中の積分は、部材の断面が決まれば、計算することができる。ここで、上の積分を次に示す記号で表す。

$$A = \int_A dA; \quad S_z = \int_A y dA \quad \cdots\cdots(6)$$

上式左の積分 A は断面積を表し、右の S_z は断面に関する一次のモーメントを表すことから、**断面一次モーメント**と呼ばれる。

部材の図芯とは、断面内の断面一次モーメントをゼロとする位置である。つまり、図芯を原点とすれば、断面一次モーメントはゼロとなる

この断面一次モーメントは z 軸を中心とするモーメントであることから、y 軸の原点を移動することによって、モーメントがゼロとなる位置が存在する。この位置を y 軸の原点とすれば、断面一次モーメント S_z はゼロとなる。同様に、y 軸に関する断面一次モーメント S_y も、断面内の座標軸を移動することによって、ゼロにすることができる。両者の**断面一次モーメントがゼロとなる位置を断面の図芯位置**と呼び、今後、この位置を断面内の座標原点とする。以前、座標原点を断面の中心位置に設定するといったが、実は、座標原点はこの図芯位置を指す。具体的な図芯位置の求め方は、後で説明しよう。

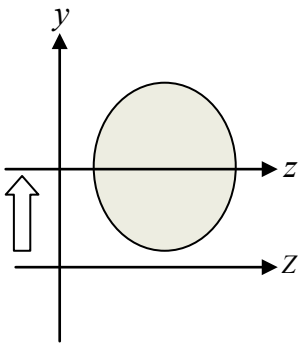


図 5 断面の図芯位置

図芯位置を原点にとると軸力を表す式(5)の第 2 項は当然ゼロとなり、軸力は次式となる。

$$N = E\varepsilon_0 A = \sigma_0 A \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし、応力は弾性域であり、また、断面は一様な材料であることを仮定する。従って、次式が成立し、上式はこれを用いている。

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \quad \cdots\cdots(8)$$

次に、曲げモーメント M を求めてみよう。曲げモーメントの定義式(4)右に応力と歪の関係式(3)及び歪の式(2)を代入すると、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = \int_A \sigma_x y dA = E(\varepsilon_0 \int_A y dA + \kappa \int_A y^2 dA) \quad \cdots\cdots(9)$$

軸力を計算したときと同様、上式中に 2 種類の積分が出現する。この中で、次式で示す I_z は断面に関する二次のモーメントを表すことから**断面二次モーメント**と呼ばれる。

$$I_z = \int_A y^2 dA \qquad \cdots\cdots(10)$$

また、式(9)の中には、軸力の場合と同様に、断面一次モーメントが含まれるが、断面内の座標として図芯位置を原点にとることで、断面一次モーメントはゼロとなる。無論、式(10)で示される断面二次モーメントも図芯位置を原点にして積分する。従って、断面一次モーメントがゼロとなることから、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = EI_z\kappa \rightarrow \kappa = M / EI_z \qquad \cdots\cdots(11)$$

このように、軸力は仮定した軸方向歪ε_0によって、また、曲げモーメントは曲げ歪の係数、つまり曲率κによって生じることが理解できる。

曲げによって生じる軸方向応力σ_bは、応力と歪の関係式(3)と曲げモーメントが軸方向歪ε_0に無関係であることを考慮すると、

$$\sigma_b = E\varepsilon_x = E\kappa y \qquad \cdots\cdots(12)$$

で与えられる。従って、軸力によって生じる応力σ_0と曲げモーメントによって生じる応力σ_bは各々式(7)及び式(11)と(12)より次のように得られる。

$$\sigma_0 = \frac{N}{A}; \quad \sigma_b = \frac{M}{I_z} y \qquad \cdots\cdots(13)$$

断面内の応力状態は、軸力と曲げモーメントが同時に加わる場合、各々の応力を重ね合わせることによって以下のように得られる。

この表現は 2 次元応力状態であることに注意！

$$\sigma_x = \sigma_0 + \sigma_b = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y \qquad \cdots\cdots(14)$$

上式は、仮定した歪と同じように、yに関する一次式となっている。そのため、圧縮及び引張の最大応力が生じる位置は、図芯より最も遠い梁断面の縁となることが分かる。この応力を**縁応力**と呼び、以下の式で得られる。

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c} \qquad \cdots\cdots(15)$$

ここで、σ_tを下端縁応力(引張側縁応力)、σ_cを上端縁応力(圧縮側縁応力)と呼ぶ。また、Z_t及びZ_cは各々下端と上端に関する**断面係数**と呼び、以下の式で与えられる。

$$Z_t = \frac{I_z}{y_t}; \quad Z_c = \frac{I_z}{y_c} \qquad \cdots\cdots(16)$$

上式で、y_tとy_cは断面内で図芯位置から、各々、引張応力が生じる断面の縁までの距離と圧縮が生じる断面の縁までの距離である。無論、圧縮側と引張側の断面形状が図芯に対し対称であるときは、Z_tとZ_cは同じ値となる。

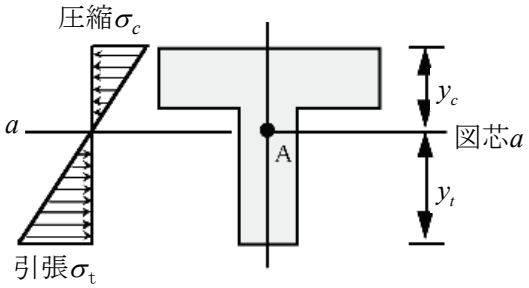


図 6 T 型梁の図芯と曲げによる応力分布

基礎１３話 No.1　曲げによるせん断応力分布

せん断応力とせん断力の関係の記述は、少し式が多くて難しいかもしれない。ここでは、曲げによって生じるせん断応力分布と断面の形状係数を理解すれば良い。さらに深い知識が必要な際、再度学ぶことにしよう。

梁が曲げられるとき、断面内には軸方向応力と同時にせん断応力も発生する。今回は、断面内の曲げモーメントと共に生じるせん断応力とその分布及びその断面力であるせん断力についてお話しする。

最初に、曲げモーメントによって生じる長方形断面内のせん断応力を求める。曲げモーメントによる梁断面内のせん断応力分布を求めるために、断面を材軸方向に dx の幅で切断し、その断面内の応力状態を考える。断面に沿うせん断応力分布を知るため、まず、図 1 左に示す x 軸方向のせん断応力を求める。このせん断応力は同図のように梁を微小部分で切断し、x 方向の力の釣合より求められる。この微小部分では両側面と下面には外力はないが、切断面には応力が生じており、この応力による合力の釣合状態を仮定する。

ここで、さらにこの切り出した断面を y より断面端部の y_1 まで切断し、その断面における x 方向の力の釣合は式(1)となる。ただし、断面が矩形であることから、応力分布は幅方向に一定(一様)であるとする。式(1)の第 1 項は図 1 の前方側面、第 3 項は後方側面の軸方向応力による合力であり、第 2 項は、上面に沿うせん断応力である。

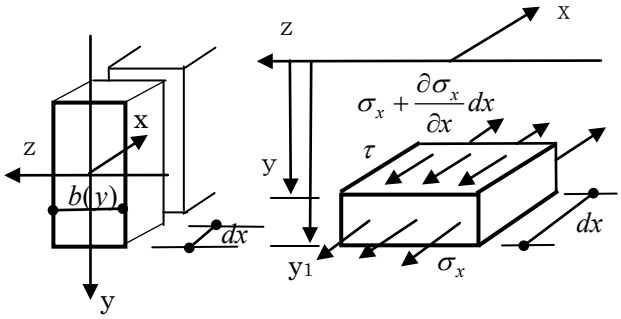


図 1 断面内応力

$$-\int_y^{y_1}\int_0^{b(y)} \sigma_x dz dy - \int_0^{b(y)} (\tau dx) dz + \int_y^{y_1}\int_0^{b(y)} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dz dy = 0 \qquad \cdots(1)$$

次に軸方向応力が幅方向では一定であることを考慮して、z 軸方向の積分を行い、dx で割った後、上式を移項し整理すると次式が得られる。

$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1}\int_0^{b(y)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz dy = \int_y^{y_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b(y) dy \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで、$b(y)$ は y 位置の断面幅を示すが、実際は矩形断面であることから定数 b となる。また、曲げによる軸方向応力 σ_x は My / I_z であり、x 方向の微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{y}{I_z}\frac{dM}{dx} = \frac{y}{I_z} Q \leftarrow \quad \frac{dM}{dx} = Q \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式を式(2)に代入し、切断した断面における x 方向の釣合式を評価する。ここで、$S(y)$ は z 軸に関する y より y_1 までの断面の断面一次モーメントを表す。

$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1} \frac{yQ}{I_z} b(y) dy = \frac{Q}{I_z} S(y); \quad S(y) = \int_y^{y_1} y b(y) dy \qquad \cdots\cdots(4)$$

なお、せん断応力が断面幅 $b(y)$ で一定であると仮定すると、幅方向の積分は単純で、せん断応力は次のように求められる。なお、一様でない場合には平均値が算出され、最大値はそれよりも大きい値となる。

$$\tau = \frac{Q(x)}{I_z b(y)} S(y); \quad Q(x) = \int_A \tau dA \qquad \cdots\cdots(5)$$

次に、図 2 に示す微小な四角におけるせん断応力の釣合を考える。四角中央を原点にモーメントの釣合は、

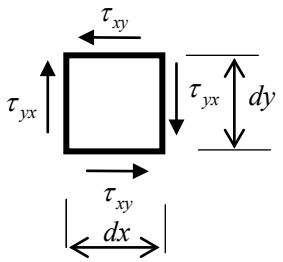


図 2 せん断応力の釣合

$$\tau_{yx} dy \frac{dx}{2} + \tau_{yx} dy \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dx \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx \frac{dy}{2} = 0 \rightarrow \tau_{yx} dy dx = \tau_{xy} dx dy \rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \cdots(6)$$

となり、式(5)で求めた水平方向のせん断応力は直交する断面せい方向のせん断応力に等しいことが分かる。このことから、式(5)によって断面に沿うせん断応力が求められることになる。つまり、式(5)が曲げモーメントを受ける梁のせん断応力分布を表す。同式から分るように、せん断応力は、断面二次モーメント I_z と断面幅 $b(y)$ に逆比例し、y より外の z 軸に関する断面一次モーメント $S(y)$ に比例する。

次に例として、梁幅 b・せい D の矩形断面におけるせん断応力分布を求めてみよう。まず、$S(y)$ を次のように求める。

$$S(y) = \int_y^{\frac{D}{2}} y b dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_y^{\frac{D}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) = \frac{bD^2}{8}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right) \qquad \cdots\cdots(7)$$

矩形断面のせん断応力分布
曲げモーメントによるせん断応力分布を求めるためには、y より外の z 軸に関する断面 1 次モーメント $S(y)$ が必要となる。

上式を式(4)に代入すると、矩形断面のせん断応力分布が求められる。

$$\tau(y) = \frac{Q}{I_z b}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)\frac{bD^2}{8} = \frac{3Q}{2A}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right) \qquad \cdots\cdots(8)$$

曲げモーメントによって生じる矩形断面のせん断応力分布は、断面の上端と下端でゼロ、中央で最大となる放物線である。また、最大せん断応力は上式に $y = 0$ を代入すると次式で表され、平均せん断応力の 1.5 倍となる。この値 k を**断面の形状係数**と呼ぶ。矩形以外の断面の形状係数及びせん断応力は他のテキストを参照されたい。

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0; \quad k = 1.5; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A} \leftarrow \quad Q(x) = \int_A \tau dA \qquad \cdots\cdots(9)$$

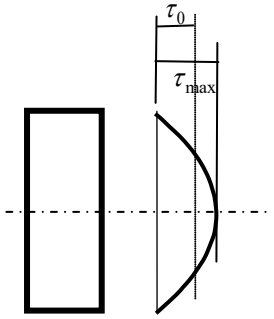


図 3 矩形断面内のせん断応力

側面が y 方向に平行な断面、つまり矩形断面や H 形断面のウェッブ部、薄肉パイプの中立軸近くでは式(5)は成立するが、その他の断面や部位では面外のせん断応力が $\tau_{xz} \neq 0$ に、また面内のせん断応力 τ_{xy} が幅方向に一定とならず同式は成立しない。これについては次回お話しする。

R11：曲げによって生じる断面内のせん断応力

１：断面内に生じるせん断応力分布は放物線に近似する
２：矩形断面ではせん断応力分布は放物線で最大応力は平均応力の 1.5 倍となる
３：最大せん断応力は次式で与えられる。断面の違いは形状係数 k で吸収する

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A}; \quad Q = \int_A \tau dA$$

基礎１４話 No.2　せん断流れ理論とせん断中心

今回も、曲げによって発生するせん断応力分布、特にここでは、薄肉断面で構成された断面のせん断力応力分布についてお話しする。

最初に、曲げモーメントによって生じる H 型断面内のせん断応力分布を、前回お話しした古典的な方法で求めた結果について分析する。求めた代表的な H 型断面のせん断応力分布を図 4 に示す。同図のせん断応力分布には矛盾がある。例えば、フランジの内端にはせん断応力が発生しているが、このせん断応力に対応する外力が存在しない。また、フランジとウェッブに大きな応力の不連続があり、応力の連続性がどのように成立しているか説明できていない。このように薄肉断面で構成された断面では、式(5)で求められる古典的なせん断応力分布には矛盾があり、説明できない結果が得られる。

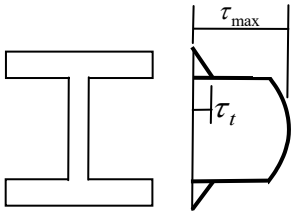


図 4 古典的な H 型断面のせん断応力分布

これらの矛盾を解決するために、**せん断流れの仮定による理論**がある。肉厚 t の薄肉断面では、せん断応力は断面内一様に大きさ τt で、断面内を軸線に沿って流れ、その方向は断面内の中心線に一致するという考えである。この理論に従うと、フランジ内のせん断応力分布が次のようになる。

$$\tau = \frac{Qy}{I_z}(z_1 - z) \qquad \cdots\cdots(10)$$

ただし、ウェッブのせん断応力は式(5)で求められることから、せん断応力の最大値は同式から得られる。このせん断流れ理論によると、H 型断面におけるせん断応力は、図 5(a)のようになり、接合部応力の不釣合状態は解消される。

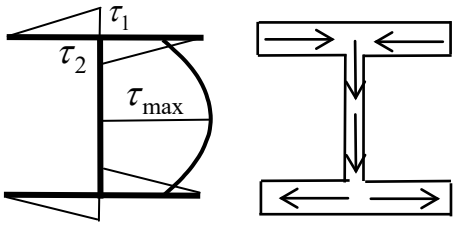


図 5 せん断流れ理論による H 型断面のせん断応力分布

せん断流れ理論の詳細は、「構造力学入門第６章」を参照されたい。

次に、非対称断面のせん断応力分布とその特異な挙動について考える。断面が対称の場合、図芯に荷重が加わると、鉛直方向にたわみ、断面は捩じられることはない。しかし非対称な断面、例えば溝型断面の場合、鉛直方向にたわむと同時に、断面に捩じれ現象を生じる。図 6 の図芯 G から載荷位置を右方向にずらしていくと、捩じれが生じない位置が存在する。この点は**せん断中心** S と呼ばれ、断面の形状で決まる断面固有の値である。つまり、このせん断中心を通って外力が作用すると断面は捩じれることなく純粋に曲げ変形を生じる。逆に、この点を通らずに外力が作用すると曲げ変形と共に断面が捩じれることになる。一方、このせん断中心を軸にして捩じると曲げ変形が生じず、純粋に捩じれのみが発生するが、図芯などを中心として捩じると捩じれと共に曲げ変形が生じる。以下に、溝型断面を例にして、せん断中心を求めてみよう。

今回も式が多く表れて、理解し難い。今回では、非対称断面では、曲げを受けるとたわみと同時に捩じれ変形が生じること、この断面には図芯とは別にせん断中心があり、ここに外力が加わると、捩じれ変形が生じないことなどを、理解すれば良い。

次に、図 6 に示す断面幅b、せいDで、フランジの板厚t_f、ウェッブの板厚t_wの溝型断面に関するせん断中心の位置を求める。上記で説明したせん断流れ理論によってフランジ部のせん断応力は求められ、その合力であるせん断力もせん断応力を積分することで得られる。

ウェッブ部のせん断応力$\tau_w(y)$は、式(8)と図 6 のフランジ部の最大値$\tau_{f\max}=QDb/2I_z$の和で与えられ、ウェッブ部の断面全体について積分することで、せん断力Q_wが以下のように求められる。

$$Q_w=2\int_0^{\frac{D}{2}}t_w\tau_w(y)dy=2\frac{Q}{I_z}\left(\int_0^{\frac{D}{2}}(1-(\frac{2y}{D})^2)\frac{t_wD^2}{8}dy+\frac{D}{2}bt_f\int_0^{\frac{D}{2}}dy\right)$$
$$=\frac{Q}{I_z}\left(\frac{t_wD^3}{12}+\frac{bD^2t_f}{2}\right) \quad \cdots\cdots(11)$$

次に溝型断面の断面二次モーメントを求めると次式で与えられる。ただし、フランジの板厚中心位置に関する断面二次モーメントは無視する。

$$I_z=\left(\frac{t_wD^3}{12}+2\frac{bD^2t_f}{4}\right) \quad \cdots\cdots(12)$$

上式を式(11)に代入すると、ウェッブ部分のせん断力Q_wが外力Qと釣合うことが理解できる。一方、上側のフランジ部のせん断力Q_fは、次式のように積分することで求められる。

$$Q_f=\int_0^b t_f\tau_f dz=\frac{QDb^2t_f}{4I_z} \leftarrow \quad \tau_f=\frac{Qy}{I_z}(z-z_1)=-\frac{QD}{2I_z}(b-z) \quad \cdots\cdots(13)$$

フランジ部のせん断力は互いに方向が逆であるため偶力となり、モーメントを発生させる。断面を捩じる働きのモーメントM_Tは、フランジ部のせん断力にその間の距離を掛けることによって得られる。

$$M_T=Q_fD=\frac{QD^2b^2t_f}{4I_z} \quad \cdots\cdots(14)$$

せん断中心では捩じれモーメントが発生しないため、外力の作用点であるせん断中心は、モーメントM_Tとウェッブ部のせん断力によるモーメントが釣合う位置に存在する。図 6 を参考に、フランジ部の偶力によるモーメントとウェッブ部のせん断力によるモーメントが釣合うとして、次のモーメントの釣合が得られる。この式より、ウェッブ部の中心から作用点までの距離e、つまりせん断中心の位置が決定する。

$$M_T=eQ\rightarrow e=\frac{M_T}{Q}=\frac{QD^2b^2t_f}{4I_z}\frac{1}{Q}=\frac{D^2b^2t_f}{4I_z}=\frac{3D^2b^2t_f}{D^3t_w+6bD^2t_f}=\frac{b^2t_f}{Dt_w/3+2bt_f} \quad \cdots\cdots(15)$$

溝形断面のウェッブ部のせん断応力$\tau_w(y)$は、矩形のせん断応力とせん断流れによるフランジ部との交点のせん断応力の和で表される。ウェッブのせん断応力は、式(10)より、

$$\tau_f=\frac{QD}{2I_z}(b-z)$$

で与えられ、フランジ部との交点の値は$z=0$より、次式となる。

$$\tau_{f\max}=\frac{QDb}{2I_z}$$

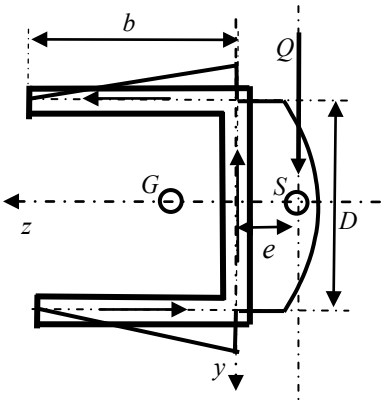


図 6 溝型断面のせん断応力分布とせん断中心

非対称断面における図芯とせん断中心の関係と、曲げと捩じれの関係を理解しよう。

R12：薄肉断面で構成された断面のせん断応力

１：せん断流れ理論によるせん断応力

２：対称断面では図芯に荷重が加わった場合、鉛直にたわみ、断面は捩じれない

３：非対称断面では、図芯に荷重が加わった場合、鉛直に撓むと共に断面は捩じれる

４：せん断中心Sに荷重が加わった場合、断面は捩じれることなく鉛直に撓む

基礎１５話　断面内の応力 モールの応力円

ここまでは、断面内の応力を図芯に対し垂直の面で考えていた。今回は斜めの面で、応力状態がどのようになっているかについてお話しする。図 1(a)には $x-y$ 座標に平行で微小な矩形を取り出し、そこに働く応力を示す。力の釣合より $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau$ である。

次に、同図(b)のように角度 φ で長さ l の斜面に働く応力 $(\sigma_\varphi,\tau_\varphi)$ を力の釣合より求めてみよう。x 方向と y 方向の力の釣合は

$$\left.\begin{aligned} x:\ & l\sigma_\varphi\cos\varphi-l\tau_\varphi\sin\varphi-l\cos\varphi\sigma_x-l\sin\varphi\tau=0\\ y:\ & l\sigma_\varphi\sin\varphi+l\tau_\varphi\cos\varphi-l\sin\varphi\sigma_y-l\cos\varphi\tau=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

となり、$(\sigma_\varphi,\tau_\varphi)$ について解くと、角度 φ における応力が求められる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi&=\sigma_x\cos^2\varphi+2\tau\sin\varphi\cos\varphi+\sigma_y\sin^2\varphi=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\varphi+\tau\sin2\varphi\\ \tau_\varphi&=\tau(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-(\sigma_x-\sigma_y)\sin\varphi\cos\varphi=\tau\cos2\varphi-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\varphi \end{aligned}\right\}\cdot(2)$$

次に、応力が最大・最小となる角度を $\varphi=\alpha$ とし、このときの応力を求める。まず、上の第 1 式を用いて、応力が極値となる角度を以下のように $\partial\sigma_\varphi/\partial\varphi=0$ より求める。

$$-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau\cos2\alpha=0\rightarrow\tan2\alpha=\frac{\tau}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}\qquad\cdots\cdots(3)$$

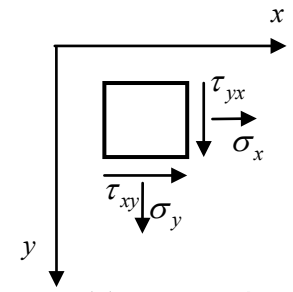
上式は角度が $2\alpha+\pi$ でも成立する。つまり、最大応力と最小応力を示す方向間の角度は 90 度ずれており、互いに直交している。上式の最大応力を示す角度 α を用いると次の関係が得られる。

$$\cos2\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}}=\frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}\qquad\cdots\cdots(4)$$

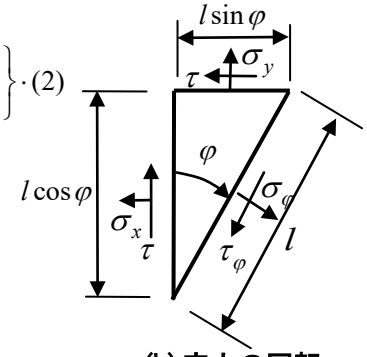
$$\sin2\alpha=\tan2\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}}=\frac{\tau}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}\frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}\qquad\cdots\cdots(5)$$

また、最小応力となる角度 $\alpha+\pi/2$ を用いると上式の右辺項には、両者共に負記号が加えられる。最大応力を σ_1、最小応力を σ_2 とし、上式を式(2)の第 1 式に代入すると最大応力と最小応力が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}+\frac{\tau^2}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}\\ \sigma_2&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2} \end{aligned}\right\}\cdot(6)$$



(a)断面内の応力



(b)応力の回転

図 1 梁断面内の応力と平面応力の回転

式(1)の上の第 1 項は、斜め面に垂直な σ_φ の x 方向分力、第 2 項は、同じく τ_φ の x 方向分力、第 3 項は長さが $l\cos\varphi$ で軸方向応力 σ_x、第 4 項は長さ $l\sin\varphi$ でせん断応力 τ の項である。

式(2)では次式を用いる。

$$\sin2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$\cos2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

このときのせん断応力τ_φは、式(4)と(5)を式(2)下に代入することで、下式のようにゼロとなる。

$$\frac{\tau_\varphi}{\cos 2\alpha}=\tau-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\tan 2\alpha=\tau-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\frac{\tau}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

この直交する 2 断面を主応力面、また、その方向の応力σ_1,σ_2を**主応力**という。その際、式(7)のようにせん断応力はゼロとなる。

次に、せん断応力が最大、最小となる角度$\varphi=\beta$を求めてみよう。条件として$\partial\tau_\varphi/\partial\varphi=0$を式(2)の下式に適用すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial\tau_\varphi}{\partial\varphi}=-\tau\sin 2\beta-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\beta=0\rightarrow \quad \tan 2\beta=-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)/2}{\tau} \quad \cdots\cdots(8)$$

この面は、先の主応力面と 45 度の角度を成し、**主せん断応力面**という。そのときの最大せん断応力をτ_1、最小せん断応力をτ_2とすると、最大せん断応力と最小せん断応力は次式となり、**主せん断応力**という。

$$\tau_1=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2};\quad \tau_2=-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2} \quad \cdots\cdots(9)$$

以上の応力関係を図示したものに、**モール(Mohr)の応力円**がある。応力円では、角度を 2 倍で測り、時計回りを正とする。応力が(σ_x,σ_y,τ)の場合、モールの応力円の中心は$(\sigma_x+\sigma_y)/2$となり、半径は式(9)のτ_1となる。逆に主応力σ_1,σ_2から一般の$\sigma_\varphi,\tau_\varphi$を求めるには、その応力は$\sigma_1$の方向から反時計回りに$2\varphi$の角度の面に存在する。

例えば、静水圧の状態$(\sigma_x=\sigma_y=\sigma,\tau=0)$では、モールの応力円の半径は 0 であり、どの方向でも主応力面となる。また、純せん断の状態$(\sigma_x=\sigma_y=0,\tau)$では、モールの応力円の中心は原点となり、半径はこのせん断応力に等しくなる。この場合の主応力大きさは、せん断応力と同じで、互いに逆向きの応力状態となる。

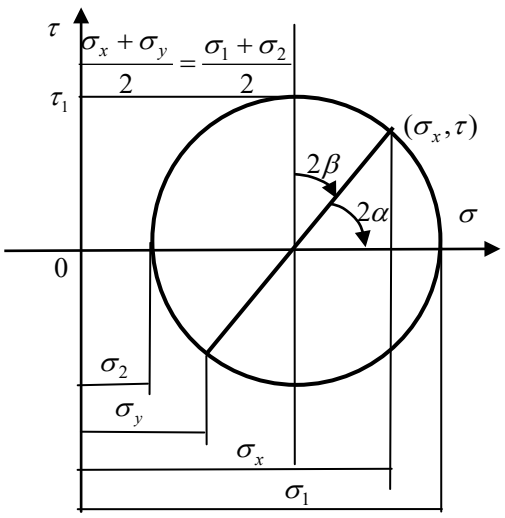
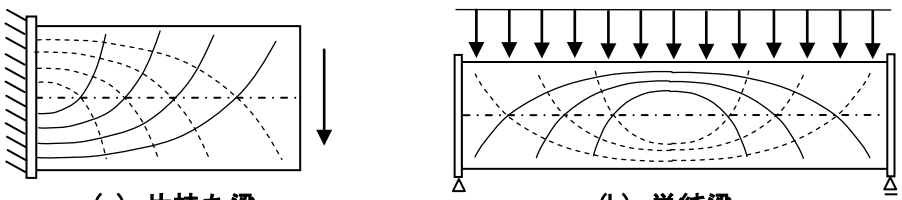


図 2 モールの応力円

平面上における主応力の 2 方向を求め、同じ主応力の方向を続けて描いた曲線を**主応力線**と呼ぶ。この主応力線の特徴として、最大応力と最小応力から描かれる曲線は互いに直交し、水平方向外力のない部材の端部、例えば、梁の上下端では、一方の主応力線は平行で他は縁に直交する。また、軸方向応力がゼロとなる中立軸上では純せん断状態となり、主応力線は中立軸に対し 45 度となっている。



(a) 片持ち梁　　**(b) 単純梁**

図 3 梁内部に生じる主応力線

断面内の応力状態は、モールの応力円を参照すると理解し易い。主応力や主せん断応力の位置がどのような関係になっているか、良く学んでおこう。

基礎１６話　断面力による力の釣合

今回は、断面力による力の釣合についてお話しする。これまで、軸力と曲げを同時に受ける部材に関する、断面内の応力と断面力についてお話しした。以下に、復習としてまとめておこう。

R13：軸力と曲げを受ける部材内の応力と断面力

１：軸力による断面内応力は一様で σ_0

２：曲げによる断面内応力は y 軸に関し一次式で σ_b

３：軸力の定義式：$N=\int_A \sigma_0 dA$

４：曲げモーメントの定義式：$M=\int_A \sigma_b y dA$

５：軸力と曲げモーメントを同時に受ける断面内応力：

$$\sigma_x=\sigma_0+\sigma_b=\frac{N}{A}+\frac{M}{I_z}y$$

６：縁応力は断面内の最大応力：

$$\sigma_t=\frac{N}{A}+\frac{M}{Z_t};\quad \sigma_c=\frac{N}{A}-\frac{M}{Z_c}$$

これまでに出てきた「軸力と曲げを同時に受ける部材内の応力と断面力の関係」及び断面性能をまとめる。構造力学における基本中の基本なので、しっかりと覚えておこう。

これまでに出てきた断面性能も以下にまとめる。

R14：断面性能とその機能

１：$A=\int_A dA$ ：断面積；　軸方向剛性に関係

２：$S_z=\int_A y dA$ ：断面一次モーメント；　図芯を求める

３：$I_z=\int_A y^2 dA$ ：断面二次モーメント；　曲げ剛性に関係

４：$Z_t=\frac{I_z}{y_t};\quad Z_c=\frac{I_z}{y_c}$ ：断面係数；　縁応力に関係

y_t と y_c は断面内で図芯位置から断面縁までの距離

ここでは、梁断面内の力の釣合について考えよう。ただし、梁内部の応力による力の釣合ではなく、断面力を用いた力の釣合である。まず、原点から x の位置にある部材の微小部分、長さ dx 間における力の釣合を、図1を参考にして考える。微少部分の両端には断面力、つまり曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$ が、また、部材上端には、分布荷重 $p_w(x)$ が加わっているものとする。曲げモーメント $M(x)$ は偶力であり、図に示した偶力を正とし、逆方向を負とする。ただし、ここでは軸力は考えない。微少部分の右端の断面力には、断面力 dM と dQ が付加されている。これは、微小長さ dx で断面力が変化するとして加えている。また、これ以後、表現が不明確とならない場合は、$M(x)$ と $Q(x)$ を M,Q とし、

略して示す。

最初に、上下方向の力の釣合を考えよう。次式が上下方向の力の釣合であり、考えている範囲が微少部分であることから、荷重は変化しないとして、$p_w(x)$ に dx を掛けた値を用いる。以上の関係より、上下方向の力の釣合は、

$$-Q+(Q+dQ)+p_w dx=0$$

となる。上式を整理し、微小長さ dx で割ると、微分形式で上下方向の釣合式が次のように得られる。これは力の釣合の第１式である。

$$\frac{dQ}{dx}=-p_w(x)$$

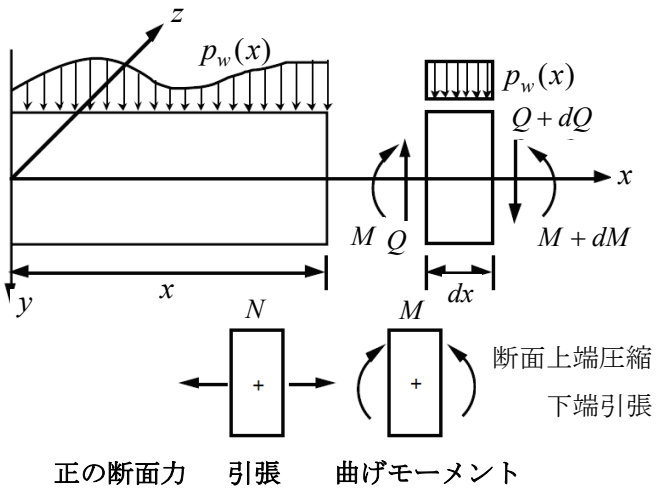


図 1 部材内の断面力による力の釣合

次にモーメントの釣合を考える。任意の位置でモーメントの釣合を考えても良いが、ここでは、モーメントの回転中心を微小部分の中心位置とする。この位置を回転中心とすると、荷重は自己釣合の状態となり、考慮しなくても良い。荷重を除いた各断面力によるモーメントの釣合は次式となる。

$$M-(M+dM)+Q\frac{dx}{2}+(Q+dQ)\frac{dx}{2}=0$$

上式を整理すると共に、他の項に比較して、より小さな値となる二次の微小項である $dQdx$ を省略し、微小長さ dx で割ると、力の釣合の第2式であるモーメントの釣合が以下のように得られる。

$$\frac{dM}{dx}=Q$$

さらに、上式の両辺を微分し、第１式を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$$

以上をまとめると、梁内の上下方向の釣合とモーメントの釣合は、次の微分方程式で表される。この釣合式が、梁内の力の釣合を表し、**この方程式だけで応力状態が決定する骨組を静的構造である**という。

R15：断面力による力の釣合

１：せん断力と鉛直荷重の関係： $\dfrac{dQ}{dx}=-p_w(x)$

２：せん断力と曲げモーメントの関係： $\dfrac{dM}{dx}=Q$

３：曲げモーメントと鉛直荷重の関係： $\dfrac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$

基礎１７話 No.1　ベルヌーイ・オイラー梁

今回は、梁理論についてお話しする。特に梁の挙動を支配する梁の微分方程式を求めてみよう。ここで説明する梁理論は、**ベルヌーイ・オイラー梁**といわれ、2 つの仮定：**平面保持の仮定と法線保持の仮定**から成り立っている。建築で使用される梁や柱は、ほぼこの仮定を満たすことになる。

弾性論における基本中の基本は、次の 2 つの関係である。

１）応力と歪の関係

２）変位と歪の関係

ベルヌーイ・オイラー梁では、上記 2 つの関係は次式で表されるように、各々1 つの式となる。

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x ; \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

応力も歪も軸方向（一般には x 方向とする）にのみ生じるとしており、下添え字 x で表す。軸方向しか考慮しないため下添え字を省いて、σ, ε と表記することもある。弾性係数 E_x も同様である。なお $v(x)$ はたわみを表す。ここでは、まず、2 つの仮定を用いて式(1)右を誘導する。

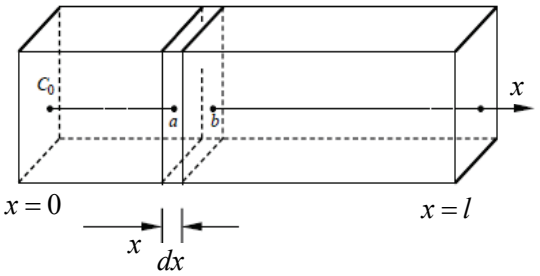


図 1 梁変形前の図芯に垂直な 2 つの平面

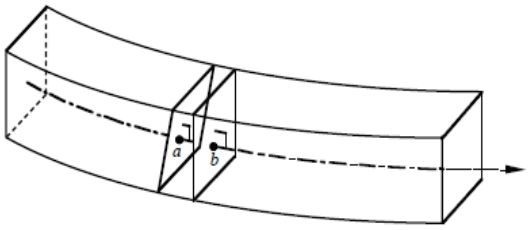


図 2 梁変形後の平面保持

梁理論の主目的は梁断面内の歪を、y 軸に関する 1 次式で表すことにある。図芯の軸方向変位の変化率は軸歪に、同じくたわみの曲率は曲げ歪に関連付けられる。このように簡単に断面内の歪が求められるのは、平面保持の仮定と法線保持の仮定による。

R16：ベルヌーイ・オイラー梁の 2 つの重要な仮定

１：平面保持の仮定

２：法線保持の仮定

図 1 は梁が変形する前を示し、そこでは、左の原点より x 及び $x+dx$ 位置に、図芯に対し垂直に、しかも平行に平面が設定されている。梁理論では、図 2 のように梁が曲がって変形しても、2 つの平面はそのまま平面を保ち、しかも、図芯に対し垂直を保つと仮定する。前者が平面保持の仮定であり、後者が法線保持の仮定である。実際に、この仮定を用いて断面内の歪を求めてみよう。

図芯のたわみを $v(x)$ で表すと、位置 x における接線勾配は、法線保持の仮定から、図 3 のように元の平面からの傾斜角 θ に等しい。

$$\frac{dv}{dx} = \theta \qquad \cdots\cdots(2)$$

断面内に生じる力を、応力あるいは応力度という。応力と応力度、この言葉の使い分けは、本によって異なる。部材内に生じる力を応力とすると、それらの集合である軸力、曲げモーメントなどを総称して断面力と呼ぶ。また、応力に対して歪と呼ぶ。
一方、応力度と呼ぶと軸力や曲げモーメント、せん断力は総称して応力と呼ぶ。また、応力度に対して歪度を用いる。

さらに、位置$x+dx$では、傾斜角は$\theta-d\theta$となる。ここでは、軸の正方向が引張となるように、増分角度を$-d\theta$とする。図４には、断面内の歪が理解し易いように、断面を少し変形して表示する。図芯からy離れた位置での両平面間の長さを求める。なお変形前の長さはdxである。

$$dx+y(\theta-d\theta)-y\theta=dx-yd\theta \qquad \cdots\cdots(3)$$

上の伸びた長さを用いると、歪の定義及び式(2)より、図芯からy離れた位置における歪は次式で与えられる。

$$\varepsilon_b(y)=\frac{dx-yd\theta-dx}{dx}=-y\frac{d\theta}{dx}=-y\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(4)$$

この歪がベルヌーイ・オイラー梁による曲げ歪となり、基礎 11 話の式(2)の曲げ歪κyに相当する。つまり、曲率κは$-d^2v/dx^2$である。

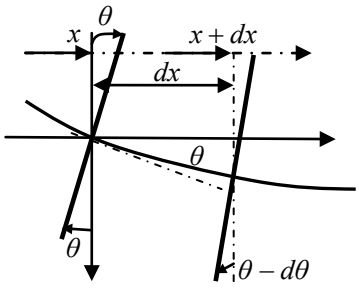


図 3 梁変形後の増分角度

式(1)左の応力と歪の関係を用いて、上式より断面内の曲げによる軸方向応力σ_bを求める。

$$\sigma_b(y)=E_x\varepsilon_b=-E_xy\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(5)$$

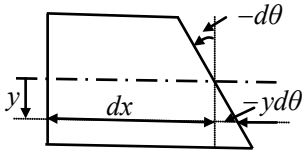


図 4 断面内の歪

上の軸方向応力によるz軸に関するモーメントを以下のように求める。これを曲げモーメントと呼ぶ。

$$M_z=\int_A y\sigma_b dA=-E_x\int_A y^2dA\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

上式右項内の積分は次のz軸に関する断面二次モーメントであり、

$$I_z=\int_A y^2dA \qquad \cdots\cdots(7)$$

これを式(6)に適用すると、梁の微分方程式が得られる。

$$M_z=-E_xI_z\frac{d^2v}{dx^2}\rightarrow\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z} \qquad \cdots\cdots(8)$$

前回お話しした断面力と外力との力の釣合と上式とで、梁の曲げ挙動を表す微分方程式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z};\quad \frac{d^2M_z}{dx^2}=-p_w(x) \qquad \cdots\cdots(9)$$

さらに、断面が部材全体一様であると、上式左を 2 回微分し、同右式を代入すると、結果、次の 4 階の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4v}{dx^4}=-\frac{1}{E_xI_z}\frac{d^2M_z}{dx^2}\rightarrow\quad E_xI_z\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x) \qquad \cdots\cdots(10)$$

梁の微分方程式は構造力学の基本中の基本である。良く覚えておこう

R17a：曲げによる梁の微分方程式

１：曲げを受ける梁の微分方程式は次の 2 式である

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z};\quad \frac{d^2M_z}{dx^2}=-p_w(x)$$

２：梁断面が部材内一様であるとき、次の微分方程式を用いても良い

$$E_xI_z\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x)$$

基礎１８話 No.2　梁の微分方程式の一般解

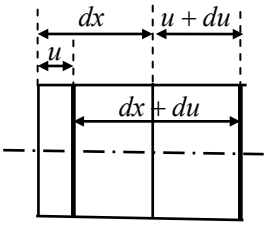


図 5 軸方向の歪

今回は、前回に続いて梁理論についてお話しする。ここでは特に軸方向の荷重による軸方向歪 ε_0 と軸方向応力 σ_0 及び軸力 N についてである。平面保持の仮定により、軸方向の荷重を受けると梁は図 5 のようになり、位置 x の平面では軸方向変位 $u(x)$ を生じ、また位置 $x+dx$ の平面では軸方向変位 $u(x)+du$ の軸方向変位を生じる。2 つの平面は変形後も平面を保ち、しかも平行のままとなる。そのため、平面内の任意の位置での変位は、図芯位置での変位に等しい。

図芯の微小長さ dx は両平面の変位によって、その伸び量は du で与えられ、結果、軸方向歪は次式で与えられる。

$$\varepsilon_o = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots(11)$$

さらに、歪を応力に変換し、断面全体で積分すると軸力 N が得られる。

$$\sigma_o = E_x\varepsilon_o = E_x\frac{du}{dx} \rightarrow \quad N(x) = E_x\int_A \varepsilon_o dA = E_x\int_A dA\frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式右の積分は断面積となるので、結果、軸力は次式となる。

$$N(x) = E_x A\frac{du}{dx} \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E_x A} \quad \leftarrow \int_A dA = A \qquad \cdots\cdots(13)$$

以上のように軸方向の微分方程式は上式となる。

R17b：軸方向の微分方程式

3：軸方向の微分方程式：

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E_x A} \quad \leftarrow \int_A dA = A$$

骨組の応力状態は曲げモーメント図、せん断力図、軸力図で表す場合が多い。そこで、前回お話しした曲げに対する梁の微分方程式と断面力に関する力の釣合式を用いて、各断面力の特徴を考えてみよう。断面力に関する力の釣合式は

$$\frac{dQ}{dx} = -p_w(x); \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) \qquad \cdots\cdots(14)$$

であり、上式を積分することによって、せん断力と曲げモーメントが以下のように得られる。

$$Q(x) = -\int p_w(x)dx + C_1; \quad M(x) = \int Q dx = -\int\int p_w(x)dxdx + C_1 x + C_2 \qquad \cdots(15)$$

このテキストでは、上式右の荷重項は、難しい関数について覚える必要はない。荷重がない場合、つまり集中荷重が加わる際の中間部と、等分布荷重となる定数項の場合、この程度を理解すれば良い。まず荷重が

ない場合、せん断力と曲げモーメントは、

$$Q(x)=C_1 \quad M(x)=C_1x+C_2 \qquad \cdots\cdots(16)$$

となる。ここで、C_1 と C_2 は積分定数で、部材両端の応力の釣合より決定される。この場合、せん断力は一定値となり、曲げモーメントは一次式、つまり直線で表される。

次に、等分布荷重 p_w について、せん断力と曲げモーメントを求めてみよう。式(15)より、両断面力は

$$Q(x)=-p_wx+C_1 \quad M(x)=-\frac{1}{2}p_wx^2+C_1x+C_2 \qquad \cdots\cdots(17)$$

となる。この場合、せん断力は直線となり、曲げモーメントは二次式、つまり放物線で表される。

次に、梁のたわみを求めてみよう。梁の微分方程式(9)の左式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{E_xI_z} \qquad \cdots\cdots(18)$$

の両辺を積分して、回転角とたわみを求める。ただし、ここでは、部材の途中で断面形状は変化しないとする。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{E_xI_z}\int M_z dx+C_3; \quad v(x)=-\frac{1}{E_xI_z}\iint M_z dxdx+C_3x+C_4 \qquad \cdots\cdots(19)$$

まず、荷重がない場合について、式(16)右を上式に適用すると、

$$\theta(x)=-\frac{1}{E_xI_z}(\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3); \quad v(x)=-\frac{1}{E_xI_z}(\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4) \quad \cdots\cdots(20)$$

となり、たわみは 3 次関数となる。次に、等分布荷重では式(17)右より、

$$\theta(x)=-\frac{1}{E_xI_z}(-\frac{1}{6}p_wx^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3); \quad v(x)=-\frac{1}{E_xI_z}(-\frac{1}{24}p_wx^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4) \quad \cdots(21)$$

となり、回転角は 3 次関数、たわみは 4 次関数となる。

梁内の釣合を示す微分方程式から種々の情報が得られる。上記のように曲げモーメントの１回微分はせん断力であり、せん断力の１回微分は荷重に負符号を付けた関数に等しい。逆に、荷重が加わっていないときは、せん断力は定数となり、曲げモーメントは直線でその傾きはせん断力の大きさに等しい。さらに、せん断力は、曲げモーメントを微分して求められることから、せん断力がゼロの位置で、曲げモーメントが極値となる。上記は非常に重要、必ず覚えておこう。

梁の微分方程式からの情報は曲げモーメント図やせん断力図を描く際、非常に有用である。良く覚えておこう。

R18：梁の微分方程式からの情報

１：次の項目を順番に覚えよう

1. 荷重　2. せん断力　3. 曲げモーメント　4. 回転角　5. たわみ

２:次の関係から、荷重関数から上記の順に、冪次数が 1 次ずつ上がる。

$$\frac{dQ}{dx}=-p_w(x); \quad \frac{dM_z}{dx}=Q(x); \quad M_z(x)=-E_xI_z\frac{d\theta}{dx}; \quad \frac{dv}{dx}=\theta(x)$$

基礎１９話　断面力と外力・反力との力の釣合

今回は、断面力と外力及び反力との力の釣合についてお話しする。ここでは、**切断法**を用いる。まず、切断法について復習しょう。切断法は、「閉曲線で囲まれた骨組に加わる荷重や反力、さらに閉曲線が切断した部材断面に加えられる仮想の力は釣り合っている」であり、この方法で釣合式を求める。また、この仮想の力と釣り合う切断した断面内の応力が求められる。この仮想の力の方向は任意で良いが、次のように考えると扱いが便利となる。つまり、仮想の力は軸方向と鉛直方向の力及びモーメントであるが、**仮定する方向は、図１及び２の中央の断面力が正となる方向が良い。**釣合から得られる仮想の力の正負がそのまま、断面力と同じとなり、断面力の正負を考える必要がない。仮想の力が即ち断面力となる。ただし、左側と右側では反対となるから注意されたい。

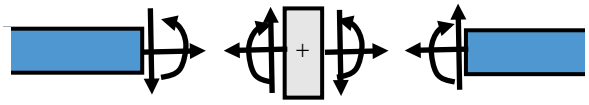
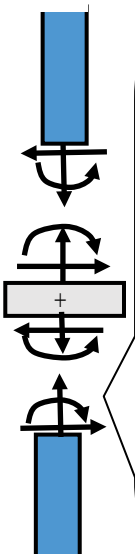


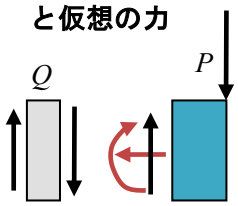
図１ 梁部材の切断と仮想の力



切断面に加える仮想の力の方向は、図１の中央の断面が正となるように仮定する。この仮定が便利なのは、解析時に良く分かる。この仮定を守ると、仮想の力と切断された位置の断面力を区別する必要がない。良く覚えておこう。

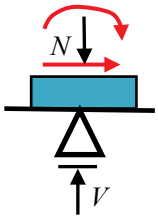
図２ 柱部材の切断と仮想の力

最初に、反力が分かっている時、この反力との力の釣合より断面力は如何なる値となるかについて考える。平面骨組における境界は、４種類**自由端、ローラー支持、ピン支持、固定支持で**あるといったが、覚えているだろうか。まず、図 3(a)に示す片持ち梁の先端に集中荷重が加わる自由端について考える。先端部分を切断法で切り取ると、荷重と仮想の力との釣合より、赤色の軸方向力とモーメントがゼロとなり、鉛直方向の力が得られる。この力は同図左のようにせん断力Qに等しくなる。つまり自由端の断面力は外力に等しく、外力がない場合は零となる。



(a) 自由端の断面力

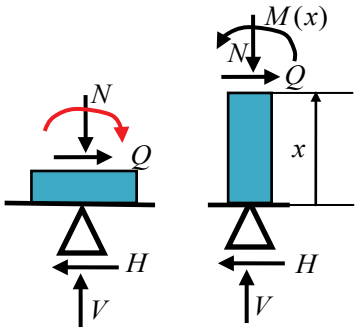
次に、ローラー支持は同図(b)に描かれているように、鉛直方向の反力に釣り合う仮想の軸方向力が得られ、断面力との釣合より軸力となる。反力の方向と軸力の正負を良く理解されたい。軸力は引張が正、圧縮は負で表す。その他の断面力はゼロとなる。



(b) ローラー支持端断面力

支持点がピン支持となると少し様子が異なる。切断面が支持点に近接すると、図(c)左のように反力との釣合より、軸力Nとせん断力Qが生じる。さらに、支持点から距離x離れた位置で切断すると、切断点を中心に以下の 3 つの力の釣合より、同図(c)右のように、仮想のモーメント$M(x)$が生じる。ただし、部材には反力のみで他の外力はなしとする。

$$N = V;\quad Q = H;\quad M(x) = Hx$$



(c) ピン支持端断面力

また、同図(d)のように部材が 90 度曲がっている場合、断面力と反力と

の釣合から断面力が次のように求められる。ここでも、モーメントの中心は切断面位置とし、仮想の力 N と Q によるモーメントはゼロとなる。

$$N = H;\quad Q = V;\quad M(x) = Vx - Hh$$

最後に固定支持であるが、モーメントの反力 M_R があり、切断面が支持点に近接すると、図(e)左のように反力との釣合より、軸力 N とせん断力 Q 及び曲げモーメント $M = M_R$ が生じる。さらに、支持点から距離 x 離れた位置で切断すると、以下の 3 つの力の釣合より、同図(e)右のように、仮想のモーメント $M(x)$ が生じる。当然、$M(x)$ はその位置の曲げモーメントに等しい。ここでも、モーメントの中心は切断面とする。

$$N = V;\quad Q = H;\quad M(x) = -M_R + Hx$$

次に、**部材と部材が剛接合**、つまり変形してもその角度を変えない接合部における断面力の釣合について考える。図 4 に示す梁と柱との接合部節点を閉曲線で囲むと、次の釣合が得られる。

$$N_B = Q_C;\quad Q_B = N_C;\quad M_B = M_C$$

接合部の節点にモーメント外力が加わらない場合、梁と柱の端部の曲げモーメントは常に等しい。また、梁のせん断力は柱の軸力となり、同じく梁の軸力は柱のせん断力となる。ただし、常にその方向に注意されたい。

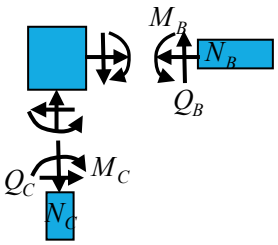


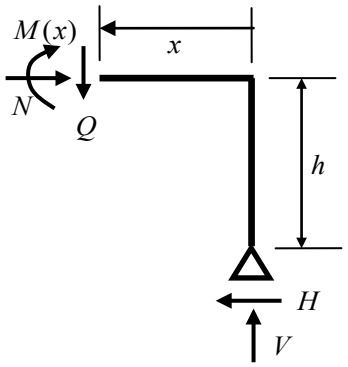
図 4 接合部の断面力

さらに、図 5 のように梁・柱が十字形で接合する場合、各断面力によって両方向の力の釣合とモーメントの釣合が得られる。つまり、x 方向では左右の梁の軸力と上下の柱のせん断力との和がゼロとなる。ここでの力の釣合は正負に気を付けて総和を取れば良い。水平方向の力の釣合も同様で、y 方向では左右の梁のせん断力と上下の柱の軸力との和がゼロとなる。最後に、モーメントの釣合では、この節点に集まる部材の全ての曲げモーメントの総和はゼロとなる。これらの知識は、後で学ぶ曲げモーメント図やせん断力図、軸力図を描く際、大いに役立つ。

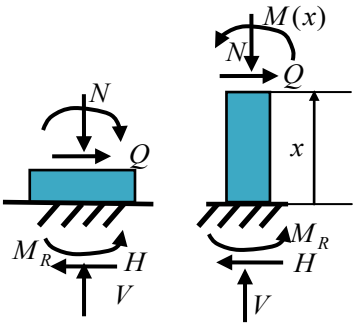
梁に集中荷重が加わる際、その直下の断面力、特に梁のせん断力を見てみよう。図 6 のように、 荷重直下を閉曲線で囲うと、荷重 P とその左の梁のせん断力 Q_L 及び右の梁のせん断力 Q_R とで、上下方向の力の釣合が得られる。無論、水平方向の力の釣合も、モーメントの釣合も得られ、結果、軸力や曲げモーメントも荷重直下で連続している。

$$P = Q_L + Q_R$$

一方、せん断力を表す関数は、集中荷重が加わる節点で上記の釣合が得られ、左右のせん断力には荷重 P の値だけ不連続となる。



(d) ピン支持端断面力その 2



(e) 固定支持端断面力

図 3 境界部断面力

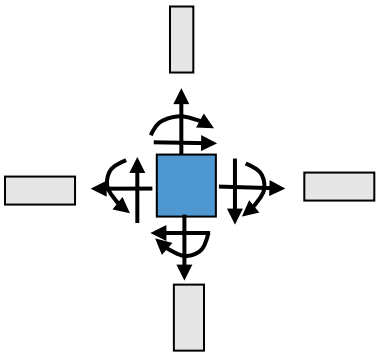


図 5 十字型接合部の断面力間での力の釣合

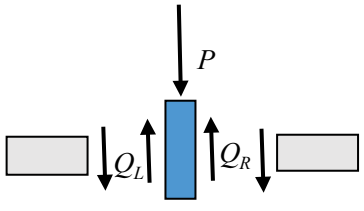


図 6 集中荷重直下のせん断力と外力の釣合

基礎２０話　梁理論をまとめる

今回は、これまで学んだ梁理論、つまり**ベルヌーイ・オイラー梁**とその周辺の理論についてまとめておこう。いずれの項目も重要なのでしっかり記憶し、理解して欲しい。梁理論をまとめる前に、梁理論で使用する座標系を常に意識すること(図 1 参照)、及び外力(荷重)と反力における力の釣合を理解しておこう。

弾性論における基本中の基本は、次の 2 つの関係である。

１：応力と歪の関係

２：変位と歪の関係

ベルヌーイ・オイラー梁では、上記 2 つの関係は次式で表されるように、各々1 つの式となる。ここでは、上記 2 つは線形関係であり、また平面問題を扱うものとする。従って、梁・柱の変位は、軸方向変位 $u(x)$ と鉛直方向変位、つまりたわみ $v(x)$ のみである。

$$\sigma_x = E_x\varepsilon_x;\quad \varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y = \frac{du}{dx} - y\frac{d^2v}{dx^2}$$

ここで σ_x は軸方向応力、ε_x は軸方向歪を表す。また ε_0 は断面内の歪の平均値であり、また κ は曲げによる曲率で、κy は曲げ歪と呼ばれる。

ベルヌーイ・オイラーによる梁理論の基本は次の 2 つの仮定であり、この 2 つの仮定によって、上式右の変位と歪の関係が得られる。

１：平面保持の仮定

２：法線保持の仮定

平面保持とは、変形前に図芯に垂直な平面が、曲げ変形を生じた後も、平面のままであること、また法線保持とは、同じく変形後も図芯に対し平面が垂直を保つことである。この 2 つの仮定によって、断面内の歪が容易に求められることになる。

断面内に生じる応力を、次の断面力を用いて表す。つまり、応力と断面力の関係は

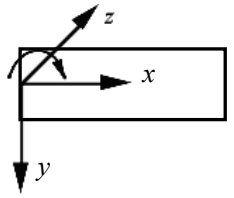
$$N = \int_A \sigma_0 dA;\quad M = \int_A \sigma_b y dA;\quad Q = \int_A \tau dA$$

であり、左より、**軸力、曲げモーメント、せん断力**という。逆に断面力から断面内の応力を求める場合は次式を用いる。

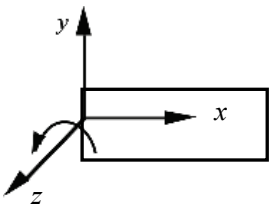
$$\sigma_x(y) = \sigma_0 + \sigma_b(y) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z}y$$

上式は、仮定した歪と同じように、y に関する一次式となっている。そのため、圧縮及

これまで学んだ梁理論に関するまとめである。構造力学における基礎中の基礎であることから、整理して覚え、理解しよう。

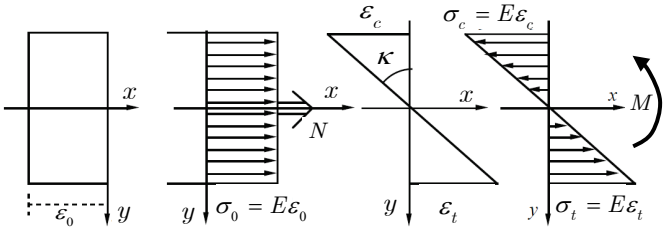


(a)　y 軸正方向を下とした座標系



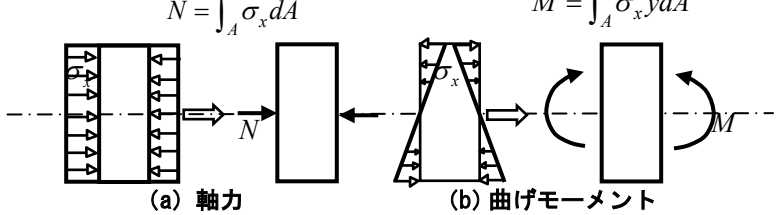
(b)　y 軸正方向を上とした座標系

図 1　$x-y$ 面を用いた梁内の座標系



(a) 引張力による応力分布　(b) 曲げによる応力分布

図 2 断面内の歪分布と応力分布



(a) 軸力　　(b) 曲げモーメント

図 3 応力分布と断面力の定義

び引張の最大応力が生じる位置は、図芯より最も遠い梁断面の縁となる。この応力を**縁応力**と呼び、次式で求める。

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t};\quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$

上で用いた A, S_z, I_z, Z_t などの断面性能は、後でまとめることにする。

断面内に曲げモーメントが生じると力の釣合より、せん断応力が発生する。断面形状によって、その分布は変化するが、おおよそ、せん断応力分布は放物線に近似する。例えば、矩形断面では、図 4 のように放物線となり、最大せん断応力は図芯位置に生じ、平均応力の 1.5 倍となる。一般の断面における最大せん断応力は次式で表す。

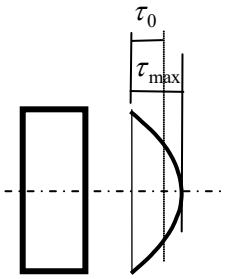


図 4 矩形断面内のせん断応力分布

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0;\quad \tau_0 = \frac{Q}{A};\quad Q = \int_A \tau dA$$

ここで、k **は断面の形状係数**と呼び、平均せん断応力と最大せん断応力の比を表す。薄肉断面で構成された断面のせん断応力は、**せん断流れ理論**により求める。非対称断面では、図芯に荷重が加わった場合、鉛直に撓むと共に断面は捩じれる。一方、**せん断中心** S に荷重が加わった場合、断面は捩じれることなく鉛直に撓む。このことを良く覚えておこう。

次に、断面の基本的な性能とその定義についてまとめる。断面積 $A = \int_A dA$ ；軸方向剛性に関係する。断面一次モーメント $S_z = \int_A ydA$ ；図芯を求める。断面二次モーメント $I_z = \int_A y^2 dA$ ；曲げ剛性に関連する。断面係数 $Z_t = I_z / y_t$ と $Z_c = I_z / y_c$ ；曲げによる縁応力を求める際、使用する。断面極二次モーメント $I_p = \int_A r^2 dA$ ；捩り剛性に関係する。

ベルヌーイ・オイラー梁理論によって、曲げを受ける梁の微分方程式は次の 2 式となる。ただし、梁断面が一様である場合は、右端の微分方程式を用いても良い。表 1 の荷重と断面力の関係を覚えておこう。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{E_x I_z};\quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -p_w(x) \rightarrow E_x I_z \frac{d^4v}{dx^4} = p_w(x)$$

表 1 荷重とせん断力、曲げモーメント及びたわみの関係

荷重の状態	荷重がない領域	等分布荷重	三角形荷重
せん断力	定数	1 次式（直線）	放物線
曲げモーメント	1 次式（直線）	放物線	3 次式
回転角	放物線	3 次式	4 次式
たわみ曲線	3 次式	4 次式	5 次式

せん断力と鉛直荷重の関係、せん断力と曲げモーメントの関係及び曲げモーメントと鉛直荷重の関係は、次式で与えられる。

$$\frac{dQ}{dx} = -p_w(x);\frac{dM}{dx} = Q(x) \rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = -p_w(x)$$

基礎２１話 No.1　断面性能の特徴
長方形断面と円形断面

今回は、梁理論で用いた断面性能についてお話しする。断面性能の定義については既に基礎 16 話でお話しした。ここではまず、次の 5 つの断面性能とその主な機能について具体的に学ぶことにしよう。

断面性能は、構造力学の知識が増えるごとに多くなる。基本的な構造の応力解析ではこの5つの断面性能が必要となる。まずは、その意味と定義を覚えよう。

R19：断面性能として、最初に次の 5 つを覚える

１：断面積 A　　：軸方向剛性
２：断面一次モーメント S_z　：図芯を求める
３：断面二次モーメント I_z　：曲げ剛性
４：断面係数 Z_c, Z_t　　：曲げによる断面内応力を求める
５：断面極二次モーメント I_p　：捩り剛性

再度、上記の断面性能の定義を復習しよう。断面性能を表す記号の下添え字で、小文字の場合は図芯位置で求めた値であり、大文字の場合は図芯以外の任意の座標系で求めた値とする。

$$\left.\begin{array}{l} 1: A=\int_A dA; \quad 2: S_z=\int_A y dA; \quad 3: I_z=\int_A y^2 dA \\ 4: Z_t=\dfrac{I_z}{y_t}; \quad Z_c=\dfrac{I_z}{y_c}: \quad 5: I_p=\int_A r^2 dA \end{array}\right\} \cdots\cdots (1)$$

断面性能を求める際、次の事項を思い出そう。大いに役立つことになる。

R20：断面性能の特徴

１：複雑な断面には重ね合わせの原理を適用する
２：断面一次モーメントを用いて図芯位置を求める

$$Y_0=\frac{S_Z}{A}; \quad Z_0=\frac{S_Y}{A}$$

３：長方形と円形の断面二次モーメントは丸暗記する

$$I_z=\frac{bD^3}{12}; \quad I_y=I_z=\frac{I_p}{2}=\frac{\pi R^4}{4}$$

４：図芯以外の断面二次モーメントは次式で求める

$$I_Z=I_z+Y_0^2 A$$

５：極二次モーメントと断面二次モーメントの関係

$$I_p=\int_A (y^2+z^2)dA=\int_A y^2 dA+\int_A z^2 dA=I_y+I_z$$

重ね合わせの原理は、複雑な断面の図芯を求めるときや、断面二次モーメントを求める際、非常に有用である。断面を足し合わせるだけでな

く、引くことも可能、後でこの機能を用いて演習を行うことにする。

まず、断面の図芯を求めてみよう。図芯の定義は、断面一次モーメントがゼロ、つまり、断面がちょうど上下・左右にバランスが取れる位置を表す。任意点 O に原点を持つ座標系 $Y-Z$ と図芯位置での座標系 $y-z$ との関係は、図1より次式で表される。

$$y = Y - Y_0; \quad z = Z - Z_0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

上式を断面一次モーメントの式(1)の第2式に代入すると次式となる。

$$S_z = \int_A (Y - Y_0)dA = \int_A YdA - Y_0 \int_A dA = S_Z - Y_0 A \qquad \cdots\cdots(3)$$

S_z が図芯位置における断面一次モーメントであることから、上式はゼロとなり次式が得られる。同様に Z 方向も次式が得られる。

$$S_z = S_Z - Y_0 A = 0 \rightarrow Y_0 = \frac{S_Z}{A}; \quad Z_0 = \frac{S_Y}{A} \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここで、S_Z は座標系 $Y-Z$ における Z 軸回りの断面一次モーメントであり、S_Y は同じく Y 軸回りの断面一次モーメントである。以上のように断面の図芯位置は、断面積と任意の位置での断面一次モーメントを求めることによって、その位置から図芯位置までの距離が得られる。

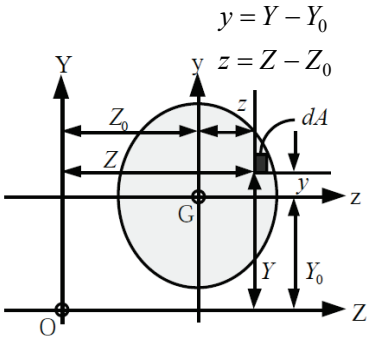


図 1 断面の図芯位置

断面二次モーメントでは、長方形断面と円形断面が多くの場合に使用され、その公式は暗記すべきである。図 2 の長方形断面の図芯は、断面の中心であり、直ぐに分かる。この図芯を座標系として断面二次モーメントは簡単な積分で、容易に求められる。まず、これを覚えよう。

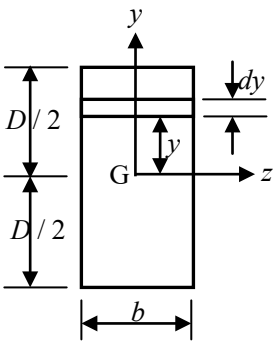


図 2 長方形断面

$$I_z = \int_{-D/2}^{D/2} by^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = b\left\{\frac{D^3}{24} + \frac{D^3}{24}\right\} = \frac{bD^3}{12} \qquad \cdots\cdots(5)$$

次に、円形の断面二次モーメントであるが、そのまま積分するのは結構面倒である。断面極二次モーメントを利用する方法が便利である。断面極二次モーメントは、図 3 を参照すると、次式のように両方向の断面二次モーメントの和で表される。

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2)dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_y + I_z \qquad \cdots\cdots(6)$$

中心位置から距離 r にある微小断面 dA は、同図を参照すると

$$dA = 2\pi r dr \qquad \cdots\cdots(7)$$

であり、上式を定義式(6)に代入すると、断面極二次モーメントは、以下のように計算される。

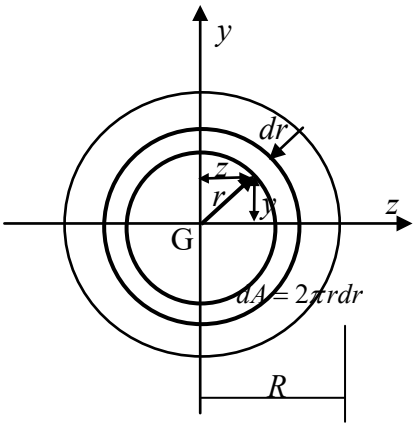


図 3 円形断面

$$I_p = \int_0^R 2\pi r \cdot r^2 dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} \qquad \cdots\cdots(8)$$

また、円形断面では、I_z と I_y は同じ値であることから、式(6)右を用いると断面二次モーメントは次式となる。

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} \qquad \cdots\cdots(9)$$

基礎２２話 No.2　重ね合わせの原理
図芯以外の断面二次モーメント

今回も、前回に続いて断面性能についてお話しする。最初に、図芯以外に座標系が設定された場合の断面二次モーメントを求め、その特性を調べる。まず、図4に示す2つの座標系を考える。座標系 $y-z$ は図芯位置に原点 G があり、また、座標系 $Y-Z$ は任意の位置に原点 O があるとする。2つの座標系の関係は次式に示される。

$$y = Y - Y_0; \quad z = Z - Z_0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

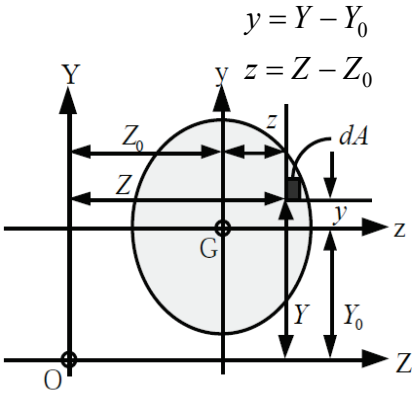


図 4 断面二次モーメントの特性

ここで、Z 軸に関する断面二次モーメントは、上式を考慮すると、以下の式となる。

$$I_Z = \int_A Y^2 dA = \int_A (y + Y_0)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2Y_0 \int_A y dA + Y_0^2 \int_A dA \qquad \cdots\cdots(11)$$

上式右辺の積分で、第１項は図芯位置での z 軸に関する断面二次モーメント I_z、第2項は同じく断面一次モーメント S_z、第3項は断面積 A を表す。図芯位置での断面一次モーメントは定義よりゼロであり、従って、任意位置における断面二次モーメント I_Z は、

$$I_Z = I_z + Y_0^2 A \qquad \cdots\cdots(12)$$

となる。上式から2つの重要な情報が得られる。一つ目は図芯位置での断面二次モーメント I_z は、他の位置での断面二次モーメント I_Z より常に小さく、つまり他の断面二次モーメントに対し最小値となる。これは、右辺の第2項が、常に正であることから分かる。二つ目は任意位置での断面二次モーメントが、式(12)より、図芯位置での断面二次モーメント I_z、断面積 A、及び任意位置から図芯位置までの距離 Y_0 によって容易に得られることである。

R21：薄肉断面の断面性能を求める手法を覚える

１：重ね合わせの原理を用いる

２：図芯以外の断面二次モーメントを利用する：　$I_Z = I_z + Y_0^2 A$

上式より、図芯位置の断面二次モーメントは最小値であることが分かる

次に、薄肉断面の断面性能を求めてみよう。定義に従って積分するのはかなり面倒なので、重ね合わせの原理を応用する。ここでは、例として鉄骨構造で使用される薄肉の角型鋼管と薄肉鋼管の断面性能を求める。図芯位置は両者共に断面の中心である。まず、薄肉の角型鋼管から始める。断面形状は、図 5 に示されており、断面の厚み t は形状に比較

して非常に薄いとする。

図5のような形状では、重ね合わせの原理より、外側の矩形断面から内側の空の矩形断面の断面性能を引くことで、角型断面の断面性能が正確に求められる。

$$A = D^2 - (D-2t)^2; \quad I = \frac{D^4}{12} - \frac{(D-2t)^4}{12} \qquad \cdots\cdots(13)$$

さらに、薄肉の場合 $D >> t$ であることから、次のような略算式が使用される。まず、上式を展開すると、

$$A = D^2 - (D-2t)^2 = D^2 - D^2 + 4t(D-t) \to 4dt \leftarrow \quad d = D-t$$

$$I = \frac{D^4}{12} - \frac{(D-2t)^4}{12} = \frac{1}{12}(D^4 - (D^4 - 8D^3t + 12D^2t^2 - \cdot\cdot)) \qquad \cdots\cdots(14)$$

となり、ここで、厚さ t の高次項を省略すると、断面二次モーメントの略算式が得られる。

$$I \simeq \frac{8D^2t(D-1.5t)}{12} \to \frac{2D^2dt}{3} \qquad \cdots\cdots(15)$$

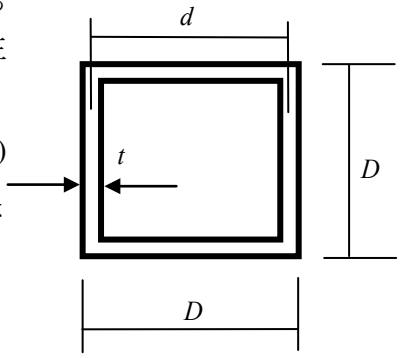


図 5 角型鋼管の断面形状

続いて、薄肉円形鋼管の場合の断面性能を求める。薄肉の角型鋼管と同様に、外側の円形断面から内側の空の円形断面の断面特性を引くことで、薄肉の円形断面の断面性能が正確に求められる。

$$A = \pi(R^2 - (R-t)^2); \quad I = \pi(\frac{R^4}{4} - \frac{(R-t)^4}{4}) \qquad \cdots\cdots(16)$$

ここでも薄肉の場合、$R >> t$ であることから、次の略算式が使用される。

$$\left.\begin{aligned} A &= \pi(R^2 - (R-t)^2) = \pi(R^2 - R^2 + 2tR - t^2) \to 2\pi Rt \\ I &= \pi(\frac{R^4}{4} - \frac{(R-t)^4}{4}) = \frac{\pi}{4}(R^4 - (R^4 - 4R^3t + 6R^2t^2 - \cdot\cdot)) \to \pi R^3 t \end{aligned}\right\} \cdot\cdot(17)$$

これまでは、長方形と円形を用いて断面性能を求めた。次に、少し複雑な形状の断面性能を求めてみよう。図6に示す三角形断面の断面二次モーメントを求める。断面の下端を Y 軸の原点にとり、図芯位置までの距離 Y_0 と断面積 A は次式で与えられる。

$$Y_0 = \frac{h}{3}; \qquad A = \frac{bh}{2} \qquad \cdots\cdots(18)$$

Z 軸に関する断面二次モーメント I_Z は、図 3 を参照すると、次式の上で与えられ、積分を実行すると、

$$I_Z = \int_0^h b(1 - \frac{Y}{h})Y^2 dY \to$$

$$I_Z = \left[b\left\{ \frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4h} \right\} \right]_0^h = b\left\{ \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} \right\} = \frac{bh^3}{12} \qquad \cdots\cdots(19)$$

上式右となり、式(12)を利用すると、図芯位置での断面二次モーメントは、以下のように与えられる。

$$I_z = I_Z - Y_0^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} \qquad \cdots\cdots(20)$$

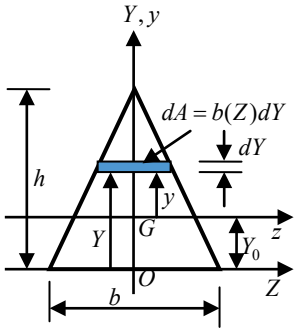


図 6 三角形断面の図芯位置

図 6 に示す三角形断面の図芯位置、点 O から G までの距離は、次式を用いて求める。

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A}; \quad Z_0 = \frac{S_Y}{A}$$

断面積は、式(18)で求められており、断面一次モーメントは

$$S_Z = \int_0^h b(1 - \frac{Y}{h})Y dY$$

$$= b\left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3h} \right]_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

となり、従って、図芯までの距離 Y_0 は次式となる。

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

基礎２３話 No.3　等辺山形　溝形　H 型 各断面の断面二次モーメント

今回も、前回に続いて断面性能についてのお話しである。ここでは、等辺山形鋼と溝型鋼の図芯を、重ね合わせの原理により求めてみよう。板の厚さは全て t とする。

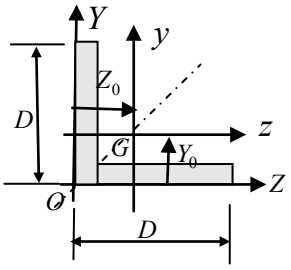


図 7 等辺山形鋼の図芯

まず、図7の原点 O の $Y-Z$ 座標系を設定する。次に、等辺山形鋼では2つの長方形断面に分け、断面積 A と断面一次モーメント S_Z を求める。

$$\left.\begin{aligned} A &= Dt + t(D-t) = 2Dt - t^2 \\ S_Z &= Dt \cdot D/2 + t(D-t)\cdot t/2 = D^2 t - t^3/2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(21)$$

図芯を求める式に上の値を代入すると、Z 軸からの距離 Y_0 が求められる。等辺であることから Z_0 は Y_0 に等しく、図芯は図7の斜線上の G にある。

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A} = \frac{D^2 t - t^3/2}{2Dt - t^2} = \frac{2D^2 - t^2}{2(2D-t)} \qquad \cdots\cdots(22)$$

次に、図8に示す溝型鋼の図芯を求める。 z 軸に対し断面は対称であることから、Y_0 は $D/2$ である。一方、Z_0 を求めるために、断面積 A と Y 軸に関する断面一次モーメント S_Y を求める。ここでは、図のように断面を3つに分割して求め、和を取る。

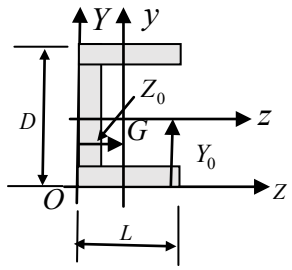


図 8 溝型鋼の図芯

$$\left.\begin{aligned} A &= t(D-2t) + 2Lt \\ S_Z &= t(D-2t)\cdot t/2 + 2Lt \cdot L/2 = (D-2t)t^2/2 + L^2 t \end{aligned}\right\} \cdots(23)$$

図芯を求める式に上の値を代入すると、距離 Z_0 が求められる。

$$Z_0 = \frac{S_Y}{A} = \frac{t(D-2t) + 2Lt}{(D-2t)t^2/2 + L^2 t} = \frac{(D-2t) + 2L}{(D-2t)t/2 + L^2} \qquad \cdots\cdots(24)$$

以上のように図芯位置が求められるが、結果を覚える必要はない。他の断面でも応用できるように、求める過程を良く理解して欲しい。

次に、長方形断面を組み合わせた断面形状の断面二次モーメントを求める。図9に示すH型断面では、2方向対称であることから図芯位置は、断面の中心にある。この図芯位置の断面二次モーメントを求めるが、ここでは2種の方法で計算する。どちらも大変有用な方法であり、他の断面でも応用可能である。良く理解して覚えて欲しい。

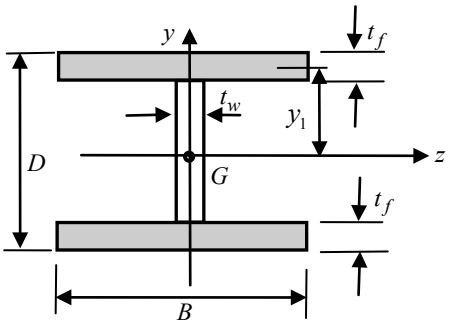


図 9 H 型断面の断面二次モーメント

H 型断面は、図中の斜線を施したフランジと白抜き部分のウェブで構成されている。この断面は主に鋼で作られ、H 型鋼などと呼ばれる。H 型鋼に関する特徴を鉄骨の教科書で調べておこう。まず、第１の方法は、断面をフランジとウェブに分割し、各々の断面二次モーメントの和より、H 形断面の

それを求める。まず、フランジ部分の z 軸に関する断面二次モーメント ${}_fI_z$ は、式(12)と図芯位置の長方形断面の断面二次モーメントが $bD^3/12$ であることから、

$$ {}_fI_z = I_z + A_f y_1^2 = \frac{Bt_f^3}{12} + Bt_f(\frac{D-t_f}{2})^2 \qquad \cdots\cdots(25) $$

ここで、H 型断面の図芯位置とフランジ部分の図芯位置までの距離 y_1 は、同図から分かるように $y_1 = (D-t_f)/2$ である。次にウェブ部分の断面二次モーメントは、長方形断面であることから、${}_wI_z = t_w(D-2t_f)^3/12$ で与えられる。従って、H 型断面の断面二次モーメントは次式となる。

$$ I_z = 2{}_fI_z + {}_wI_z = 2\left\{\frac{Bt_f^3}{12} + Bt_f(\frac{D-t_f}{2})^2\right\} + \frac{t_w(D-2t_f)^3}{12} \qquad \cdots\cdots(26) $$

ここで、重要な手法は、フランジに任意の座標系における断面二次モーメントの式(12)を適用して、断面二次モーメントを求めたことである。このような手法は他の断面でも多用されるので良く覚えておこう。

次に第 2 の方法で求める。H 型断面の断面二次モーメントは、長方形断面 BD の断面二次モーメントから、図 10 の色塗りで示した長方形断面の断面二次モーメントを引くことによって得られる。ここでは、重ね合わせの原理を適用するが、引くことによっても断面二次モーメントは適切に得られる。両長方形断面とも、図芯位置が元の H 型断面と同じであるため、単に図芯位置の断面二次モーメントを引くことで元の断面性能が得られる。

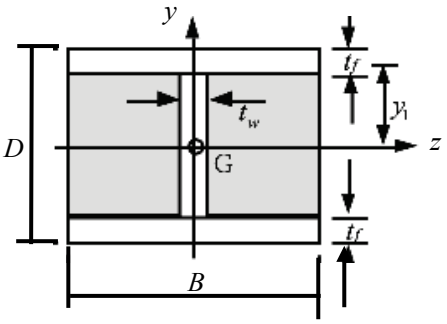


図 10 H 形断面の断面二次モーメントその 2

$$ I_z = \frac{BD^3}{12} - \frac{(B-t_w)(D-2t_f)^3}{12} \qquad \cdots\cdots(27) $$

実際に計算を行い、2 方法の結果が一致するかどうか検証してみよう。H-400x200x8x13 を用いて、具体的に式(26)と(27)が同じ値となることを確かめる。また、計算過程で式(26)の{}の第 2 項が、断面二次モーメント全体の値に対し、如何なる割合になるか、その意味を検討する。

式(26)と(27)より、H 形断面の断面二次モーメントは

$$ \left.\begin{aligned} I_z &= 2\left\{\frac{20\cdot 1.3^3}{12} + 20\cdot 1.3(\frac{40-1.3}{2})^2\right\} + \frac{0.8(40-2\cdot 1.3)^3}{12} = 2\{3.7+9735.0\} + 3487.6 = 22965.0cm^4 \\ I_z &= \frac{20\cdot 40^3}{12} - \frac{(20-0.8)(40-2\cdot 1.3)^3}{12} = 106666.7 + 83701.8 = 22964.9cm^4 \end{aligned}\right\} \cdots(28) $$

となり、両者の値は一致する。

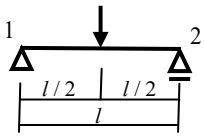
フランジ部分の断面二次モーメントは、式(26)の{}内の第二項の値より、${}_fI_z = 2\cdot 9735.0 = 19470.0$ となり、断面全体の断面二次モーメントの 85%を占める。このようにフランジ部分がこの断面の曲げ剛性に大きく影響していることが分かる。

基礎２４話 No.1 断面力の釣合による微分方程式 単純梁＋中央集中荷重

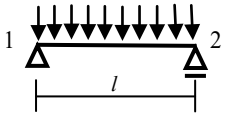
付 2 話参照
ex3_1

今回は、静定構造である図 1 の単純梁と図 2 の片持ち梁に関する 4 種の基本構造の応力解析を行い、断面力図を描く。微分方程式による静定基本構造の応力解析は基本中の基本であり、しかも、その解析手法はそれほど面倒ではない。この方法を学び、基本構造の断面力分布や断面内の応力分布を完全に理解した後、演習で応用力を身に付けることが最も大切である。

基礎16話で、断面内上下方向の釣合とモーメントの釣合は、次の微分方程式で表されることを示した。この釣合式が、梁内の力の釣合を表し、この方程式のみで応力状態が決定する構造物を静的構造と呼ぶ。断面内の力の釣合式を用いて、基本構造の応力解析を行ってみよう。

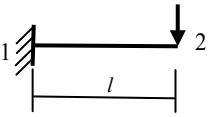


(a) 中央集中荷重

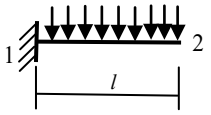


(b) 等分布荷重

図 1 単純梁



(a) 先端集中荷重



(b) 等分布荷重

図 2 片持ち梁

R22：断面力による力の釣合

１：**せん断力と鉛直荷重の関係：**　$\dfrac{dQ}{dx} = -P_w(x)$　……(1)

２：せん断力と曲げモーメントの関係：　$\dfrac{dM}{dx} = Q$　……(2)

３：曲げモーメントと鉛直荷重の関係：　$\dfrac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x)$　……(3)

解析モデルでは、梁の長さは全て l であり、集中荷重は P、等分布荷重は p_w とする。既に、全ての基礎構造の反力は求められており、これを利用して、部材内の断面力を求める。微分方程式の解法は非常に単純で、関数の積分と境界条件を適用するなど、全て同じである。なお 4 つのモデルの座標原点は全て左端の節点 1 とする。

1) 図 1(a)の単純梁で中央集中荷重　　ex3_1

集中荷重がある場合、通常の方法では微分方程式を積分できない。ここでは、2 つに分割して解を求める。図 3(b)のように節点 1 から 3 の間は荷重がない。式(3)の微分方程式は次式左となり、同式の解を求めるため、両辺を続けて 2 回積分する。座標系は図 3(a)に示される。

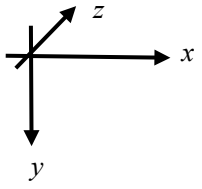


図 3(a) 座標系

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 0; \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) = C_1; \rightarrow \quad M(x) = C_1 x + C_2 \qquad \cdots(4)$$

後は、境界条件を用いて積分定数 C_1 と C_2 を求める。境界条件として、節点 1 のモーメントと上下方向の力の釣合を用いる。ピン支持ではモーメント反力がゼロであることを考慮して、式(4)の右より、節点 1 のモーメントの釣合を考える。

$$M(0) = 0 \rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad \cdots(5)$$

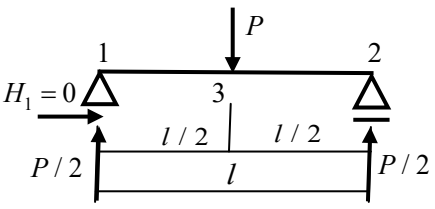


図 3(b) 単純梁＋中央集中荷重

次に、図 4 を参考にして、節点 1 における上下方向の力の釣合より、

$$-V_1 + Q(0) = 0 \quad \rightarrow Q(0) = C_1 = P/2 \qquad \cdots\cdots(6)$$

式(5)と(6)より、曲げモーメント関数とせん断力関数は

$$M(x) = Px/2 \rightarrow \quad Q(x) = P/2 \qquad \cdots\cdots(7)$$

となる。次に、節点 3 から節点 2 の間の釣合式も式(4)と同様で、その解も同じである。

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 0; \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) = C_3; \rightarrow \quad M(x) = C_3x + C_4 \qquad \cdots\cdots(8)$$

後は、右端の境界条件から積分定数を決めることになる。まず、ピン支持である節点 2 のモーメントの釣合を用いる。

$$M(l) = 0; \rightarrow C_3l + C_4 = 0 \qquad \cdots\cdots(9)$$

次に、節点 3 の上下方向の力の釣合は、節点 3 の右側のせん断力を図 5 のように仮定し、式(7)より $Q^-(l/2) = P/2$ を考慮すると、

$$P - Q^-(l/2) + Q^+(l/2) = 0 \quad \rightarrow Q^+(l/2) = C_3 = -P + P/2 = -P/2 \quad \cdots(10)$$

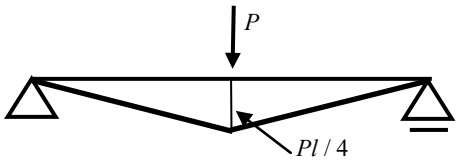
さらに、上で求めた積分定数 C_3 を式(9)に代入して、C_4 を求める。

$$-Pl/2 + C_4 = 0 \rightarrow \quad C_4 = Pl/2 \qquad \cdots\cdots(11)$$

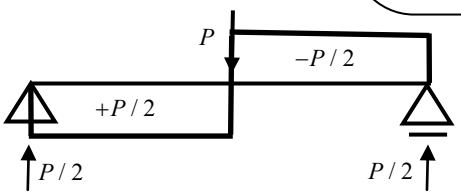
求めた積分定数を使って、曲げモーメント関数とせん断力関数が次のように得られる。

$$M(x) = -Px/2 + Pl/2; \quad Q(x) = -P/2 \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式より、曲げモーメントの最大値は $M_{\max} = M(l/2) = Pl/4$ となる。式(7)と(12)を用いて、曲げモーメント図とせん断力図を描く。



(b) 曲げモーメント図



(a) せん断力図

図 6 単純梁＋中央集中荷重の断面力図

図 6(a)の曲げモーメント図は断面の引張側に描くことがルールとなっており、ここでは、断面の下側が引張軸方向応力、上側が圧縮軸方向応力となっている。荷重直下で曲げモーメントは折れ曲がり、最大値となる。その値は反力 $P/2$ に距離 $l/2$ を掛けることで得られる。同図(b)のせん断力図は値の正負が重要であり、図の上に描くか下に描くかは、あまり意味がない。テキストによって異なることがある。

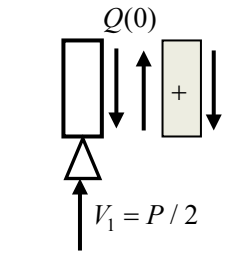


図 4 節点 1 での上下方向の釣合

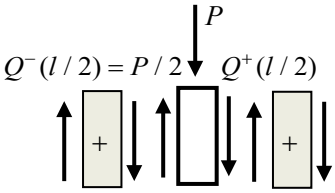


図 5 節点 3 での上下方向の釣合

集中荷重や左のせん断力図のように領域内に不連続性を有すると通常の関数では表せず、このように 2 つに分けて扱うことになる。

こ種の不連続を有する関数を超関数と呼び、滑らかな関数に似せて扱うことができる。代表的な超関数は、ディラックのデルタ関数やヘビサイドの階段関数などで、少し高度な構造力学で現れる。

曲げモーメント図は引張側に描くことがルール、また、せん断力図は、正負が重要で、図のどちら側でも良い。このテキストでは下側を正とする。

基礎２５話 No.2　単純梁＋等分布荷重
片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_2 ~ ex3_4

前回に続いて、静定構造である単純梁と片持ち梁で、残りの基本構造の応力解析を行い、断面力図を求める。

2) 図 1(b)の単純梁で等分布荷重　ex3_2

荷重が等分布荷重であることから、式(3)の微分方程式は次式となり、この微分方程式の両辺を続いて 2 回積分する。

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w;\rightarrow\quad \frac{dM}{dx}=Q(x)=-p_wx+C_1;\rightarrow\quad M(x)=-p_wx^2/2+C_1x+C_2 \qquad \cdots\cdots(13)$$

後は、境界条件を用いて積分定数 C_1 と C_2 を決める。境界条件として、節点 1 のモーメントと上下方向の力の釣合を用いる。まず、式(13)の右を用いて、ピン支持点のモーメント反力がゼロであることより、節点 1 のモーメントの釣合を考える。

$$M(0)=0\rightarrow\quad C_2=0 \qquad \cdots\cdots(14)$$

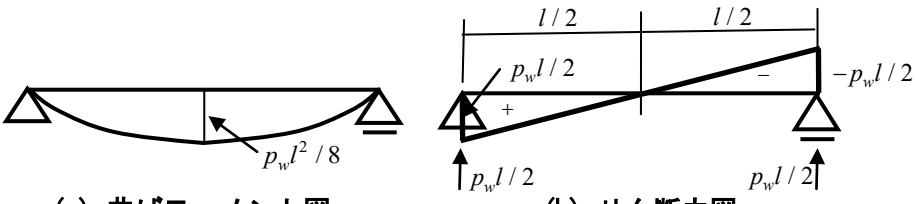
次に、図 7 を参考にして、節点 1 における上下方向の力の釣合より、

$$-V_1+Q(0)=0\quad\rightarrow Q(0)=C_1=p_wl/2\leftarrow\quad V_1=p_wl/2 \qquad \cdots\cdots(15)$$

式(14)と(15)より、曲げモーメント関数とせん断力関数は

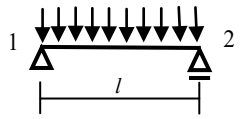
$$\left.\begin{aligned} M(x)&=-p_wx^2/2+p_wlx/2=\frac{p_wl^2}{2}(X-X^2);\quad \leftarrow X=\frac{x}{l}\\ Q(x)&=-p_wx+p_wl/2=\frac{p_wl}{2}(1-2X)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

となり、梁中央の曲げモーメントは $M(X=0.5)=p_wl^2/8$ となる。上の関数を用いて、曲げモーメント図とせん断力図を以下に描く。



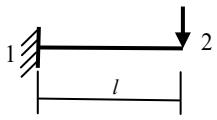
(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 8 等分布荷重を受ける単純梁の断面力分布

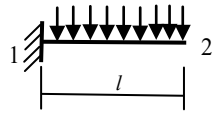


(b)等分布荷重

図 1 単純梁



(a) 先端集中荷重



(b)等分布荷重

図 2 片持ち梁

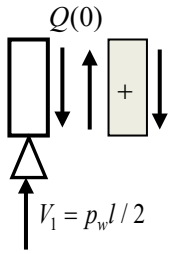


図 7 節点 1 での上下方向の釣合

3) 図 2(a)の片持ち梁で先端集中荷重　ex3_3

式(3)の微分方程式は、節点1から2まで荷重が加わっていないので、単純梁＋中央集中荷重の節点1から節点2に適用した方法と同じである。

$$\frac{d^2M}{dx^2}=0;\rightarrow\quad \frac{dM}{dx}=Q(x)=C_1;\rightarrow\quad M(x)=C_1x+C_2 \qquad \cdots\cdots(17)$$

どちらの節点で境界条件を適用しても良いが、ここでは、節点2におけるモーメントの釣合と上下方向の釣合を用いる。まず、$x=l$ では、自由

端で曲げモーメントがゼロであることから、境界条件は

$$M(l)=0 \rightarrow C_1 l + C_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

となり、また図9に示す節点2の上下方向の釣合より、同じく

$$-Q(l)+P=0 \rightarrow \quad Q(l)=C_1=P \qquad \cdots\cdots(19)$$

となる。上の値を式(18)に代入すると、$C_2=-Pl$ が得られる。求めた積分定数を式(17)に代入すると、曲げモーメント関数とせん断力関数が次のように得られる。

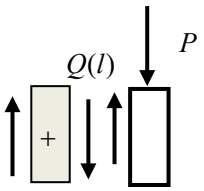
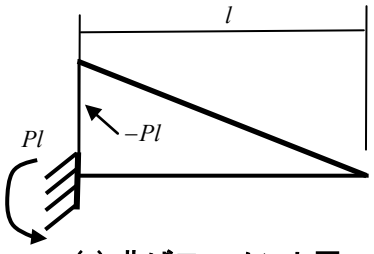


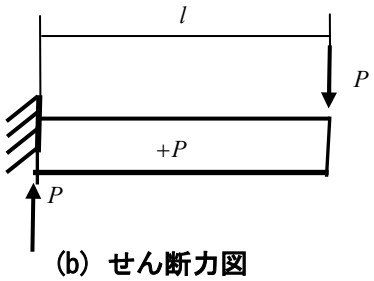
図 9 節点 2 での上下方向の釣合

$$M(x)=Px-Pl=P(x-l); \quad Q(x)=P \qquad \cdots\cdots(20)$$

上の関数を用いて、曲げモーメント図とせん断力図を描く。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 10 先端集中荷重を受ける片持ち梁の断面力分布

4) 図 2(b)の片持ち梁で等分布荷重　　ex3_4

荷重が等分布荷重であることから、式(3)の微分方程式は次式となり、両辺を続いて 2 回積分する。

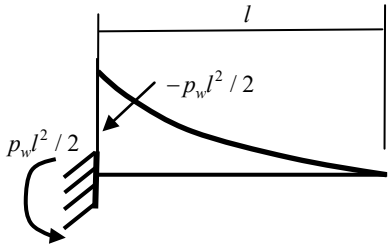
$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w; \rightarrow \quad \frac{dM}{dx}=Q(x)=-p_w x+C_1; \rightarrow \quad M(x)=-p_w x^2/2+C_1 x+C_2 \qquad \cdots(21)$$

境界条件として、節点2のモーメントと上下方向の力の釣合を用いる。

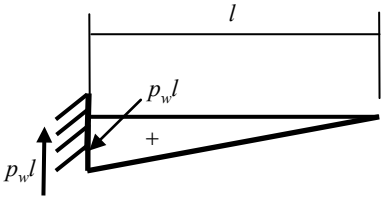
$$\left.\begin{aligned} &M(l)=0 \rightarrow \quad -p_w l^2/2+C_1 l+C_2=0 \\ &Q(l)=0 \rightarrow -p_w l+C_1=0 \rightarrow \quad C_1=p_w l \end{aligned}\right\} \cdots(22)$$

上式より、$C_2=-p_w l^2/2$ が得られ、決定した積分定数を式(21)に代入すれば、曲げモーメント関数とせん断力関数が次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} &M(x)=p_w(-x^2/2+lx-l^2/2)=\frac{p_w l^2}{2}(-X^2+2X-1); \leftarrow X=x/l \\ &Q(x)=p_w(-x+l)=p_w l(-X+1) \end{aligned}\right\} \cdot\cdot(23)$$



(a) 曲げモーメント図



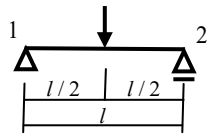
(b) せん断力図

図 11 等分布荷重を受ける片持ち梁の断面力分布

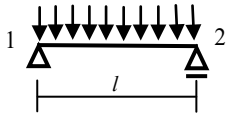
基礎２６話 No.1　単純梁＋中央集中荷重

付 2 話参照
ex3_1; ex3_2

応力解析の目的の一つに、荷重を受ける構造物で、断面内に生じる応力や変位を求めること、特に最大値を知ることにある。解析結果を効率的に分析するには、構造形状に曲げモーメント、せん断力、軸力を重ね合わせた各分布図を利用する。まずは各断面力図の見方あるいは描き方を十分に理解し、修得しておこう。ここでは、最も基礎となる静定で基本構造となる単純梁と片持ち梁に対し、前回とは異なった方法で応力解析を行い、各断面力図を求める。最後に、ここで求めた曲げモーメント図、せん断力図、軸力図の特性をまとめ、描き方のルールを学ぶ。



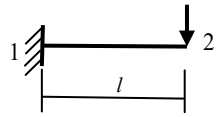
(a) 中央集中荷重



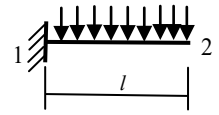
(b) 等分布荷重

図 1 単純梁

断面内の応力は、各断面力から容易に求めることができる。軸力 N による軸方向応力の分布は一様であり、また曲げモーメント M による軸方向応力は一次式で表されるため、断面の縁で最大となり、ゼロとなる位置もある。応力がゼロとなる位置を**中立軸**と呼び、最大となる縁の応力を**縁応力**と呼ぶ。また、せん断応力分布は放物線に近い形状で、中央の図芯位置で最大、縁ではゼロとなる。ただし、断面形状によって多少異なる。次式が、断面力から断面内の最大軸方向応力とせん断応力を求める重要な式である。良く覚えておこう。ここで、Z_t, Z_c は断面係数、k は断面の形状係数を表す。



(a) 先端集中荷重



(b) 等分布荷重

図 2 片持ち梁

R23：断面力から断面内の最大応力を求める

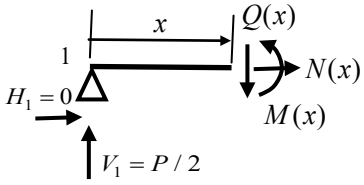
１：軸方向応力

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$

２：せん断応力

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A}; \quad Q = \int_A \tau dA$$

前回では 4 種の静定基本構造について微分方程式を用いて応力解析を行い、曲げモーメント図とせん断力図を描いた。ここでは、同じ静的基本構造を**切断法**により応力解析を行う。こちらの手法の方が圧倒的に便利であり、是非、理解し使いこなして欲しい。梁の長さは全て l であり、集中荷重は P、等分布荷重は p_w とする。



(a) 梁中央より左側で切断

1) 図 1(a)の単純梁で中央集中荷重　　ex3_1

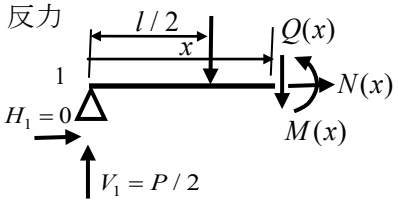
図 3(a)のように梁中央より左側の位置 x で断面を切断し、節点 1 を含めて閉曲線で囲う。この閉曲線内部の外力・反力と切断した断面に仮想の力を加えて釣合を求めると、次の 3 つの釣合式が得られる。

1） x 方向の釣合： $H_1 + N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 0$

2） y 方向の釣合： $Q(x) - V_1 = 0 \rightarrow Q(x) = P/2$

3）位置 x を中心とするモーメントの釣合： $V_1 x - M(x) = 0 \rightarrow M(x) = Px/2$

同じく、梁中央より右側の位置 x で断面を切断し、図 3(b) の外力・反力と断面力との釣合を求める。



(b) 梁中央より右側で切断

1） x 方向の釣合： $H_1 + N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 0$

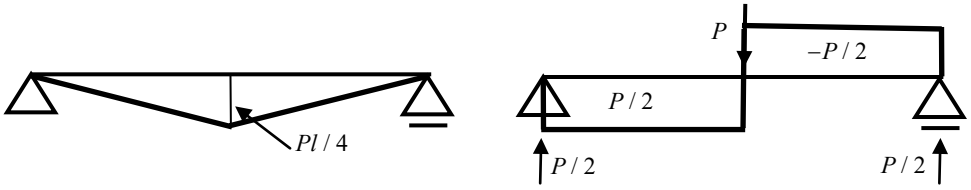
2） y 方向の釣合： $Q(x) + P - V_1 = 0 \rightarrow Q(x) = -P/2$

3）切断位置 x 点を中心とするモーメントの釣合：

$V_1 x - M(x) - P(x - l/2) = 0 \rightarrow M(x) = P(l - x)/2$

得られた釣合式を元に、各断面力分布を描く。

図 3 切断法による解析
中央集中荷重＋単純梁



(b) 曲げモーメント図　　(a) せん断力図

図 4 単純梁＋集中荷重の断面力図

以下に断面力図の特徴を示す。図 4 の曲げモーメント図は、断面の引張側に書くことがルールであり、同図より断面の下側が引張軸方向応力、上側が圧縮軸方向応力となる。荷重直下で曲げモーメントは折れ曲がり、最大値となる。その値は反力 $P/2$ に距離 $l/2$ を掛けることで得られる。同図(b)のせん断力図は、値の正負が重要であり、図の上に描くか下に描くかはあまり意味がない。テキストによって異なることがある。これらについては後でまとめて学ぶ。ここでは省かれているが軸力図も同様で、値の正負が重要、正は引張軸力を、負は圧縮軸力を表す。この図も、図芯のどちらに描くかは重要でないし、テキストによって異なることがある。

2) 図 1(b)の単純梁で等分布荷重　　ex3_2

このモデルも既に反力は求められている。まず位置 x で断面を切断し、図 5 のように節点 1 を含めて閉曲線で囲い、以下のように釣合式を求める。ただし x 方向の釣合は反力がゼロであることから省く。分布荷重の合力である仮想集中荷重は $\bar{P} = p_w x$ となる。以下の番号は前記に従う。

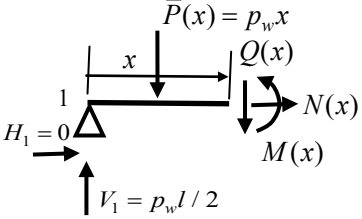


図 5 等分布荷重を受ける
単純梁の釣合

2） y 方向の釣合： $Q(x) - V_1 + \bar{P} = 0 \rightarrow \quad Q(x) = p_w(l/2 - x)$

3） x 点を中心とするモーメントの釣合：

$V_1 x - M(x) - \bar{P}x/2 = 0 \rightarrow \quad M(x) = p_w lx/2 - p_w x^2/2 = p_w x(l - x)/2$

後は、次回お話しする。

基礎２７話 No.2　単純梁＋等分布荷重
片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_3; ex3_4

今回は、前回の話の続きと共に、断面力分布を描くためのルールをまとめる。ここでは、切断法を用いて応力解析を行う。

まずは前回の復習になるが、図 6 を参考に釣合式を以下に示す。切り取った領域の分布荷重の仮想集中荷重は $\bar{P} = p_w x$ となる。また、x 方向の釣合は、水平方向反力・外力共にゼロなのでここでは省く。

２） y 方向の釣合： $Q(x) - V_1 + \bar{P} = 0 \rightarrow \quad Q(x) = p_w(l-x)/2$

３）切断点 x を中心とするモーメントの釣合：

$$V_1 x - M(x) - \bar{P}x/2 = 0 \rightarrow \quad M(x) = p_w lx/2 - p_w x^2/2 = p_w x(l-x)/2$$

上式より、梁中央の最大曲げモーメントは、$p_w l^2/8$ となる。以上の解析結果より、曲げモーメント図とせん断力図を描いてみよう。

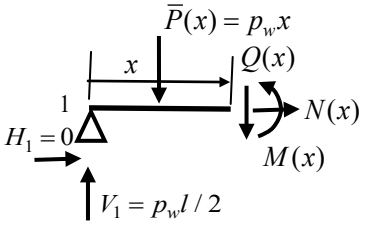
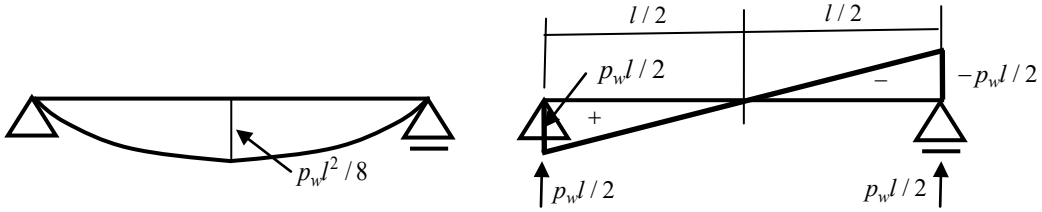


図 6 等分布荷重を受ける単純梁の釣合



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

図 7 等分布荷重を受ける単純梁の断面力分布

3) 図 2(a)の片持ち梁で先端集中荷重　　ex3_3

切断法の閉曲線で、節点1あるいは節点2を囲む領域が考えられるが、後者による切断法が多少容易なのでこちらを選択する。図8は、節点2を含む閉曲線で、外力と切断面の仮想力との釣合を示す。座標がこれまでと反対となっていることに注意して、以下に釣合式を求める。無論、水平方向反力がゼロであることから、軸力はゼロである。

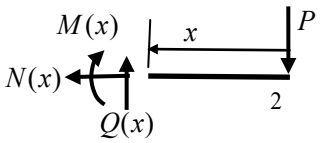
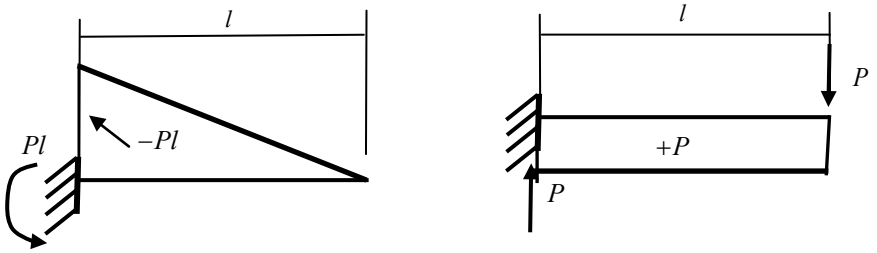


図 8 先端集中荷重を受ける片持ち梁の釣合

２） y 方向の釣合： $P - Q(x) = 0 \rightarrow Q(x) = P$

３）切断点 x を中心とするモーメントの釣合： $Px + M(x) = 0 \rightarrow M(x) = -Px \rightarrow \quad M_{\max}(l) = -Pl$

以上の解析結果から、断面力図を以下に示す。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

図 9 先端集中荷重を受ける片持ち梁の断面力分布

4) 図 2(b)の片持ち梁で等分布荷重　　ex3_4

前例に従って切断法を用いる。図10は節点2を含む閉曲線で外力と切断面の仮想力の関係を、また以下に釣合式を示す。分布荷重の仮想集中荷重は $\bar{P} = p_w x$ となる。解析結果より、図11に断面力図を示す。

２） y 方向の釣合： $\bar{P} - Q(x) = 0 \rightarrow Q(x) = p_w x \rightarrow Q_{\max}(l) = p_w l$

３）切断点 x を中心とするモーメントの釣合：

$$\bar{P}x/2 + M(x) = 0 \rightarrow M(x) = -p_w x^2/2 \rightarrow \quad M_{\max}(l) = -p_w l^2/2$$

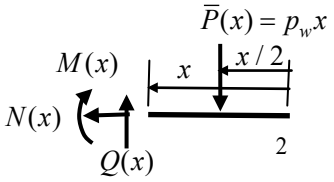
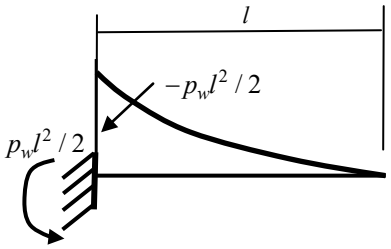
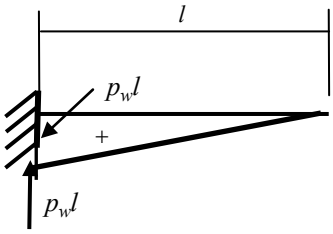


図 10 先端集中荷重を受ける片持ち梁の釣合



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 11 等分布荷重を受ける片持ち梁の断面力分布

静定の基本構造となる単純梁と片持ち梁に、集中荷重と等分布荷重が加わる場合について、切断法による応力解析を行い、断面力である曲げモーメント図とせん断力図を求めた。この4種の図は非常に重要であり、多くの情報が含まれている。完全に覚え、応用することができれば、より複雑な静定構造物の応力解析が行えることになる。

以下に、3種の断面力図を描く際、重要なルールをまとめる。まず、このルールを理解し、覚えることにしよう。

R24：断面力図を描くためのルール

１：曲げモーメント図

A:曲げモーメントは断面の引張側に描く→ 値の正負は重要でない

B:集中荷重直下では、曲げモーメントは折れ曲がる

C:接合部では曲げモーメントの和は常にゼロである

２：せん断応力図

A:せん断力は値と正負が重要である→ 図芯のどちら側に描くかは重要でない

B:集中荷重直下では、荷重の大きさの不連続が生じる

C:せん断力の値は曲げモーメントの接線勾配に等しい

３：軸力図

A: 軸力は値と正負が重要である→ 図芯のどちら側に描くかは重要でない

B:値が正の場合、軸力は引張、負の場合は圧縮を意味する

基礎２８話 No.3　単純支持門型ラーメン＋対称荷重と逆対称荷重

付 3 話参照
ex4_1; ex4_2

今回は基本構造である単純梁の拡張として、門型ラーメンを切断法により応力解析し、断面力図を描いてみよう。 数回前に、既に門型ラーメンに関する反力は求めている。これを利用して応力解析を行い、基本的な断面力図を求める。まずは、断面力図に関する描き方の基本的な手順を示そう。

R25：静定構造の応力解析手順

１：断面力図は基本的に曲げモーメント図、せん断力図、軸力図の順に求める
A:静定構造では、外力と反力による力の釣合から、まず反力を求める
B:次に曲げモーメント分布を求め、その傾きからせん断力分布を求める
C:支持点や接合部での力の釣合から軸力分布を求める
２：支持点の反力及び自由節点の荷重と、断面力の関係を覚えておく
A 反力及び荷重より、支持点や集中荷重直下など、その節点に接続する部材の断面力は容易に求められる
３：曲げモーメント分布は分かるところから決めていく
A: 支持点から繋がる部材の曲げモーメント分布は分かり易い
B:梁と柱の接合部での曲げモーメント分布を理解し、覚えておく

図 12 は単純梁の拡張型である門型ラーメンである。支持条件が単純梁と同じであり、静定構造である。この門型ラーメンは基本構造に準ずる構造で、荷重状態は図 12 の対称荷重と図 14 の逆対称荷重がある。

5) 図 11 の梁中央鉛直方向荷重を受ける門型ラーメン(対称荷重)　　ex4_1

曲げモーメントは、骨組の節点間毎に求める。まず、支持点に取り付いた節点 1-3 間と節点 2-4 間の曲げモーメントを決定する。次に、節点 4-5 間と節点 3-5 間の曲げモーメントを求め、両者の節点 5 における曲げモーメントが同一となるかを確認すると良い。

ローラー支持点 2 では水平反力がないため、節点 2-4 間の曲げモーメントはゼロである。同様に、節点 1-3 間も水平反力 H_1 がゼロであるため、やはり、この間の曲げモーメントもゼロとなる。次に、節点 4-5 間の曲げモーメント分布は、荷重が加わっていないことから直線となり、節点 5 における曲げモーメントは、

$$M_{5R} = V_2 l / 2 = P_V l / 4$$

であり、節点 4 では柱とのモーメントの釣合よりゼロとなる。**曲げモーメントは反力点より遠ざかるに従って、反力の矢印のしっぽ方向に向って増加するため**、図 13(b) となる。節点間 3-5 も同様で、節点 5 におけ

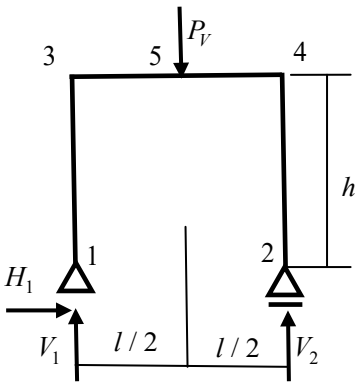
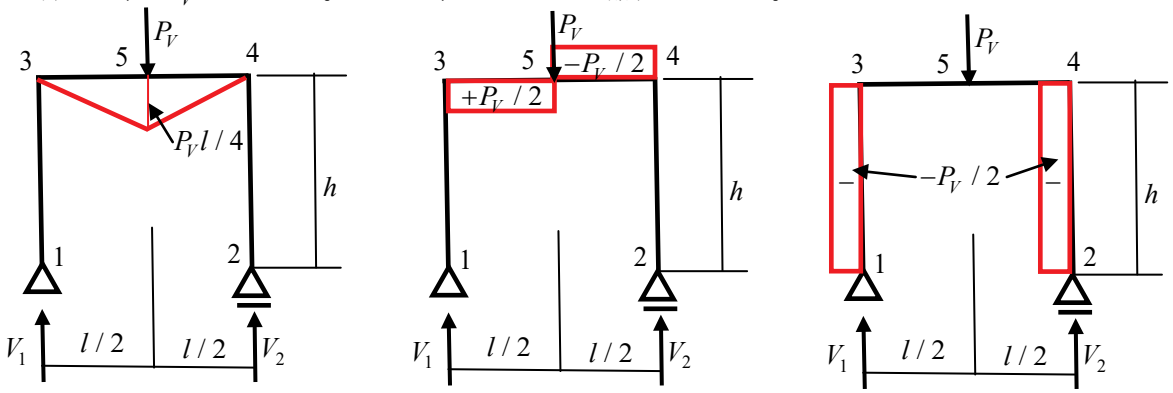


図 12 梁中央鉛直集中荷重を受ける門型ラーメン

$H_1 = 0;$
$V_1 = P_V / 2; \quad V_2 = P_V / 2$

る曲げモーメント M_{5L} も、$V_1 l/2 = P_V l/4$ となり、同一となる。せん断力は曲げモーメントが生じている部材に発生し、その値は曲げモーメントの傾きで、符号は曲げモーメントの傾き方向によって求められる。つまり、**右下がりが正、同じく右上がりが負**となる。軸力は節点 3-4 間では水平反力がないためゼロ、また、節点 1-3 間及び 2-4 間では、反力との釣合より、$-P_V/2$ となる。つまり、ここでは圧縮軸力となる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 13 梁中央鉛直集中荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

6) 図 13 の水平荷重を受ける門型ラーメン(逆対称荷重)　　ex4_2

節点 2-4 間では節点 2 で水平反力がなく、曲げモーメントはなし。節点 4 での曲げモーメントもゼロとなる。節点 1 ではモーメントの反力がなく、曲げモーメントもゼロ、節点 1-3 間の曲げモーメント分布は水平反力の尻尾に向って直線となる。節点 3 の曲げモーメントは $M_3 = P_H h$ であり、節点 3 でのモーメントの釣合より、部材 3-4 における節点 3 の曲げモーメントも $P_H h$ となる。以上の情報より、図 15(a) のように曲げモーメント図が得られる。せん断力図は、曲げモーメントが傾きを持つ部材に生じるため、節点 1-3 間で値が P_H、右下がりで正、3-4 間部材で $P_H h/l$、右上がりで負となる。軸力分布は、節点 4 の水平方向の力の釣合より、節点 3-4 間ではゼロ、また、節点 1 と 2 では上下方向反力より、値は $P_H h/l$、節点 1-3 間では引張、節点 2-4 間では圧縮となる。

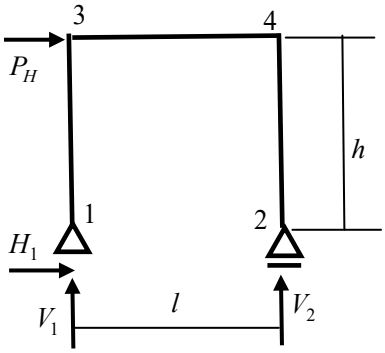
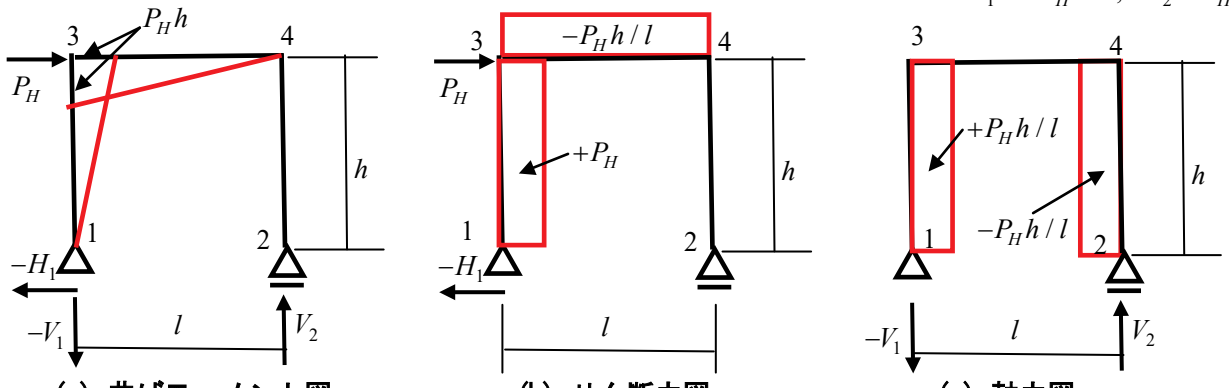


図 14 柱頭水平荷重を受ける門型ラーメン

$H_1 = -P_H$

$V_1 = -P_H h/l; \quad V_2 = P_H h/l$



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 15 柱頭水平荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

基礎２９話 No.1　曲げモーメント図

数回に渡って、静定構造物の基本中の基本である単純梁と片持ち梁の応力解析を切断法で行い、結果として断面力分布である曲げモーメント図、せん断力図を求めた。さらに、断面力図を描くための規則をまとめたが、ここでは、それらについて少し説明すると共に、覚えておくと便利なルールを追加する。

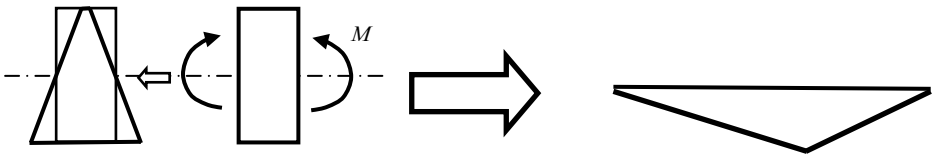
最初に、以下のことを覚えておこう。一般的に断面力図は曲げモーメント図から描き、せん断力図、軸力図と描き進めると良い。次に、断面力と外力との力の釣合より、外力・せん断力・曲げモーメントには関連があることを覚えておこう。**例えば、外力がない部材ではせん断力は定数、曲げモーメントは直線で表される。また、外力が定数、つまり、等分布荷重では、せん断力は直線、曲げモーメントは放物線で表される。**このように外力が多項式で表される場合、せん断力と曲げモーメントの次数が一次ずつ増加した関数となる。以下に、各断面力図を描くためのルールを説明する。

R26：曲げモーメント図の描き方

１：曲げモーメント図

A: 曲げモーメントは断面の引張側に描く

曲げモーメント図は骨組形状に重ね合わせて描くが、曲げモーメントの大きさはグラフの大きさで表す。そのグラフでは図芯軸のどちら側に描くかが重要である。例えば、図１のように曲げモーメントが微小断面に加わっているとすると、断面は図１左のように変形する。その際、曲げモーメント図は下側、つまり引張側に描く。この規則に従えば、曲げモーメント図を見ただけで、断面のどちら側が引張応力となるかが分かる。この情報は、RC 構造断面内の鉄筋配置の際、役に立つ。このことからも、曲げモーメントを部材のどちら側に描くかが重要となる。特に注意して、曲げモーメント図を描くようにしよう。



(a) 曲げモーメントによる断面の変形形状　　(b) 曲げモーメント図

図１　曲げモーメント図は引張側に描く

B:集中荷重直下では、曲げモーメントは折れ曲がる

曲げモーメントは一般には直線、もしくは滑らかな関数となる。つまり、その関数には微分が存在する。ただ、集中荷重直下では、曲げモー

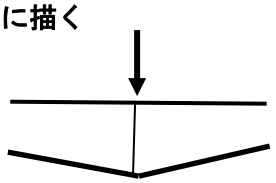


図２ 集中荷重直下では曲げモーメント図は折れ曲がる

メント図は折れ曲がり、微分値が存在しない。そのため曲げモーメントの微分であるせん断力は、その点では不連続となる。

C:任意点において、モーメント荷重がない場合、曲げモーメントの和は常にゼロである

部材の任意点、特に梁と柱の接合部では、モーメント荷重がない場合、曲げモーメントの和はゼロであり、モーメントの釣合が取れている。例えば、柱と梁の接合部では、図3のように部材内の曲げモーメントによってモーメントは釣合う。この場合、梁と柱の曲げモーメントの図形は、必ず図3に示す2つの形のどちらかとなる。同図右側の曲げモーメントは、節点におけるモーメントの釣合を示す。

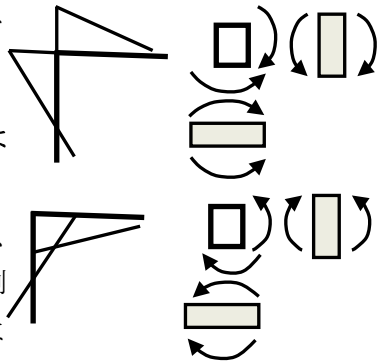


図 3 モーメント荷重なしの梁と柱の接合部の曲げモーメント図

図4のようにモーメント荷重が接合部に加わる場合、モーメント外力と柱・梁の曲げモーメントとの和はゼロなり、節点でのモーメントの釣合が得られる。

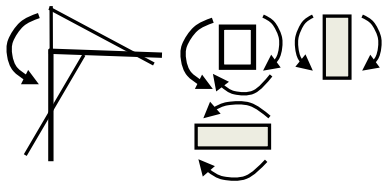


図 4 モーメント荷重ありの梁と柱の接合部の曲げモーメント図

D:支持部での曲げモーメントは部材に直交する反力から計算可能、曲げモーメント図は反力ベクトル矢印の尻尾側に、支持点から離れるに従って増加する（ここでは簡易型切断法と呼ぶ）

3つの支持部の部材曲げモーメントは、図5のように部材に直交する反力によって容易に計算できる。まず、同図左のローラー支持では水平反力がないため、曲モーメントは生じない。ピン接合では、曲げモーメントは**距離×水平反力**で求められる。**ピン支持部では曲げモーメントはゼロで、x が増加するに従って直線的に水平反力のベクトル矢印の尻尾方向に向って増加する。**固定支持では、モーメント反力と釣合う曲げモーメントが発生するが、それ以外はピン支持と同じである。支持部より位置 x の曲げモーメント $M(x)$ は、固定支持部を中心に閉曲線で囲い、切断点 x (図6の節点2) でのモーメントの釣合から以下のように求められる。ある程度固定部より離れると、図6のように引張側は断面右側となる。

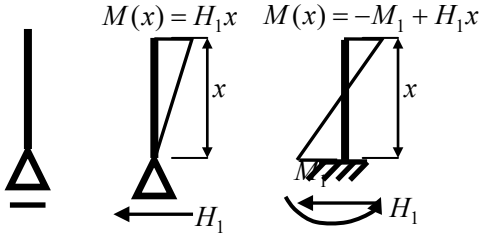


図 5 支持部の部材の曲げモーメント

$$-M(x)-M_1+H_1x=0 \rightarrow M(x)=-M_1+H_1x$$

E:骨組に取り付いた片持ち梁は骨組の応力状態に影響を受けず、常に片持ち梁の曲げモーメント分布となる

図7のように、骨組の先に取り付いた片持ち梁は、骨組の応力状態に影響を受けず、常に片持ち梁の曲げモーメント分布を示す。骨組が不静定構造であっても同じであり、片持ち梁の応力状態を先に求めることができる。

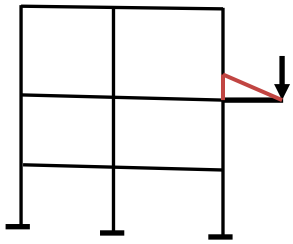


図 7 骨組に取り付いた片持ち梁の曲げモーメント

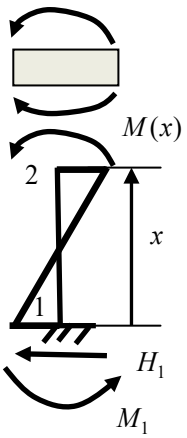


図 6 切断法で固定支持部の曲げモーメント分布を求める

基礎３０話 No.2　せん断力図と軸力図

前回に続いて断面力分布を描くためのルールを学ぶ。ここでは、せん断力図と軸力図についてであり、覚えてほしい基本的な規則を述べる。

R27：せん断力図と軸力図の描き方

２：せん断力図

A:せん断力は値と正負が重要である

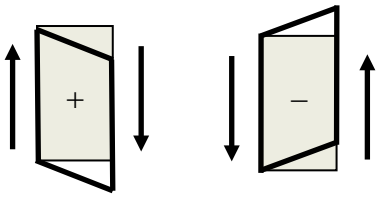
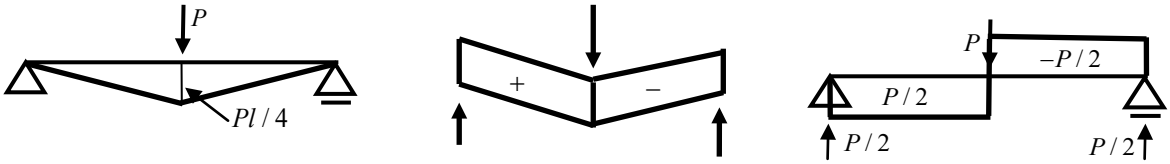


図 8 せん断力の正負の定義

せん断力の正負は重要で、正は図 8 のように時計回りの方向にせん断力が、負は反対回りのせん断力が働く。せん断応力の 45 度の方向には、引張応力と圧縮応力が発生するが、図 8 のように、せん断力の正負によって逆方向に引っ張り応力が生じる。梁が曲がると図 9(a)のように曲げモーメントが発生し、曲げモーメントが描かれている断面側の縁に最大引張応力が生じる。同様に、曲げモーメント分布の傾きがせん断力となるため、そのせん断力によって、前記のように 45 度方向に引張応力が発生する。ベルヌーイ・オイラー梁理論ではせん断変形は無視されているが、感覚的には同図(b)の太線のようなせん断変形を生じることを覚えておこう。

せん断力の正負が分からない場合は、図 9(a)の基本構造の曲げモーメント分布を思い出すと良い。同図(a)と(c)を同時に思い出し、**曲げモーメント図が右下がりではせん断力は正、右上がりでは負となる。特にせん断力が正あるいは負で、せん断力の方向を忘れたときは、図(b)のようにせん断変形状態を想像すると良い。分布荷重下では、図 10 の材端断面中央で斜めに最大引張応力が発生する。この引張応力によって、RC 構造では 45 度方向に亀裂(赤色表示)が入ることが分かる。**



(a) 曲げモーメント図　　(b)せん変形概念図　　(c) せん断力図

図 9 単純梁＋中央集中荷重の断面力図

B: せん断力の値は、曲げモーメントの接線勾配に等しい

曲げモーメントとせん断力の関係 $dM/dx = Q$ より、せん断力の大きさは、曲げモーメントの接線勾配に等しい。このことを良く覚えておこう。曲げモーメント図を正確に描くことができれば、せん断力図も描くことができる。曲げモーメント図が直線であれば、せん断力図は定数、同じく放物線であれば直線となる。せん断力の大きさは曲げモーメントの接線勾配の大きさに比例し、正負は傾きの角度に関連する。曲げモーメント図が右下がりの場合、せん断力は正、右上がりの場合は負である

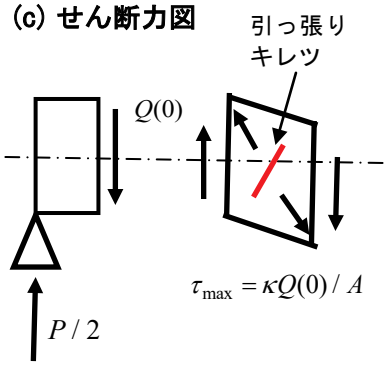
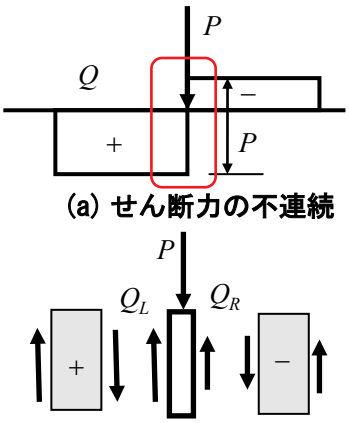


図 10 図芯位置のせん断応力と 45 度方向に生じる引張応力

ことを覚えておこう。

C: 集中荷重直下では、荷重と同じ大きさの不連続が生じる

集中荷重が作用すると、図11(a)のように荷重直下で、せん断力はその荷重と同じ大きさの不連続を生じる。同図(b)は、荷重直下を閉曲線で囲み、外力と断面力との力の釣合を表す。このように集中荷重とせん断力によって上下方向の力の釣合が取れている。つまり、集中荷重があると、せん断力分布では荷重直下で不連続となり、曲げモーメントは折れ曲がることになる。



(a) せん断力の不連続

(b) 荷重直下の力の釣合

図 11 集中荷重による
せん断力の不連続

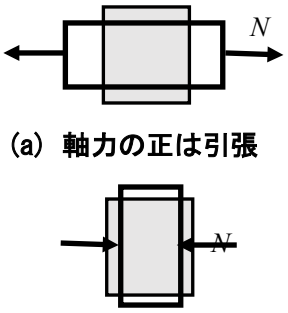
３：軸力図

A: 軸力は値と正負が重要である→図芯のどちら側に描くかは重要でない

軸力では正負が重要であり、せん断力と同様に図芯軸のどちら側に描くかはそれほど重要ではない。テキストによっても異なることがあり、一貫した仕様で描かれておれば良く、見る人に誤解を与えない。

B:値が正の場合、軸力は引張、負の場合は圧縮を意味する

図 13 のように軸力が正の場合は引張、負の場合は圧縮の応力状態であることを示す。ただし、ベルヌーイ・オイラー梁では、平面保持の仮定を用いているため、**平面自身が剛体**であり、同図(a)のように引張によって直交方向の断面幅が小さくなることは考慮しない。



(a) 軸力の正は引張

(b) 軸力の負は圧縮

図 12 軸力の正負の定義

４：外力と軸力及びせん断力との関係

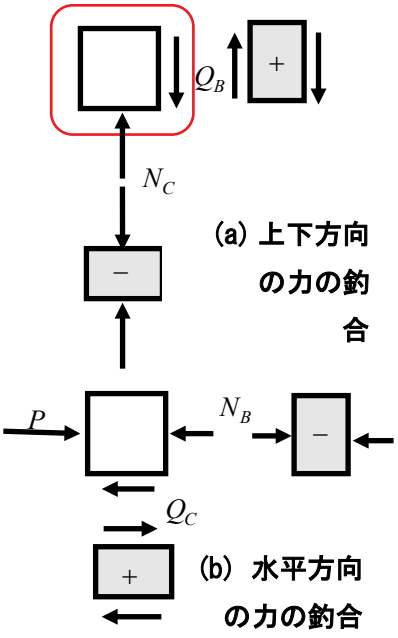
A:梁と柱が直角に接合すると、接合節点で断面力の値を交換する

梁と柱が 90 度で接合し、外力がない場合、断面力を交換する。図 13 に示すように接合節点を閉曲線で囲い、上下及び水平方向で力の釣合を考える。ここでは、接合節点に水平外力が加わっているとすると、同図(b)では、柱のせん断力と梁の軸力と共に水平外力が力の釣合に加わることになる。図 13(a)で示される閉曲線の上下方向の断面力の釣合、及び同図(b)の水平方向の力の釣合より、2 つの釣合式が得られる。

$$Q_B - N_C = 0 \rightarrow Q_B = N_C; \quad P - Q_c - N_B = 0 \rightarrow N_B = P - Q_c$$

第 1 式より、正符号の梁のせん断力が柱の圧縮軸力となる。第 2 式より、水平荷重から柱のせん断力を引いた値が梁の軸力となる。一方、**その節点に外力がない場合、両者の断面力は交換される。**

次に、柱と梁が十字で交差すると、力の釣合より、その接合節点では柱の軸力と梁のせん断力の和、また柱のせん断力と梁の軸力の和はゼロとなる。その節点に外力が加わっているときは、その力を含めて釣合が成立する。一般的には、せん断力は曲げモーメントから求められるので、この節点での釣合から軸力を決定することになる。



(a) 上下方向の力の釣合

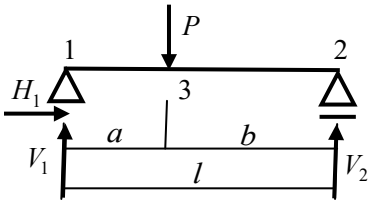
(b) 水平方向の力の釣合

図 13 梁と柱の接合部の
断面力の釣合

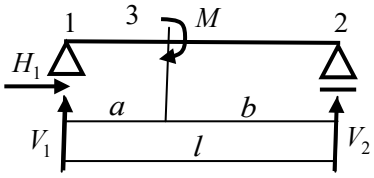
基礎３１話 No.1　単純梁＋荷重変更

付 4 話参照
ex31_1 ~ ex31_4

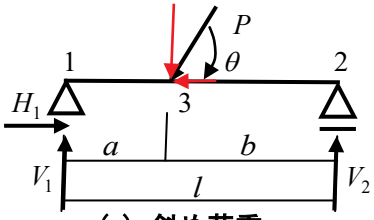
前回では、断面力である曲げモーメント図、せん断力図、軸力図の基本的な描き方のルールを学んだ。ここでは、これらを応用して、静定の基本構造に外力を少し変更した骨組の各断面力図を求めてみよう。まず、単純梁に外力を変化させた次の 4 種の応力解析を行う。ただし、これらの骨組の反力は既に基礎 4 話で求められている。



(a) 片寄った位置への集中荷重



(b) モーメント荷重



(c) 斜め荷重

図 1 各種の荷重が加わる単純梁モデル

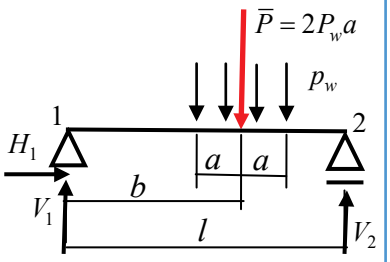
Ⅰ）単純梁型

1) 図 1(a)の片寄った位置への集中荷重　　ex31_1

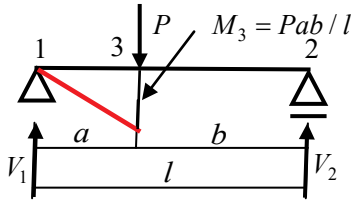
モデルの反力は以下のようであり、まず曲げモーメント図を求める。

$$H_1 = 0;\quad V_1 = Pb/l;\quad V_2 = Pa/l$$

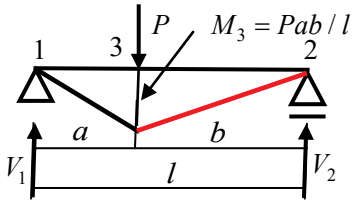
節点 1 及び 2 ではピン支持とローラー支持であり、モーメント反力はゼロである。また、図 1(a)のように節点 1 から 3 までは荷重がゼロであるため、曲げモーメント図は直線となる。簡易切断法により節点 3 の曲げモーメントは $M_3 = V_1 a = V_1 ab/l$ となり、節点 1 のゼロから節点 3 の M_3 に、図 2(a)の反力 V_1 の尻尾方向に増加するように直線を引く。節点 3 と 2 の間も荷重がないので曲げモーメントは直線、しかも両端の値は既に分かっている。これで曲げモーメント図は終了である。



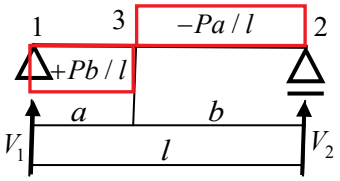
(d) 一部等分布荷重



(a) 節点 1 から 3 への曲げモーメント



(b) 節点 3 から 2 への曲げモーメント



(c) せん断力図

図 2 片寄った位置への集中荷重に対する単純梁の応力解析手順

せん断力図は曲げモーメントの勾配から求めても良いが、ここでは支持節点 1 と 2 の反力との力の釣合より求める。値の正負は、荷重点左側の曲げモーメントの傾きが右下がりで正、右側が右上りで負となる。

2) 図 1(b)のモーメント荷重　　ex31_2

モデルの反力が図 3 に描かれており、$V_1 = V_2 = M/l$ である。節点 1-3

間、節点 3-2 間は外力がないことから曲げモーメント図は直線であり、節点 1 及び 2 から反力の尻尾の方向に増加する。両端の値は、節点 1 と 2 はゼロ、また節点 3 の左右の曲げモーメントは、$M_{3L}=V_1a=Ma/l$ と $M_{3R}=V_2b=Mb/l$ となる。モーメント荷重点直下では、曲げモーメントは不連続となり、その値はモーメント荷重に等しい。せん断力図は、節点 1 と 2 の上下方向の釣合より求められ、曲げモーメントの傾きが右上がりであることから $-M/l$ となる。

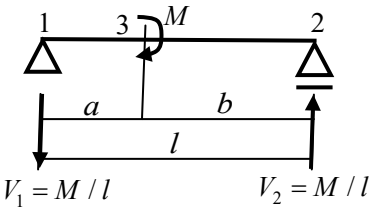
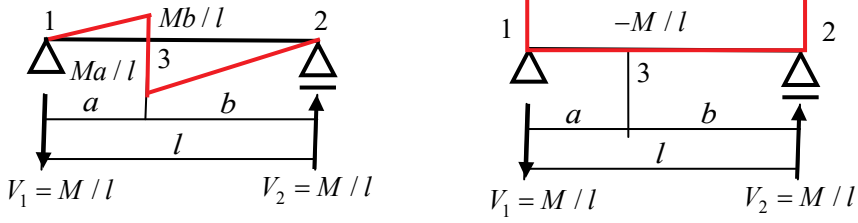


図 3 モーメント荷重にもよる反力

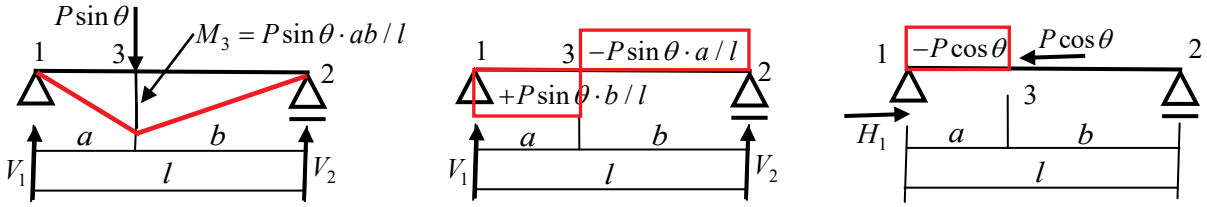


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 4 モーメント荷重を受ける梁の断面力図

3) 図 1(c)の斜め荷重　　ex31_3

斜め集中荷重を鉛直方向と梁軸方向に分解し、各々断面力図を求めれば良い。鉛直方向の荷重 $P\sin\theta$ による断面力図は、図 1 と同様の曲げモーメント図とせん断力図となる。梁軸方向の荷重 $P\cos\theta$ による軸力は、軸力図の中で節点 1 の水平反力との力の釣合より、図 5(c)となる。



(b) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 5 斜め荷重を受ける梁の断面力図

4) 図 1(d)の梁の一部に等分布荷重　　ex31_4

反力は既に求まっており、以下のようである。

$$H_1=0;\quad V_2=\bar{P}b/l;\quad V_1=\bar{P}(l-b)/l;\quad \leftarrow \bar{P}=2ap_w$$

節点 1-3 間及び節点 2-4 間の曲げモーメント分布は、これまでと同様に、反力が分かっているので容易に描くことができる。図 6 の赤線部分が曲げモーメント図であり、節点 3 及び 4 の曲げモーメントは、次式で得られる。

$$M_3=V_1(b-a)=\bar{P}(b-a)(l-b)/l$$

$$M_4=V_2(l-b-a)=\bar{P}b(l-b-a)/l$$

残りの節点 3-4 間の曲げモーメントは次回お話しする。

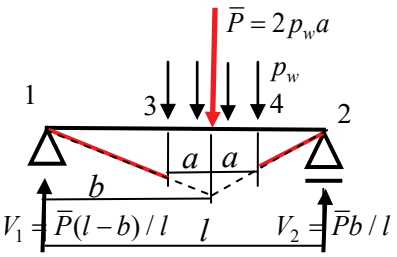


図 6 一部等分布荷重を受ける単純梁の曲げモーメントその 1

基礎３２話 No.2　片持ち梁＋荷重変更

付 4 話参照
ex31_5 ~ ex31_7

前回に続いて、梁の一部に等分布荷重が加わる場合で、節点 3-4 間の曲げモーメント図の求め方を学ぶ。反力及び節点 3 と 4 の曲げモーメントは次のように求められている。

$$H_1 = 0;\quad V_2 = \bar{P}b/l;\quad V_1 = \bar{P}(l-b)/l;\quad \leftarrow \bar{P} = 2ap_w$$

$$M_3 = \bar{P}(b-a)(l-b)/l;\quad M_4 = \bar{P}b(l-b-a)/l$$

節点 3 を超えた位置で断面を切断し、節点 1 と共に閉曲線で囲う。この閉曲線内の反力と荷重及び断面力を用いて、図 7 を参考に、節点 5 を中心とするモーメントの釣合を考える。ただし、座標の原点を節点 3 とし、分布荷重は仮想的な集中荷重 $\bar{P}_x = p_w x$ に置き換える。

$$-M_x + V_1(b-a+x) - \bar{P}_x x/2 = 0 \rightarrow M_x = \bar{P}(l-b)(b-a+x)/l - p_w x^2/2$$

得られた曲げモーメント関数に $x=0$ と $x=2a$ を代入し、節点 3 と 4 の曲げモーメントを求め、先に求めた M_3, M_4 と比較する。

$$M(0) = \bar{P}(l-b)(b-a)/l; \leftarrow M_3$$

$$M(2a) = \bar{P}(l-b)(b+a) - p_w a^2/2 = \bar{P}((l-b)(b+a)/l - a)$$

$$= \bar{P}b(l-b-a)/l \leftarrow M_4$$

上記のように、節点 3 と 4 の曲げモーメントは反力より求めた値と一致しており、上記のモーメント関数は適切であることが分かる。

せん断力図は、反力との力の釣合より、図 8(b) の両側で一定値となり、等分布荷重の領域ではせん断力は直線、両端を結べば良い。曲げモーメントの最大値は、同図 (b) のせん断力がゼロの位置 d を求め、値を曲げモーメント関数に代入することで得られる。

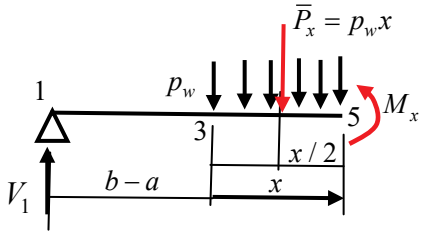
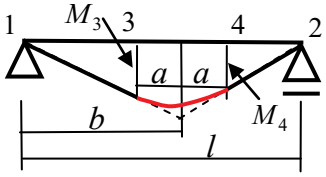
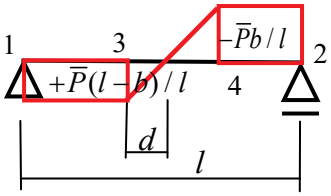


図 7 切断法によるモーメントの釣合



(a) 曲げモーメント図

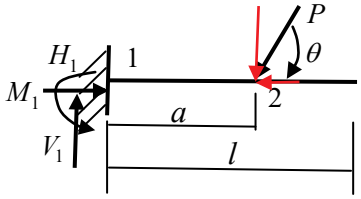


(b) せん断力図

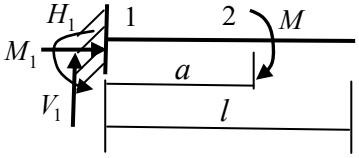
図 8 一部等分布荷重を受ける単純梁の断面力図

Ⅱ）片持ち梁

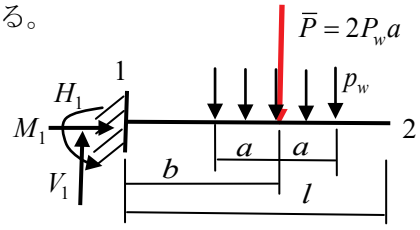
続いて、片持ち梁の応力解析を行う。解析モデルは以下の 3 種である。



(a) 斜め荷重



(b) モーメント荷重



(c) 一部等分布荷重

図 9 各種の荷重が加わる片持ち梁モデル

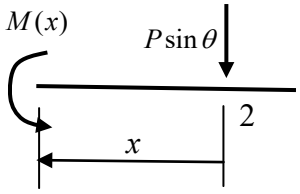
1）図 9 (a) の斜め荷重

ex31_5

反力は斜め荷重を分解することで、容易に求められる。特に、モーメントの釣合は節点 1 を中心にとれば良い。

$$H_1 = P\cos\theta;\quad V_1 = P\sin\theta;\quad -M_1 + aP\sin\theta = 0 \rightarrow\quad M_1 = aP\sin\theta$$

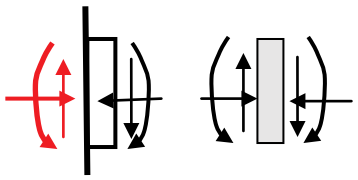
曲げモーメント図は、節点 2 を原点に図 10 (a) のように設定すれば、節



(a) モーメントの釣合

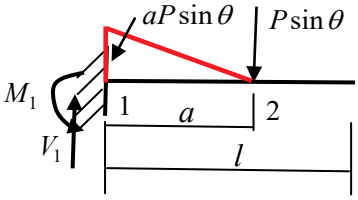
点 1 の曲げモーメント M_1 は $aP\cos\theta$ であり、増加する方向は荷重 $P\sin\theta$ の矢印の尻尾の方向である。曲げモーメント図は図 11(a) となる。固定支持である節点 1 でのモーメントの釣合は、図 10(b) となり、断面の上側が引張となる。固定支持点におけるモーメント反力の方向によって、断面の引張側がどちらになるかが理解できる。良く覚えておこう。

せん断力図も軸力図も節点 1-2 間は荷重が加わっていないため、定数であり、せん断力は曲げモーメントが右下がりであることから正、また、軸力は水平反力の方向から負、つまり圧縮となる。

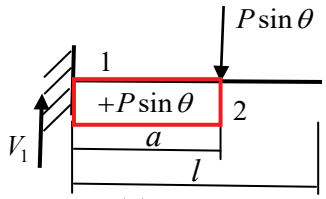


(b) 固定端の反力と断面力の釣合

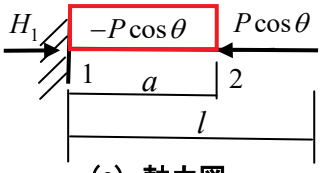
図 10 断面内の力の釣合



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 11 斜め荷重に対する断面力図

2) 図 9(b) のモーメント荷重　　ex31_6

このモデルの反力は外力との 3 つの釣合より、次のように得られる。

$$H_1 = 0;\quad V_1 = 0;\quad -M_1 + M = 0 \rightarrow \quad M_1 = M$$

反力と断面力の釣合より、せん断力図と軸力図はゼロであり、曲げモーメント図のみであり、図 12 に示す簡単な形状となる。

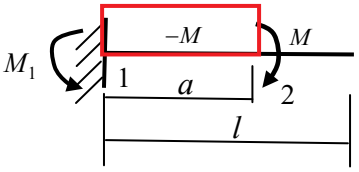


図 12 曲げモーメント図

3) 図 9(c) の一部等分布荷重　　ex31_7

節点 3 の曲げモーメント M_3 は、節点 3 を切断し、節点 1 を含む閉曲線で、節点 3 を中心とするモーメントの釣合より与えられる。節点 1-3 間は荷重がないので直線となる (図 13(a) 参照)。

$$-M_3 - M_1 + V_1(b-a) = 0 \rightarrow M_3 = -\bar{P}b + \bar{P}(b-a) = -\bar{P}a$$

また、節点 1 の曲げモーメントは反力 M_1 との釣合より $\bar{P}b$ となる。これらを考慮して、節点 1-3 間の曲げモーメントは図 13(a) となる。

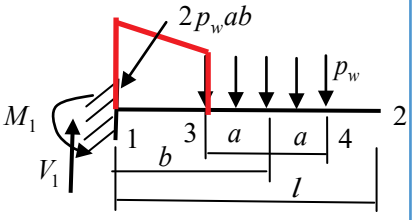
節点 3-4 間には等分布荷重が加わっているため、同図 (b) のように切断法を用いて、節点 4 を中心とするモーメントの釣合を求める。

$$-M_x + \bar{P}_x x/2 = 0 \rightarrow M_x = p_w x^2/2 \rightarrow M(2a) = 2p_w a^2 = \bar{P}a$$

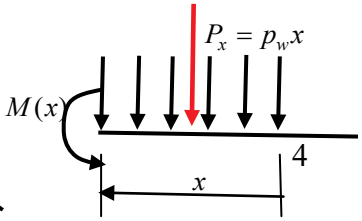
せん断力図は、節点 1-3 間は定数、反力との釣合より求め、曲げモーメントが右下がりであることから正、節点 3-4 間は等分布荷重であることから直線となり、両端の値を利用して直線を引く。

$H_1 = 0;\quad V_1 = \bar{P}$

$M_1 = \bar{P}b;\quad \leftarrow \bar{P} = 2p_w a$

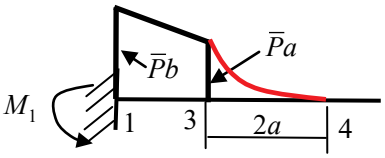


(a) 節点 3 を中心とするモーメントの釣合

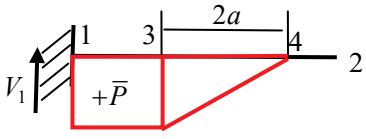


(b) 節点 4 を中心とするモーメントの釣合

図 13 切断法によるモーメントの釣合



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 14 一部等分布荷重が加わる片持ち梁の断面力図

基礎３３話 No.3　単純支持門型ラーメン＋荷重変更

付 4 話参照
ex33_1 ~ ex33_4

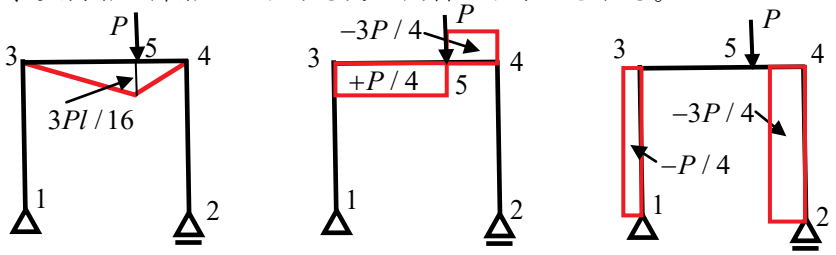
今回は門型ラーメンの基本構造について、外力を少し変更した図 15 の 4 種の断面力図を求める。特に層せん断力の検証を行う

Ⅲ）門型ラーメン

1) 図 15(a)の偏った鉛直荷重　ex33_1

図 15(a)の反力：　$H_1 = 0;\quad V_1 = P/4;\quad V_2 = 3P/4$

骨組には水平反力も水平外力もないため、両柱には曲げモーメントは発生しない。節点 3-5 間の曲げモーメントは節点 3 を原点とすると、$M_x(x) = V_1 x$ で与えられる。従って、荷重直下の曲げモーメント M_{5L} は $3Pl/16$ となる。一方、節点 4-5 間の曲げモーメントは節点 4 を原点とすると $V_2 x$ となり、荷重直下の曲げモーメント M_{5R} は $3Pl/16$ となる。なお、荷重点左右の曲げモーメントは折れ曲がるが、同一の値となる。せん断力は曲げモーメントが生じている梁に生じ、その傾きより荷重点より左側は正、右側は負となる。その大きさは傾き角度から分かる。軸力は、支持点と節点 3 における力の釣合より求められる。



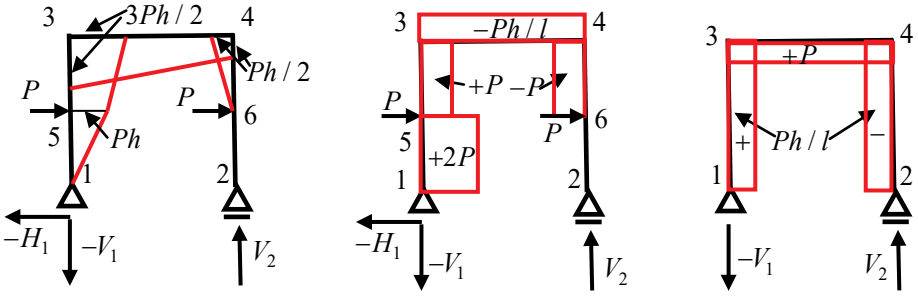
(a) 曲げモーメント図　(b) せん断力図　(c) 軸力図

図 16 偏った位置の鉛直集中荷重有する門型ラーメンの断面力図

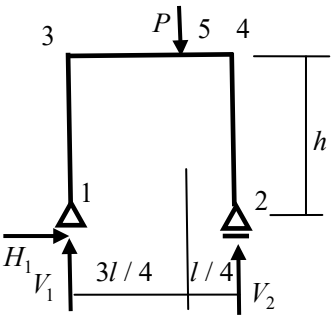
2) 図 15(b)の柱中央同方向水平荷重　ex33_2

図 15(b)の反力：　$H_1 = -2P;\quad V_1 = -Ph/l;\quad V_2 = Ph/l$

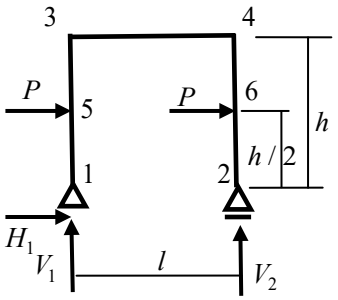
反力が分かれば、曲げモーメント図は図 17(a)のように容易に求められる。節点 5-3 間の曲げモーメントは、支持点の水平反力と荷重の影響を受ける。節点 3 を原点とすると $M(x) = H_1(x + h/2) - Px$ で与えられ、節点 3 の柱側の曲げモーメントは $M_3 = 2Ph - Ph/2 = 3Ph/2$ となる。



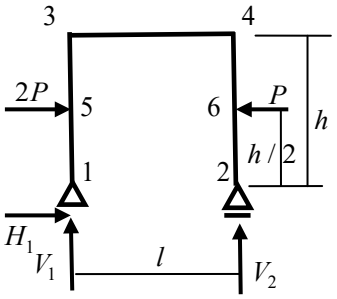
(a) 曲げモーメント図　(b) せん断力図　(c) 軸力図



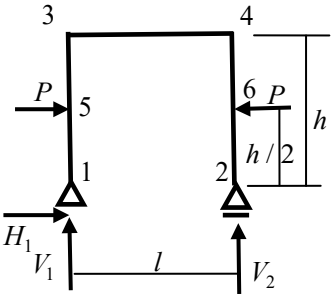
(a) 偏った位置の鉛直集中荷重



(b) 柱中央同方向水平荷重



(c) 柱中央逆方向水平荷重

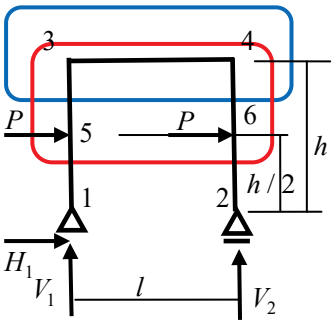


(d) 柱中央逆方向水平荷重 2

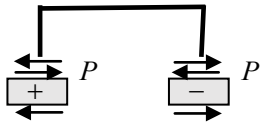
図 15 門型ラーメン

図 17 柱中央同方向水平荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

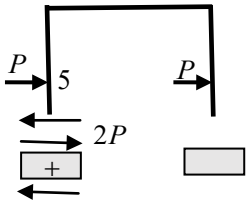
ここでは、層せん断力と水平外力との釣合を検証してみよう。図 18(a)には 2 つの閉曲線が示され、同図(b)と(c)には、外力と断面力の水平方向の力の釣合が示されている。同図(b)では水平外力がないため、層せん断力の総和はゼロでなければならず、逆方向のせん断力が生じている。また、同図(c)では、右側の柱にはせん断力が生じておらず、水平外力の和 $2P$ は、左の柱のせん断力と釣合う。このように、層せん断力と水平外力の釣合を常に検証すると良い。



(a) 2 つの閉曲線



(b) 水平荷重より上側



(c) 水平荷重よる下側

図 18 閉曲線内における水平方向の力の釣合

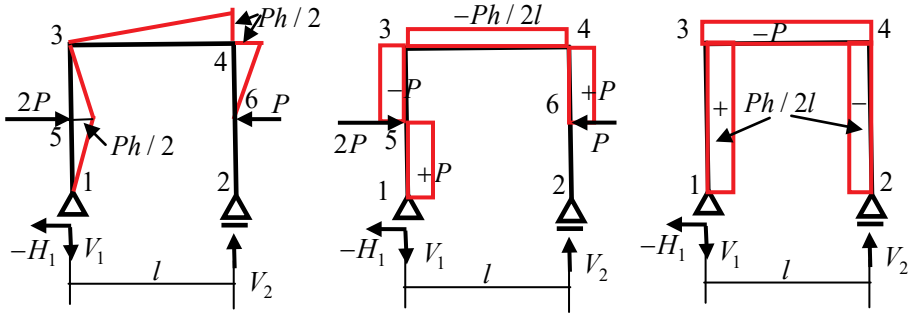
3) 図 15(c)の柱中央逆方向水平荷重　　ex33_3

図 15(c)の骨組の反力は次の 3 つの釣合より、容易に求められる。

$$H_1 + 2P - P = 0;\quad V_1 + V_2 = 0;\quad -V_2 l + Ph/2 = 0 \rightarrow$$

図 15(c)の反力： $H_1 = -P;\quad V_1 = -Ph/2l;\quad V_2 = Ph/2l$

節点 5-3 間の曲げモーメントは $M(x) = H_1(x + h/2) - Px$ で与えられ、節点 3 の柱側の曲げモーメントは $M_3 = Ph - 2Ph/2 = 0$ となる。節点 1-5 と 6-4 間では、水平反力と水平荷重を用いて曲げモーメント分布が得られる。節点 3-4 間は両端の曲げモーメントが得られているのでそのまま直線を引けば良い。せん断力と軸力はこれまでと同じでそれほど難しくはない。ここでも層せん断力と外力の釣合を検証すると良い。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 19 柱中央逆方向水平荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

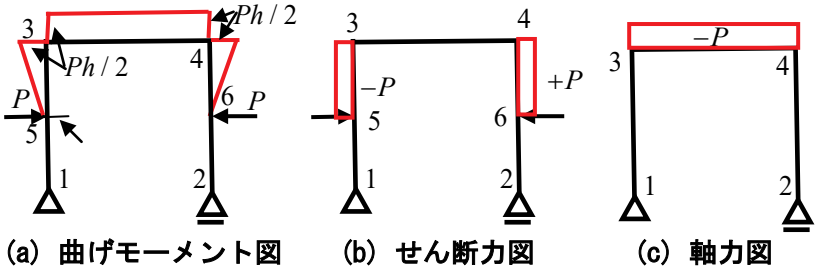
4) 図 15(d)の柱中央逆方向水平荷重 2　　ex33_4

図 15(d)の骨組の反力は次の 3 つの釣合より、容易に求められる。

$$H_1 + P - P = 0;\quad V_1 + V_2 = 0;\quad -V_2 l + Ph/2 - +Ph/2 = 0$$

図 15(d)の反力： $H_1 = 0;\quad V_1 = 0;\quad V_2 = 0$

反力が全てゼロなので、少し驚くかもしれないが、これまで学んだ手法を用いれば、それほど難しくはない。ここでは、読者の演習とする。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

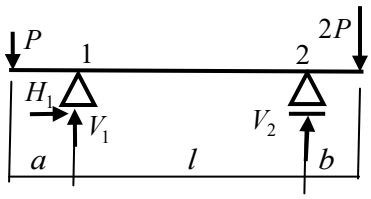
図 20 柱中央逆方向水平荷重 2 を受ける門型ラーメンの断面力図

基礎３４話 No.1　単純梁の拡張型

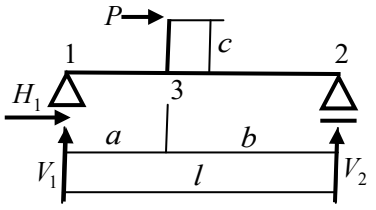
付 5 話参照
ex34_1 ~ ex34_3

前回は静定構造の基本である単純梁と片持ち梁について、荷重を少し変更した状態の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図及び軸力図を描く手法を学んだ。ここでは、続きとして、形状を少し変形した基本構造の応力解析と断面力図を描く手法を紹介する。応用力を見に付けることで、他の構造に対しても応力解析が可能となり、断面力図が描けるようになろう。

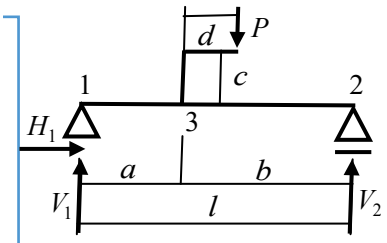
単純梁を少し変形すると、図 1 のように各種の骨組が得られる。これらも基本的には単純梁と同様の手法で応力解析ができる。また、分布荷重は仮想的な集中荷重に置き換えることで応力解析が可能である。ここでは集中荷重が加わる骨組のみを取り上げ、応力解析を行う。



(a) 左右片持ち梁を有する梁



(b) 中間部片持ち梁



(c) 中間部片持ち梁 2

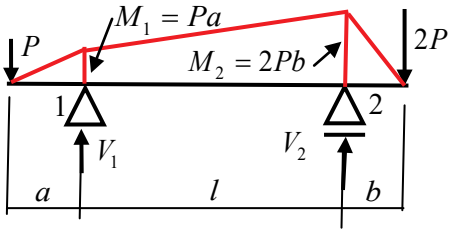
図 1 単純梁からの拡張型構造

Ⅰ）単純梁型の応用例

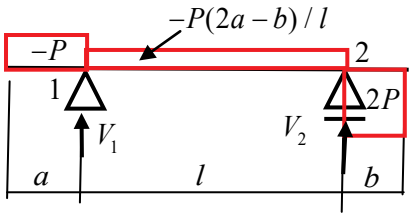
1）図 1(a)の左右片持ち梁を有する梁　　ex34_1

図 1(a)の骨組反力：$H_1 = 0;\quad V_1 = P(l + a - 2b)/l;\quad V_2 = P(2(l + b) - a)/l$

骨組に片持ち梁が取り付いている場合、その片持ち梁の応力状態は、骨組の応力状態に関係なく、片持ち梁独自の断面力となる。簡易切断法により、節点 1 の曲げモーメントは $M_1 = Pa$、節点 2 では $M_2 = 2Pb$ となり、荷重の尻尾方向に増加する。また、節点 1-2 間では荷重がないため、両端の曲げモーメントを直線で結べば良い。図 2(a)に、この骨組の曲げモーメント図を示す。



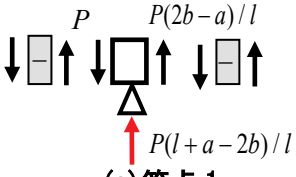
(a) 曲げモーメント図



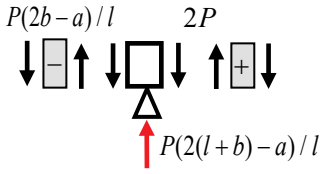
(b) せん断力図

図 2 左右片持ち梁が取り付く単純梁

曲げモーメント分布に傾斜がある場合、せん断力が生じ、その値は曲げモーメント関数の微分、つまり傾きに等しい。ここでは、荷重が集中荷重であるため、せん断力は定数となる。片持ち梁のせん断力の値は荷重に等しく、せん断力の符号は、曲げモーメント分布が左側の片持ち梁では右上がりで負、右側のそれでは右下がりで正となる。また節点 1-2 間の曲げモーメントの傾きは $P(2b - a)/l$ となり、この値が正の場合、せん断力は負となり、逆の場合は正となる。図 2(a)に示す右上がりで



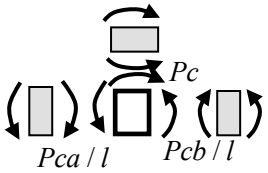
(a) 節点 1



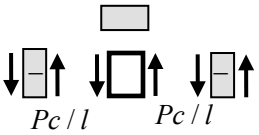
(b) 節点 2

図 3 上下方向の釣合

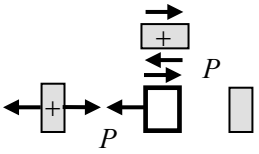
は、せん断力は負となる。節点 1 と 2 での上下方向の力の釣合を検証してみよう。図 3(a)では節点 1 、同図(b)では節点 2 を含む閉曲線で切り取った断面の上下方向の釣合を示す。いずれも釣合が取れている。



(a)モーメントの釣合



(b)上下方向の力の釣合



(c)水平方向の力の釣合

図 4 節点 3 での断面力の釣合

2) 図 1(b)の中間部片持ち梁　ex34_2

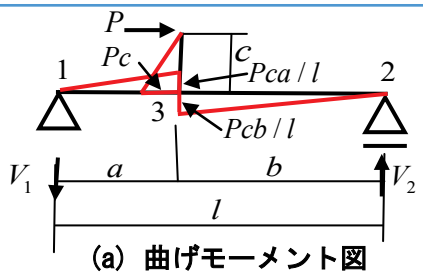
図 1(b)の骨組反力：$H_1 = -P;\quad V_1 = -Pc/l;\quad V_2 = Pc/l$

曲げモーメント図は、片持ち梁と左右の節点からのモーメントの釣合から容易に得られる。各部材のせん断力は荷重と反力との釣合より、求められ、正負は曲げモーメントの傾きから決められる。軸力分布も同様に、節点 1 の水平方向反力との釣合によって求められる。

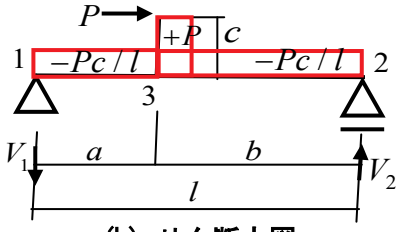
ここでは、節点 3 におけるモーメントの釣合と両方向の釣合を考えてみよう。まず、図 4 よりモーメントの釣合は、

$$Pc - Pcb/l - Pca/l \rightarrow Pc - Pc(a+b)/l = 0$$

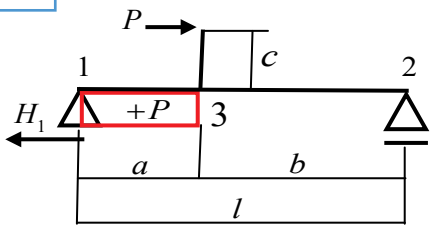
となり、また、上下方向では、節点左右のせん断力で釣合う。一方、水平方向では、節点 3 の左側の軸力と垂直部材のせん断力の釣合より、力の釣合が取れている。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



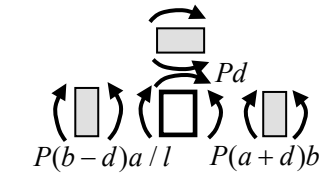
(c) 軸力図

図 5 梁中間部に片持ち梁が取り付く単純梁

3) 図 1(c)の中間部片持ち梁 2　ex34_3

図 1(c)の骨組反力：$H_1 = 0;\quad V_1 = P(b-d)/l;\quad V_2 = P(a+d)/l$

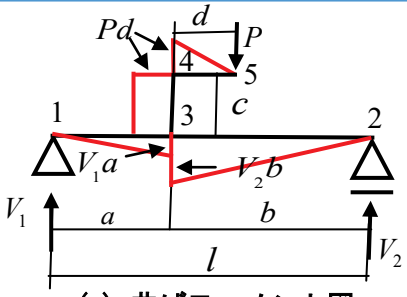
節点 3 から荷重直下までは片持ち梁であるため、通常の方法で曲げモーメント図を求めれば良い。ただし、途中で 90 度折れ曲がっているため、節点 3-4 間ではせん断力はなく、軸力が生じる。せん断力図は、荷重及び反力との釣合から得られる。値の正負は曲げモーメントの傾きから求める。軸力は節点 3-5 間に生じるが、反力 H_1 がゼロとなるため、他の節点間ではゼロとなる。節点 3 でのモーメントは、図 6 のように釣合う。



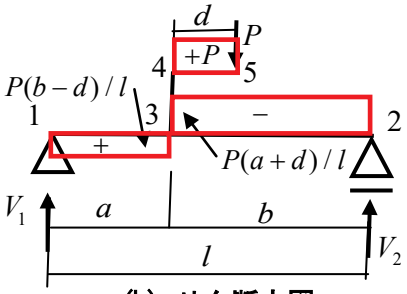
$$M_3 = Pd + P(b-d)a/l - P(a+d)b/l$$
$$= P(dl - ad - db)/l$$
$$= P(dl - d(a+b)/l \rightarrow 0$$

図 6 モーメントの釣合

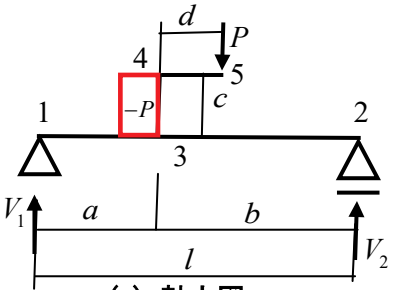
図 7 梁中間部に片持ち梁が取り付く単純梁その 2



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

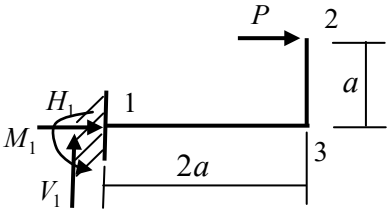


(c) 軸力図

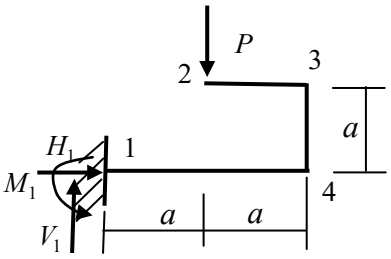
基礎３５話 No.2　片持ち梁の拡張型

付 6 話参照
ex35_1 ~ ex35_4

前回は静定基本構造である単純梁の形状を、少し変更した構造物の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図及び軸力図を描く手法を学んだ。ここでは、その続きとして、片持ち梁の基本構造を変形した各種構造物の応力解析と断面力図を描く手法を学ぶ。



(a) 拡張型構造 1



(b) 拡張型構造 2

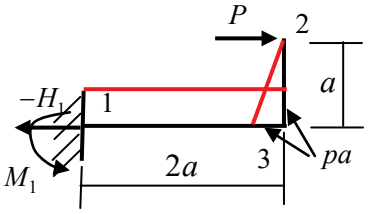
図 8 片持ち梁拡張型構造

Ⅱ）片持ち梁型の応用例

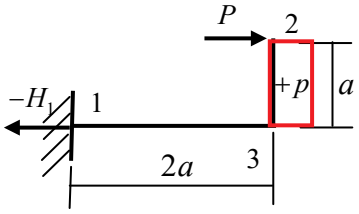
1) 図 8(a)の片持ち梁拡張型 1　　ex35_1

図 8(a)の片持ち梁の反力：$H_1 = -P;\quad V_1 = 0;\quad M_1 = Pa$

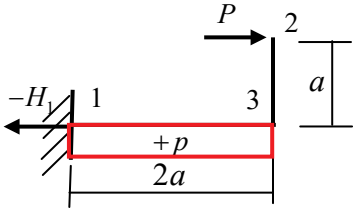
節点 2-3 間では、曲げモーメントは荷重点でゼロから直線的に増加し、節点 3 では曲げモーメントは Pa となる。引張応力は部材の左側に生じる。節点 3-1 間の任意点で、曲げモーメントは変化せず、直線となる。次に、せん断力は、節点 2-3 間で荷重との釣合より P、符号は曲げモーメントが右下がりで正となる。節点間 1-3 は曲げモーメントに傾きがないので、せん断力はゼロとなる。軸力は節点 1-2 間で、水平反力との釣合より軸力は P となり、符号は正で引張応力となる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



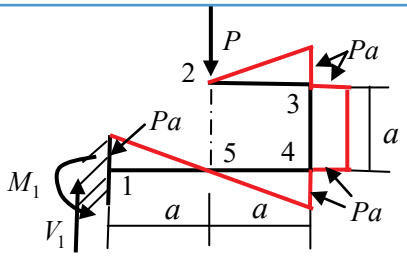
(c) 軸力図

図 9 片持ち梁の拡張型構造 1 の断面力図

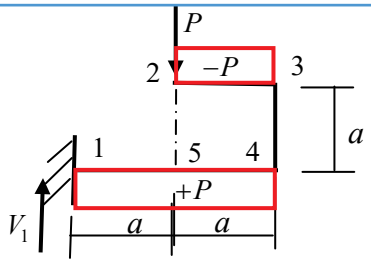
2) 図 8(b)の片持ち梁拡張型 2　　ex35_2

図 8(b)の片持ち梁の反力：$H_1 = 0;\quad V_1 = P;\quad M_1 = Pa$

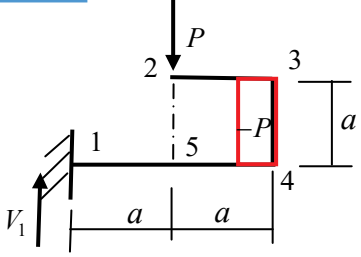
ここでは特に、集中荷重の延長線と部材 1-4 間の交点 5 では、曲げモーメントがゼロとなることに注意されたい。節点 1-4 間では反力と釣合う節点 1 の曲げモーメントから節点 5 を通る直線を引くと、節点 4 では曲げモーメントは Pa となる。節点 3-4 間では曲げモーメントは変化せず、2-3 間では通常の方法で曲げモーメント図を求める。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 10 片持ち梁の拡張型構造 2 の断面力図

せん断力は曲げモーメントの傾きから求められ、また軸力も節点でのせん断力もしくは荷重との釣合より求められる。

3) 図 11 の片持ち梁拡張型構造＋斜め荷重　ex35_3

図 11 の片持ち梁の反力：　$H_1 = P_x = P\cos\theta;\quad V_1 = P_y \sin\theta;\quad M_1 = 0$

荷重 P の作用線が節点 1 を通ることから、荷重の角度は $\theta = 45$ 度であり、$P_x = P_y = P/\sqrt{2}$ となる。また、節点 1 でのモーメントの釣合ではモーメントのアームがゼロとなる。そのため、荷重 P の節点 1 でのモーメントはゼロである。このことは重要であり、覚えておくと良い。後は、荷重を 2 つに分解し、各々の曲げモーメント分布の和を取れば良い。せん断力は曲げモーメント分布に傾きがある場合に生じ、その値は傾きか、もしくは支持点反力あるいは荷重との釣合より求める。

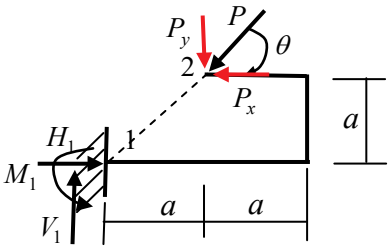
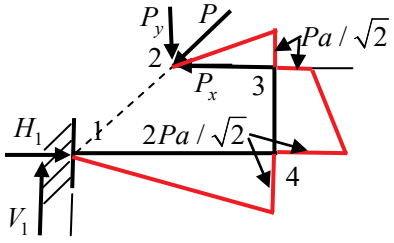
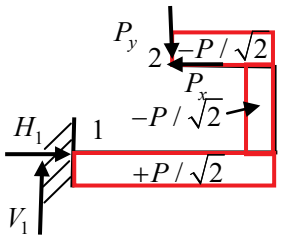


図 11 拡張型構造 2+斜め荷重

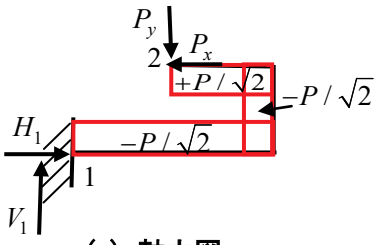
図 12 片持ち梁の拡張型構造 2 の断面力図



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

4) 図 13 の片持ち梁拡張型構造 3　ex35_4

このモデルの反力は次の 3 つの力の釣合より求められる。

$$H_1 = 0;\quad 2P + V_1 = 0;\quad 2Pa - Pa - M_1 = 0 \rightarrow$$

図 13 の片持ち梁の反力：$H_1 = 0;\quad V_1 = 2P;\quad M_1 = Pa$

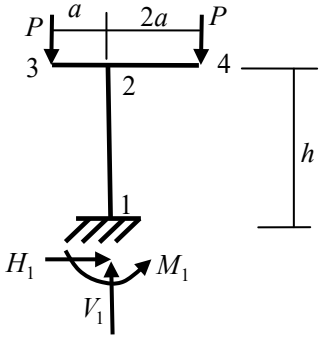
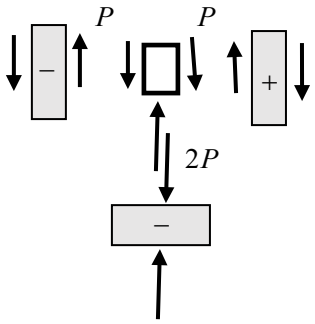
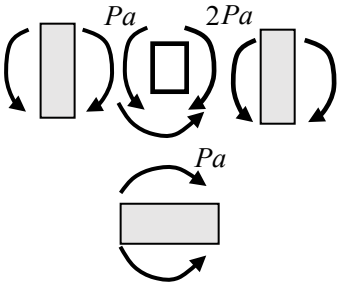


図 13 片持ち梁の拡張型構造 3



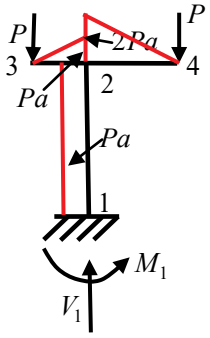
(a) 上下方向の力の釣合



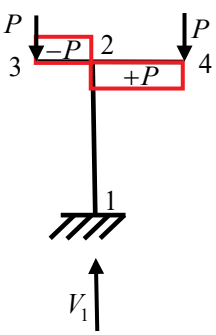
(b) モーメントの釣合

節点間 3-2 及び 4-2 間では、曲げモーメントは直線となり、節点 3 及び 4 でゼロ、荷重矢印の尻尾の方向に向かって増加する。その最大値は、前者は Pa、後者は $2Pa$ となる。節点 2 におけるモーメントの釣合は、図 14 のようになり、柱の左側が引張となる。せん断力と軸力は荷重及び支持点反力との釣合より求められる。

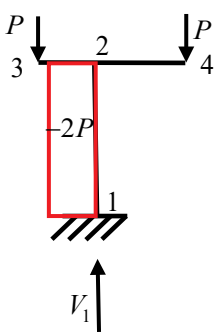
図 14 節点 2 における断面力の釣合



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 15 片持ち梁の拡張型構造 3 の断面力図

基礎３６話 No.3 単純支持門型ラーメンの拡張型

付 7 話参照
ex36_1 ~ ex36_4

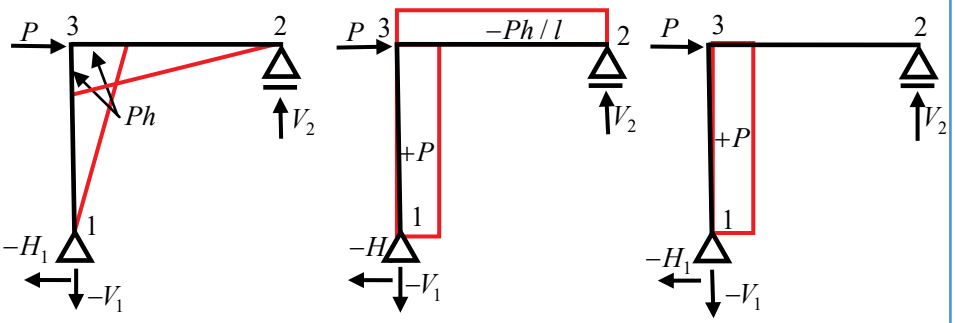
今回は基本構造である単純支持門型ラーメンの拡張型構造について考える。まず、基本構造である単純支持門型ラーメンの断面力分布を思い出し、良く理解しておこう。

Ⅲ）門型ラーメンの応用例

1）図 16(a)の単純支持門型ラーメン 1　　ex36_1

図 16(a)の門型ラーメン 1 の反力： $H_1 = -P;\quad V_1 = -Ph/l;\quad V_2 = Ph/l$

反力が正確であれば、この種の骨組の曲げモーメント分布を求めることは容易である。これまで通り、分かる部材から曲げモーメント分布を求める。支持点反力あるいは外力と部材長より端部の曲げモーメントを計算し、反力矢印の尻尾方向に増加させて描く。せん断力は曲げモーメントの傾きからか、もしくは部材端部との力の釣合から理解できる。同様に、軸力も端部の外力あるいは支持点反力より求める。



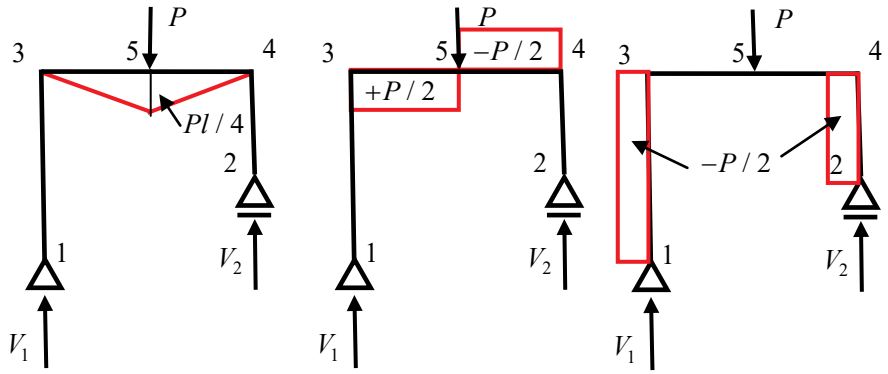
(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 17 単純支持門型ラーメンの拡張型 1

2）図 16(b)の単純支持門型ラーメン 2　　ex36_2

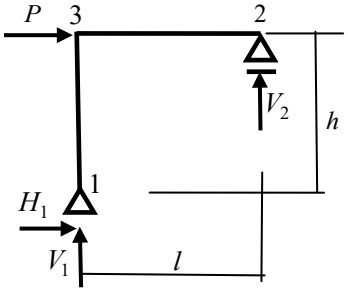
図 16(b)の門型ラーメン 2 の反力： $H_1 = 0;\quad V_1 = P/2;\quad V_2 = P/2$

水平反力 H_1 がゼロであることから柱には曲げモーメントは生じない。

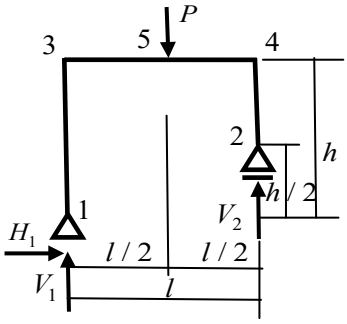


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

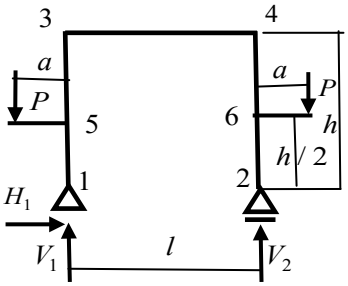
図 18 単純支持門型ラーメンの拡張型 2



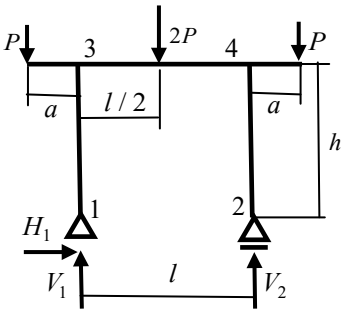
(a) 門型ラーメン 1



(b) 門型ラーメン 2



(c) 門型ラーメン 3



(d) 門型ラーメン 4

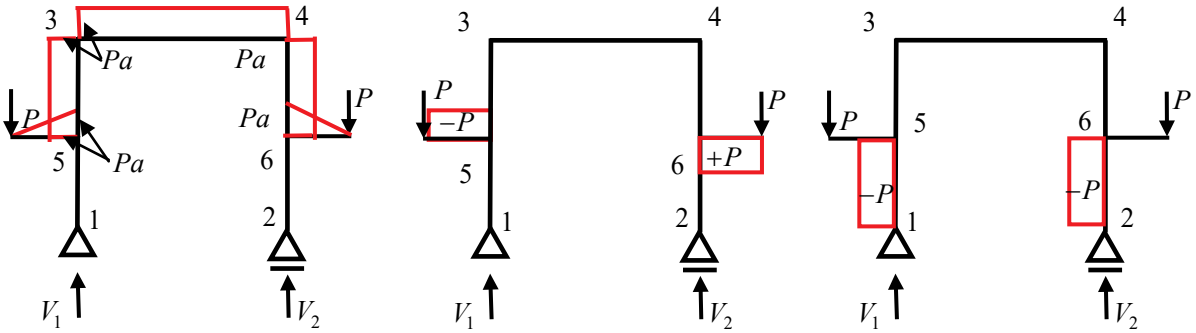
図 16 門型ラーメン拡張型構造

梁の曲げモーメント分布は、節点 3 と 4 の曲げモーメントが柱の曲げモーメントとの釣合よりゼロであり、また、柱の支持点反力 V_1 と V_2 を利用することで、これまで用いた手法で求められる。節点 5 の曲げモーメントは、$M_5 = V_1 l / 2 = Pl / 4$ となる。節点 3-5 間及び 5-2 間で、曲げモーメントに傾きがあるため、せん断力が発生する。その値は曲げモーメントの傾きより両者共に $P / 2$ となる。

3) 図 16(c)の単純支持門型ラーメン 3　　ex36_3

図 16(c)の門型ラーメン 3 の反力： $H_1 = 0;\quad V_1 = P;\quad V_2 = P$

対称形状・対称荷重であることから、反力も断面力も対称となる。このことを意識して断面力を求める。また、骨組に取り付いた片持ち梁の断面力は他の部材の影響を受けない。まず、片持ち梁部分の曲げモーメントを決める。その基部の曲げモーメントは両者共 Pa、向きは荷重矢印の尻尾方向に増加させる。せん断力は曲げモーメントに傾きがある部材に生じ、その値は、傾きの方向と大きさによって決まる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

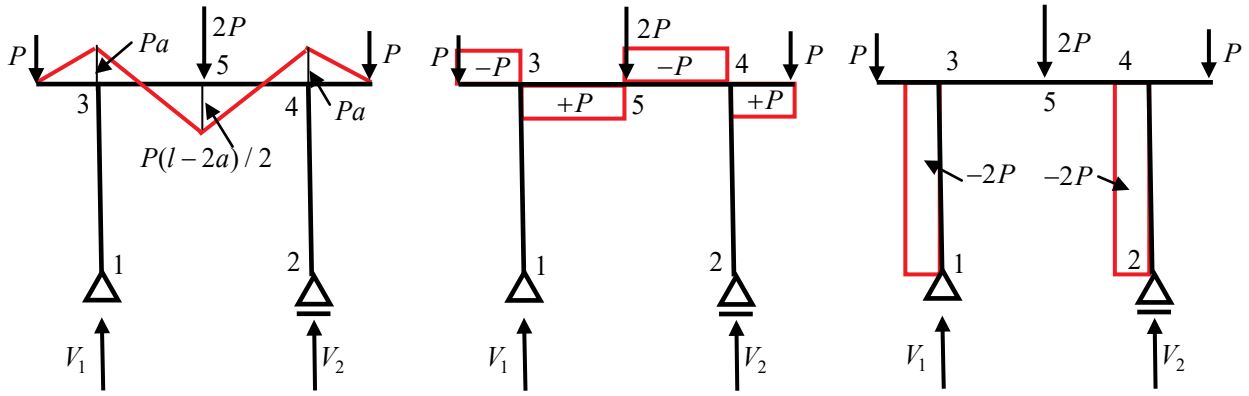
図 19 単純支持門型ラーメンの拡張型 3

4) 図 16(d)の単純支持門型ラーメン 4　　ex36_4

図 16(d)の門型ラーメン 4 の反力： $H_1 = 0;\quad V_1 = 2P;\quad V_2 = 2P$

水平荷重がないため水平反力はなく、荷重が対称であることから、鉛直支持点反力は総荷重の 1/2 となる。曲げモーメント図は対称となり、片持ち梁端部の曲げモーメントは Pa となる。また梁中央の曲げモーメントは切断法により、$M_5 = Pl - P(a + l/2) = P(l - 2a)/2$　となる。

図 20 単純支持門型ラーメンの拡張型 4



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

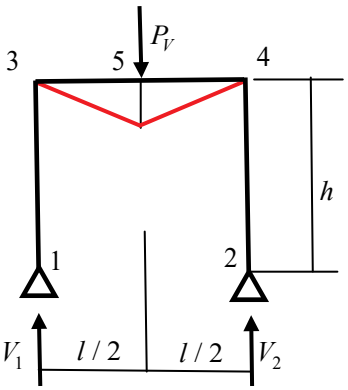
基礎３７話 No.4　両端ピン支持門型ラーメン＋逆対称荷重

付 8 話参照
ex37_1; ex37_2

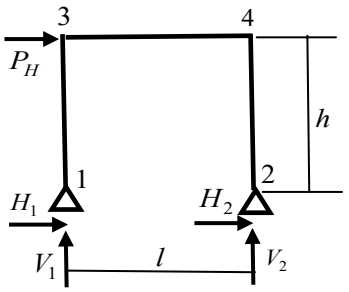
今後以降数回に渡って、基本構造である単純梁の拡張型として、3 ヒンジ型の門型ラーメンの応力解析についてお話しする。まず、図 21 の両端ピン支持門型ラーメンについて考える。反力計算のお話をした際、この門型ラーメンは反力の自由度が 4 つあり、**不静定構造物**であると言った。不静定構造では、梁・柱の剛性、つまりヤング係数や断面二次モーメントなど、部材の特性によって反力は変化し、断面力分布も変わる。不静定構造の応力解析の話は後日、詳細にお話しすることにしよう。

図 21 の門型ラーメンは対称構造であり、同図(a)は対称荷重、同じく(b)と(c)は逆対称荷重である。そのため、反力も前者は対称、後者は逆対称となる。図(b)の逆対称は、梁の軸剛性が大きく、剛体と見做せる場合で、節点 3 と 4 に $P_H/2$ が加わった時と同じとなる。

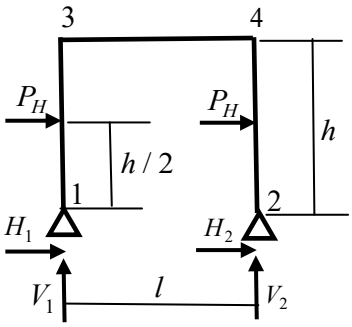
同図(a)の構造・荷重状態で、鉛直方向反力は求められるが、対称条件を用いても水平反力は決まらない。例えば、梁の曲げ剛性が柱のそれより圧倒的に大きい場合、梁端部の回転角は自由となり、水平反力はゼロに近づく。逆に、梁の曲げ剛性が柱のそれより圧倒的に小さい場合、梁端部は固定支持と近似し、支持点では水平反力が、柱には曲げモーメントが生じる。前者の曲げモーメント分布は図 22(a)となり、後者は同図(b)となる。実際の骨組ではこの中間の状態となる。このように不静定構造は、部材の特性を考慮しないと骨組全体の応力分布は決定しない。



(a) 梁中央鉛直集中荷重



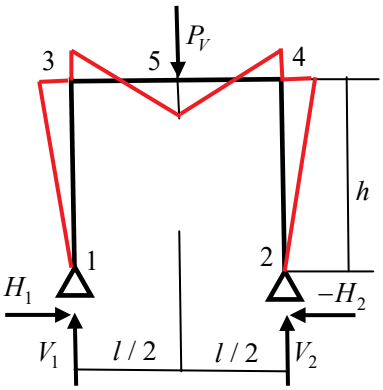
(b) 柱頭水平集中荷重



(c) 柱中間水平集中荷重

図 21 両端ピン支持門型ラーメン

(a) 梁の剛性が大きい場合



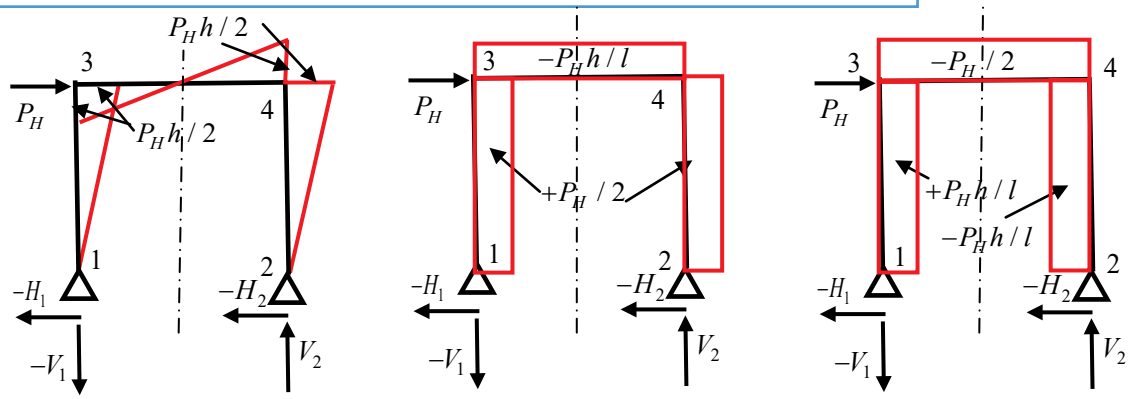
(b) 梁の剛性が小さい場合

図 22 対称荷重を受ける門型ラーメンの曲げモーメント図

一方、逆対称荷重では逆対称条件により反力が求められ、同図 21(b)の骨組の反力は、$H_1 = H_2 = -P_H/2; V_2 = P_H h/l = -V_1$ となる。また、同図(c)の骨組の反力は、同様の手法により、$H_1 = H_2 = -P_H; V_2 = P_H h/l = -V_1$ となる。この場合の反力を読者が計算して確かめられたい。

5) 図 21(b)の柱頭水平荷重＋両端ピン支持門型ラーメン　ex37_1

これまでの手法がそのまま使用でき、簡単に断面力図が得られる。まず、各断面力が逆対称となることを考慮して、曲げモーメント図を求める。水平反力から、節点 1-3 間及び 2-4 間の曲げモーメント分布が、切断法の簡易型で得られる。節点 3 と 4 の曲げモーメントは、各々 $P_H h/2$ となり、節点 3-4 間では両端の曲げモーメントから得られる。逆対称であることから梁中央で曲げモーメントはゼロとなる。せん断力図は曲げモーメントの傾きから、また軸力は支持点反力との釣合から容易に求められる。特に、この骨組では、水平荷重の半分が、節点 3-4 間の軸力を経て右側の柱に伝わり、外力は両柱に均等にせん断力として伝達される。この基本構造の断面力分布を良く覚えておこう。

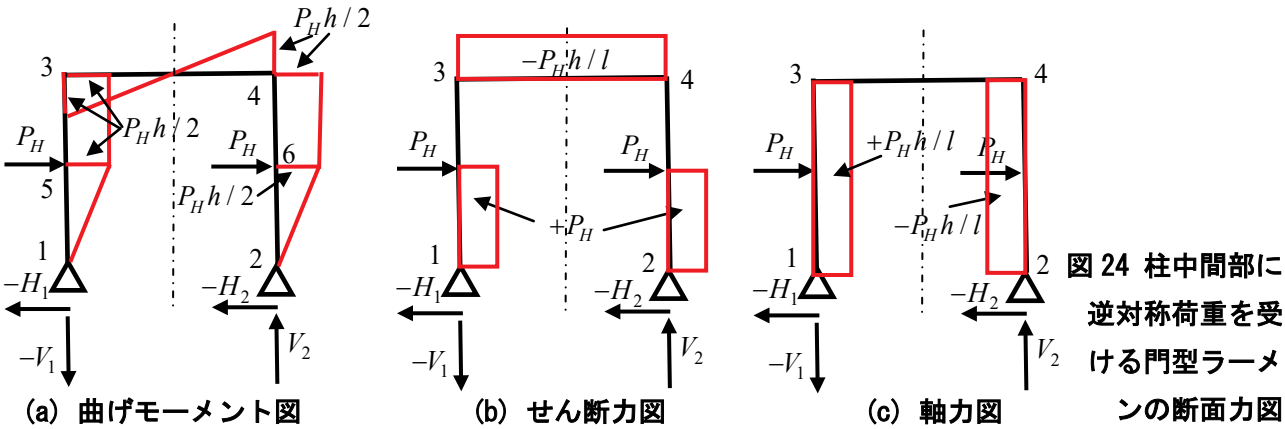


(a) 曲げモーメント図　(b) せん断力図　(c) 軸力図

図 23 逆対称荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

6) 図 21(c)の柱中間荷重＋両端ピン支持門型ラーメン　ex37_2

門型ラーメンの応用として、柱の中間に水平荷重が加わった場合の応力解析がある。節点 5-3 間及び 6-4 間の曲げモーメントには勾配がなく、せん断力はゼロとなる。すなわち、節点 3 と 4 の曲げモーメントは、切断法の簡易法によると $M_3 = H_1 h - P_H h/2$ より $P_H h/2$ となり、荷重点の曲げモーメントと同じとなる。軸力も節点での力の釣合より求められる。



(a) 曲げモーメント図　(b) せん断力図　(c) 軸力図

図 24 柱中間部に逆対称荷重を受ける門型ラーメンの断面力図

基礎３８話 No.5　3 ヒンジ門型ラーメン＋各種荷重

付 9 話参照
ex38_1 ~ ex38_3

今回と次回は基本構造である門型ラーメンの拡張型として、3 ヒンジ門型ラーメンや 3 ヒンジ山形ラーメンの応力解析を行う。

Ⅳ）3 ヒンジ門型ラーメン

1）図 25(a)の柱頭水平荷重＋3 ヒンジ門型ラーメン　ex38_1

図 25(a)の反力は、外力と反力による釣合と切断法により求める。まず両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

$$x: P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0; \quad Ph + H_2 h/2 - V_2 l = 0$$

3 つの方程式が得られる。さらに赤色の閉曲線で囲まれた領域で節点 5 に関するモーメントの釣合を考える。ただし、節点 5 はヒンジ接合であることから、仮想のモーメントはゼロである。

$$M_5 = -V_2 l/2 - H_2 h/2 = 0 \rightarrow \quad V_2 = -H_2 h/l$$

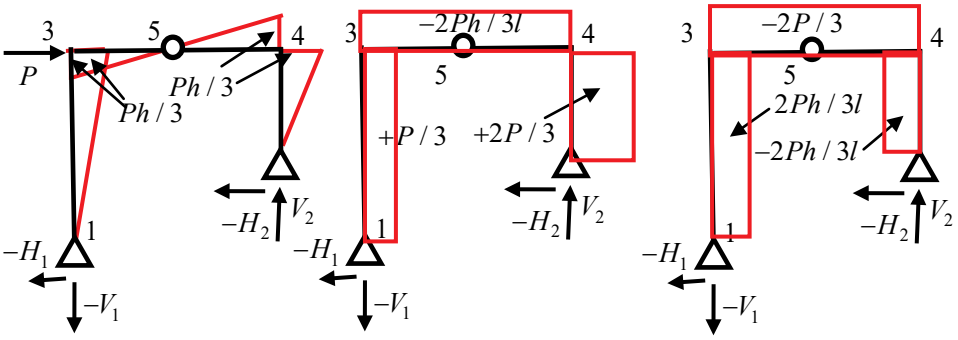
上記 4 つの釣合より、4 つの支持点反力が次のように求められる。

$$H_1 = -\frac{1}{3}P; \quad H_2 = -\frac{2}{3}P; \quad V_1 = -\frac{2h}{3l}P; \quad V_2 = \frac{2h}{3l}P$$

求めた反力を元に、図 26 のように反力を適切に図示する。ここでも、曲げモーメント図から始めるが、それほど難しくはない。切断法の簡易型を用いて、柱に生じる節点 3 及び 4 の曲げモーメントを求める。

$$M_3 = -H_1 h = Ph/3; \quad M_4 = -H_2 h/2 = Ph/3$$

節点 3 及 4 における柱と梁の材端モーメントの釣合より、梁側の曲げモーメントも $Ph/3$ となり、梁両端の曲げモーメントから分布が得られる。当然、節点 5 では曲げモーメントはゼロとなる。せん断力と軸力はこれまで通り、曲げモーメントと節点での力の釣合から求められる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 26 逆対称荷重を受ける 3 ヒンジ門型ラーメンの断面力図

2）図 25(b)の梁偏鉛直集中荷重 3 ヒンジ門型ラーメン　ex38_2

図 25(b)の骨組の反力も、上記と同様に 3 つの力の釣合と節点 5 と支

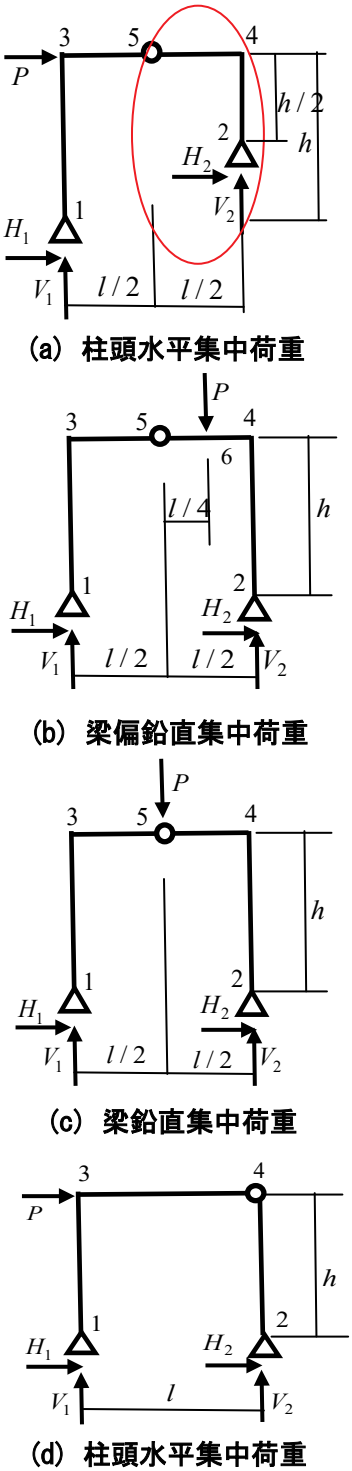
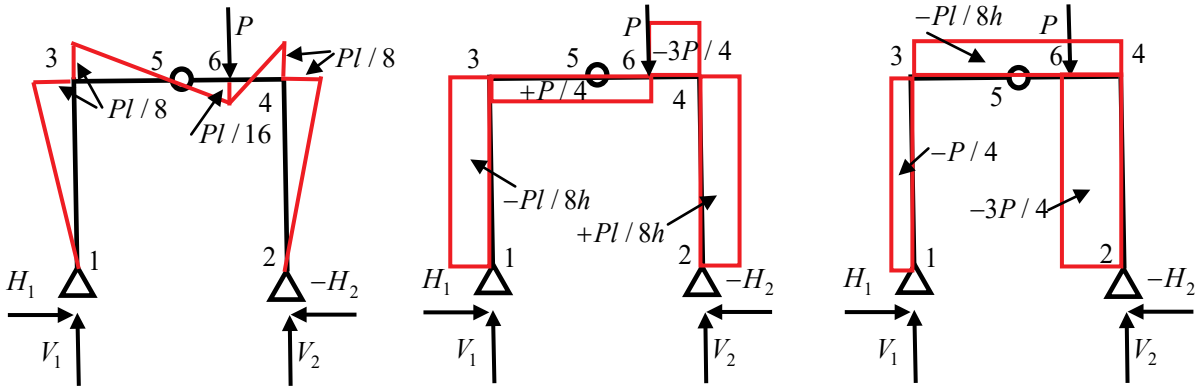


図 25 3 ヒンジ門型ラーメン

持点 1 を含む閉曲線内の力の釣合より求める。

図 25(b)の構造の反力：$H_1=\frac{l}{8h}P;\quad H_2=-\frac{l}{8h}P;\quad V_1=\frac{P}{4};\quad V_2=\frac{3P}{4}$

上記の反力を元に、反力の方向を適切に描くと、図 27 のようになる。この種の曲げモーメント分布は反力が分かれば容易に描くことができる。まず、支持点の水平反力より、節点 1-3 間と 2-4 間の曲げモーメントは切断法の簡易手法で図のように求められる。柱頭の曲げモーメントは $M_3=M_4=H_1h=Pl/8$ となり、節点 3-6 間で節点 6 の曲げモーメントは節点 5 がヒンジ接合で曲げモーメントがゼロとなることより、節点 3 の曲げモーメントの 1/2 となることが分かる。節点 6-4 間の曲げモーメントから節点 6 の曲げモーメントが $M_6=V_2l/4-Pl/8$ から求めることもできる。せん断力と軸力はこれまでの方法で容易に求められる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

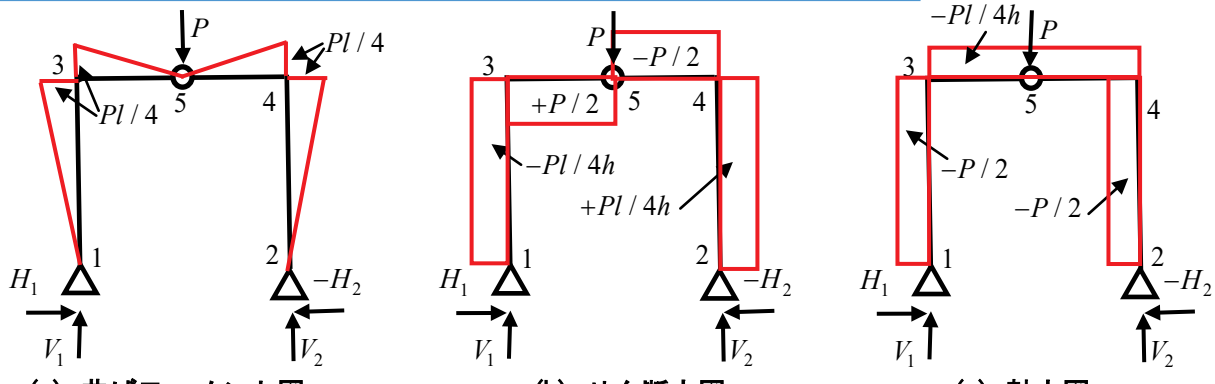
図 27 梁偏鉛直集中荷重を受ける 3 ヒンジ門型ラーメンの断面力図

3) 図 25(c)の梁鉛直集中荷重+3 ヒンジ門型ラーメン　ex38 3

図 25(c)の構造の反力：$H_1=\frac{l}{4h}P;\quad H_2=-\frac{l}{4h}P;\quad V_1=\frac{P}{2};\quad V_2=\frac{P}{2}$

骨組と荷重が対称であることから、断面力図は対称である。節点 1-3 間と 2-4 間の曲げモーメントは、節点 3 と 4 の曲げモーメントが $Pl/4$ であることから求められる。節点 3-5 間及び 4-5 間の曲げモーメントも節点 5 の曲げモーメントがゼロであることから両端の値を用いて直線を引けば良い。せん断力と軸力はこれまでの方法で求められる。

図 28 梁鉛直集中荷重を受ける 3 ヒンジ門型ラーメンの断面力図

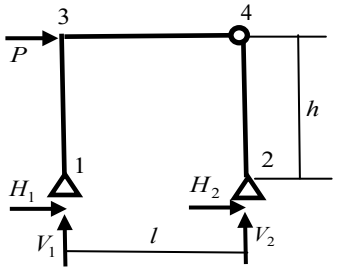


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

基礎３９話 No.6　３ヒンジ山形ラーメン＋各種荷重

付 9 話参照
ex38_4; ex39_1

今回は前回に続いて、基本構造である単純梁の拡張型として 3 ヒンジ門型ラーメンの残りと 3 ヒンジ山形ラーメンの応力解析を行う。まず、図 25(d)に示される構造の断面力図を求める。



(d) 柱頭水平集中荷重

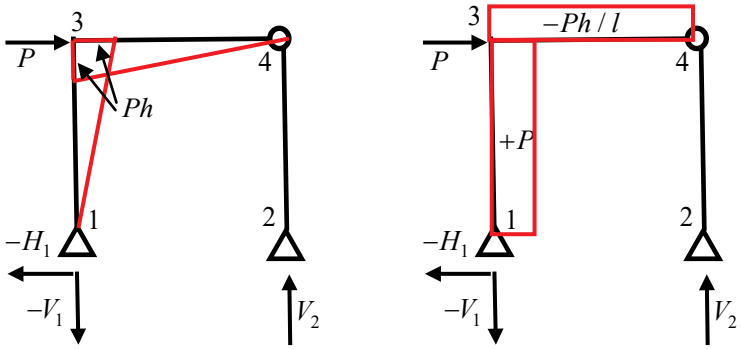
図 25 3 ヒンジ門型ラーメン

4) 図 25(d)の柱頭水平荷重＋3 ヒンジ門型ラーメン　　ex38_4

図 25(d)の構造の反力：　$H_1=-P;\quad H_2=0;\quad V_1=-\dfrac{Ph}{l};\quad V_2=\dfrac{Ph}{l}$

梁の右端と柱がピン接合であると、この門型ラーメンは節点2がローラー支持の基本構造門型ラーメンと同一の断面力分布となる。この骨組の断面力図は既に求めているのでそちらと比較すると良い。節点1-2間の曲げモーメントはピン支持点1の水平反力より簡単に求められる。節点3における曲げモーメントは $M_3=Ph$ となり、節点におけるモーメントの釣合より、梁端部の曲げモーメントも同じである。節点4がピン接合で曲げモーメントはゼロとなるため、梁両端の曲げモーメントが決定し、後は直線で結べば良い。せん断力は、曲げモーメント分布に傾きがある部材に生じるため、節点1-3間と3-4間に、その値は支持点反力との釣合あるいは曲げモーメントの傾きから得られる。

梁の軸力は、節点4における水平方向の力の釣合より、柱にせん断力がないことからゼロであり、柱の軸力は支持点反力との釣合より求められる。特に注目すべきは、門形ラーメンでは水平荷重が加わると、右側の柱は圧縮となり、左側の柱は引張となることである。覚えておこう。

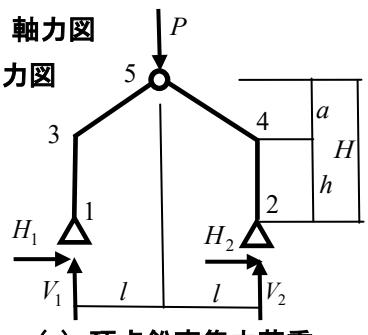


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 29 柱頭水平集中荷重を受ける 3 ヒンジ門型ラーメンの断面力図

V）3 ヒンジ山形ラーメン

続いて、図 30 に示す**3 ヒンジ山形ラーメンの断面力**を求めてみよう。ここでも、既に反力は求められている。以前にお話しした反力の求め方を復習しておこう。3 つの外力と反力の釣合は次式となる。



(a) 頂点鉛直集中荷重

$$x: H_1 + H_2 = 0; \quad y: P - V_1 - V_2 = 0$$
$$M_1: Pl - 2V_2 l = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{P}{2} \rightarrow V_1 = \frac{P}{2}$$

節点 5 を切断し、節点 2 を含む閉曲線内で、節点 5 に関するモーメントの釣合は、節点 5 がピン接合であることを考慮すると、

$$M_5: V_1 l - H_1 H = 0 \rightarrow \quad H_1 = \frac{l}{H} V_1 = \frac{l}{2H} P; \quad H_2 = -\frac{l}{2H} P$$

となり、最終的に次のようになる。

1) 図 30(a)の鉛直荷重＋3 ヒンジ山形ラーメン　　ex39_1

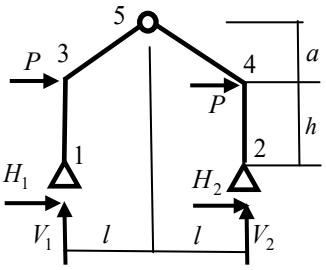
図 30(a)の反力：　$H_1 = \frac{l}{2H} P; \quad H_2 = -\frac{l}{2H} P; \quad V_1 = \frac{P}{2}; \quad V_2 = \frac{P}{2}$

屋根の勾配は $\tan\theta = a / l$ から θ を求めておく。反力の値より、反力の適切な方向を図 32(a)に示す。この骨組は対称構造で対称荷重であるため、断面力図は対称となる。節点 1-3 間及び 2-4 間の曲げモーメント分布は切断法の簡易型により求められる。節点 3 と 4 の曲げモーメント M_3 と M_4 は $H_1 h = Plh / 2H$ となる。節点 3 におけるモーメントの釣合より、梁側の節点 3 の曲げモーメントも同じとなる。節点 3-5 間の曲げモーメント分布は、節点 5 がピン接合であることから、曲げモーメントはゼロであり、後は直線で結べば良い。節点 4-5 間も同様である。

次に柱のせん断力分布は、柱支持点の水平反力との釣合より、$Q_c = H_1 = Pl / 2H$ であり、軸力は支持点反力との釣合より、圧縮で $N_c = P / 2$ となる。断面力は対称であるため、節点 2-4 間の柱も同様である。梁のせん断力は曲げモーメントの傾きより、$Q_b = lhP / 2HL$ となる。ただし L は梁の長さを表す。柱の軸力は、支持点との力の釣合より、求められる。また、梁の軸力は節点 3 における水平方向と軸方向の力の釣合より求められる。ただし、部材が斜めに接合している場合は、どちらかの座標系に断面力を回転し、同じ方向で力の釣合を取る必要がある。力の回転については次回お話しする。図 31(b)を参考にすると、

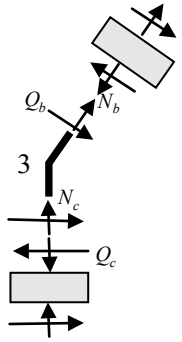
$$Q_b = -Q_c \cos\bar{\theta} + N_c \sin\bar{\theta} = -\frac{lP}{2H}\frac{a}{L} - \frac{P}{2}\frac{l}{L} = \frac{Pl(-a + (h+a))}{2HL} = \frac{lhP}{2HL}$$
$$N_b = -Q_c \sin\bar{\theta} - N_c \cos\bar{\theta} = -\frac{lP}{2H}\frac{l}{L} - \frac{P}{2}\frac{a}{L} = -\frac{P(l^2 + aH)}{2HL} = -\frac{P(L^2 + ah)}{2HL}$$

上記のように求めたせん断力は先に求めたせん断力に一致する。ここで用いた回転角 $\bar{\theta}$ は $\cos\bar{\theta} = a / L; \sin\bar{\theta} = l / L$ である。

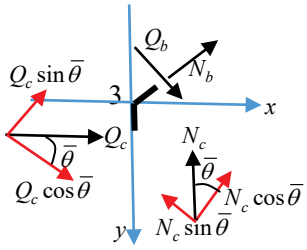


(b) 柱頭水平集中荷重

図 30 3 ヒンジ山形ラーメン



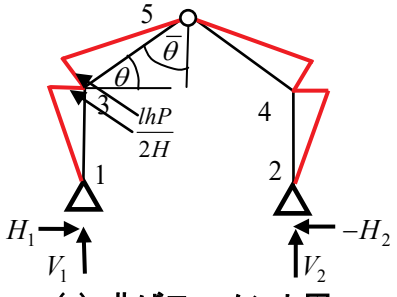
(a) 節点 3 における力の釣合



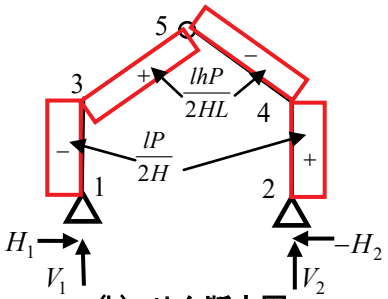
(b) 断面力の回転

図 31 節点 3 における力の釣合

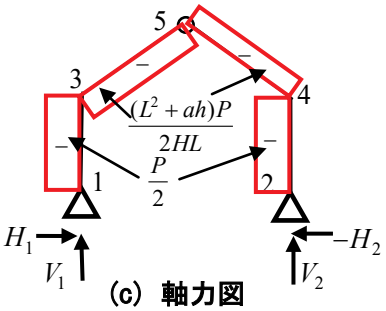
図 32 梁鉛直集中荷重を受ける 3 ヒンジ山形ラーメンの断面力図



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

基礎４０話 No.7　3 ヒンジ山形ラーメンと斜め梁断面力の回転

付 9 話参照
ex39_2

今回は前回の例題の残りと、次回から新たに方杖を有する門型ラーメンの応力解析を行うが、その前に、次の釣合ルールを示す。

R28：水平外力と層せん断力の釣合

骨組の各階の柱頭に水平荷重が加わるとき、各階の柱に生じるせん断力の総和は、切断した柱より上の水平外力の総和に等しい。

各階のせん断力の和は**層せん断力**と呼ばれ、特に最下階を**ベースシヤー**と呼ばれる。構造設計で重要となるので必ず覚えておこう。

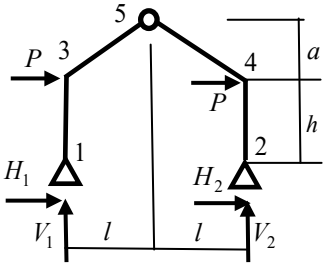
2) 図 30(b)の水平荷重＋3 ヒンジ山型ラーメン　ex39_2

図 30(b)の反力：　$H_1=-P;\quad H_2=-P;\quad V_1=-\dfrac{Ph}{l};\quad V_2=\dfrac{Ph}{l}$

構造は対称で外力が逆対称であることから、断面力分布は逆対称となる。曲げモーメント図は支持点の水平反力から容易に求められる。まず、柱で、節点 3 の曲げモーメントは $M_3=Ph$ となり、節点 3 でのモーメントの釣合より、梁端部の曲げモーメントも同一、他端はピン接合であることからゼロ、後は直線を引けば良い。せん断力は曲げモーメントの傾きより、柱では $Q_c=P$、梁では、$Q_b=Ph/L$ となる。ただし、L は梁の長さを表す。柱の軸力は支持点鉛直反力との力の釣合より、$N_c=Ph/l$ となり、左柱は引張、右柱は圧縮となる。斜め梁の軸力は節点 3 での力の釣合より求めるが、前例と同じく、どちらかの断面力を回転して求める。ここでは、柱の断面力と外力を、梁の断面力方向に回転して方向を合わせる。力の釣合より、図 33 を参考にすると梁の軸力と断面力は次式で与えられる。

$$Q_b=(Q_c-P)\cos\bar{\theta}-N_c\sin\bar{\theta}=-\frac{Ph}{l}\frac{l}{L}=-\frac{Ph}{L}$$

$$N_b=(Q_c-P)\sin\bar{\theta}+N_c\cos\bar{\theta}=\frac{Ph}{l}\frac{a}{L}=\frac{Pha}{lL}$$



(b) 柱頭水平集中荷重

図 30 3 ヒンジ山形ラーメン

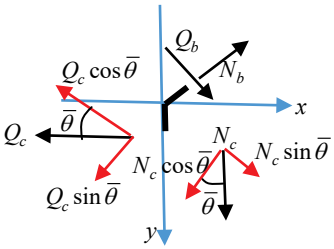
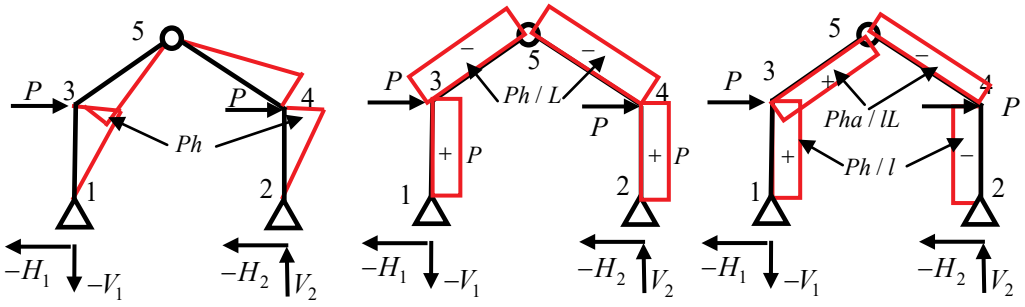


図 33 節点 3 における力の釣合　断面力の回転



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 34 柱頭水平集中荷重を受ける 3 ヒンジ山形ラーメンの断面力図

上記のように求めたせん断力は先に求めたせん断力に一致する。ここで用いた回転角 $\bar{\theta}$ は $\cos\bar{\theta}=a/L;\sin\bar{\theta}=l/L$ である。

梁・柱が直角以外で接合する場合、力の釣合式を得るためには、接合する部材の断面力を全て同一座標系で表さなければならない。そのため、断面力を回転する必要が生じる。ここで、断面力あるいは力の回転手法を、ルールとしてまとめておこう。

R29：断面力の回転

断面力の回転は次式を使う。ただし、座標系と回転角の採り方と方向に注意。 R は回転行列と呼び、直交行列である。

$$N_X = N_x\cos\theta - Q_y\sin\theta \qquad \leftarrow \mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$
$$Q_Y = N_x\sin\theta + Q_y\cos\theta$$

上式を行列表示すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix}N_X\\ Q_Y\end{pmatrix}=\mathbf{R}\begin{pmatrix}N_x\\ Q_y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}N_x\\ Q_y\end{pmatrix}=\mathbf{R}^T\begin{pmatrix}N_X\\ Q_Y\end{pmatrix}$$

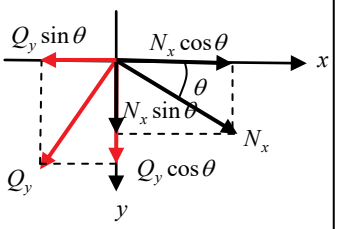


図 35　断面力の回転

図30に示した2つの例題で、梁の断面力を上の回転行列を用いて、外力との釣合を確認してみよう。図36には、先の例題に閉曲線で囲まれた領域が示されており、切断法を適用する。ここでは、切断した断面に外力に釣合う仮想の力を設定し、その力を斜め部材の断面力方向に回転して変換する。まず、図36(a)の骨組における切断面の仮想の力は、外力との釣合より $Q_X=Pl/2H;N_Y=P/2$ であり、さらに、この仮想の力を斜め梁方向に以下のように回転する。

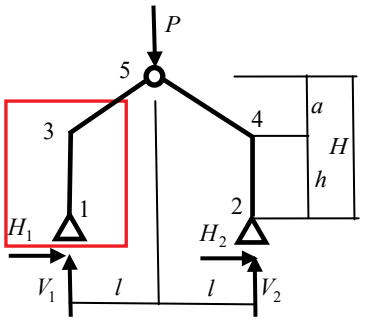
$$\bar{Q}_b = Q_X\cos\theta - N_Y\sin\theta = \frac{Pl}{2H}\frac{a}{L}-\frac{P}{2}\frac{l}{L}=\frac{P(la-al-lh)}{2HL}=-\frac{lhP}{2HL}$$
$$\bar{N}_b = Q_X\sin\theta + N_Y\cos\theta = \frac{Pl}{2H}\frac{l}{L}+\frac{P}{2}\frac{a}{L}=\frac{P(l^2+a^2+ah)}{2HL}=\frac{P(L^2+ah)}{2HL}$$

ここで $\cos\theta=a/L;\sin\theta=l/L$ である。図36(a)を参照すると、斜め部材方向の仮想の力 $\bar{Q}_b,\bar{N}_b$ は、断面力 $-Q_b,N_b$ に釣合うことになる。

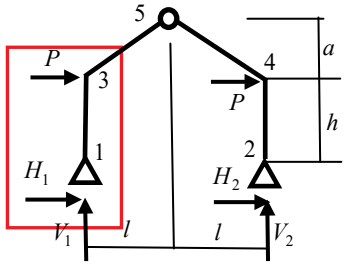
同様に、図36(b)の骨組における切断面の仮想の力は外力との釣合より $Q_X=0;N_Y=Ph/l$ であり、この仮想の力を斜め梁方向に回転すると、

$$\bar{Q}_b = Q_X\cos\theta - N_Y\sin\theta = -\frac{Ph}{l}\frac{l}{L}=-\frac{Ph}{L}$$
$$\bar{N}_b = Q_X\sin\theta + N_Y\cos\theta = \frac{Ph}{l}\frac{a}{L}=\frac{Pha}{lL}$$

となり、図36(b)を参照すると、斜め部材方向の仮想の力 $\bar{Q}_b,\bar{N}_b$ は、断面力 $-Q_b,N_b$ に釣合うことになる。

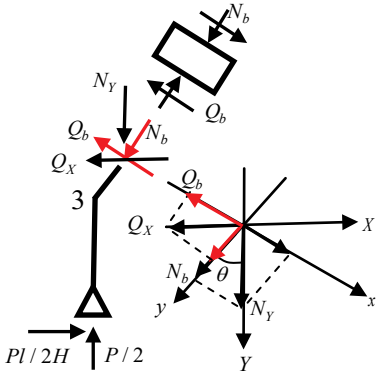


(a) 梁鉛直集中荷重

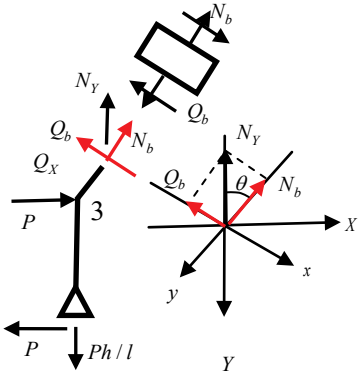


(b) 柱頭水平集中荷重

図 30 3 ヒンジ山形ラーメン



(a) 梁鉛直集中荷重による断面力



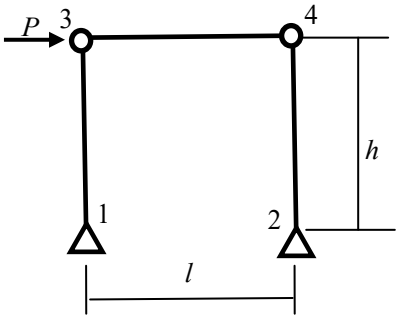
(b) 柱頭水平集中荷重による断面力

図 36 3 ヒンジ山形ラーメンにおける切断法と仮想の力の回転

基礎４１話 No.8 片側方杖を有する門型ラーメン

付 10 話参照
ex41_1; ex41_2

今回は、方杖を有する門型ラーメンの応力解析を行う。図 37(a)のように柱と梁の接合部を全てピン接合とする門型ラーメンは、不安定で静止状態を保てない。このような構造を**不安定構造**と呼ぶ。そこで、同図(b)のように接合部に斜め材を挿入し、補剛する。この補剛材を一般に**方杖**と呼ぶ。今回はこの方杖を有する骨組の応力解析を行う。



(a) 不安定構造

Ⅴ）方杖を有する門型ラーメン

1) 図 37(b)の水平荷重＋片側方杖を有する門型ラーメン　ex41_1

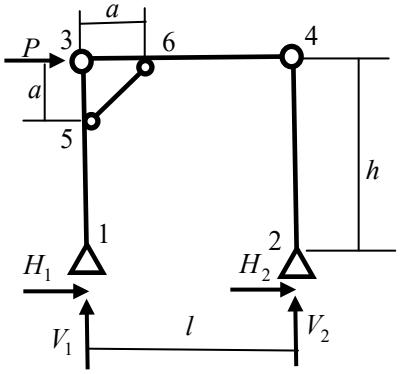
骨組の反力は、力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より

$$x: P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0; \quad Ph - V_2 l = 0$$

となり、また節点 4 がピン接合であることから $H_2 = 0$ となる。

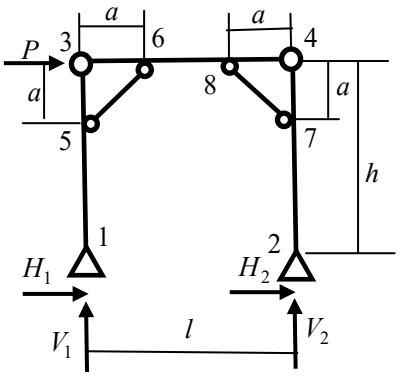
図 37(b)の反力： $H_1 = -P; \quad H_2 = 0; \quad V_1 = -Ph/l; \quad V_2 = Ph/l$

曲げモーメント分布は、切断法の簡易型で行えばそれほど難しくはなく求められる。左柱の曲げモーメントであるが、節点 1 及び節点 3 では曲げモーメントはゼロとなり、支持点水平反力 H_1 を用いれば、節点 5 の曲げモーメントは $M_5 = P(h-a)$ となる。これらを直線で結ぶことで曲げモーメント分布が図 40(a)のように得られる。右柱は、両端がピンで部材荷重が加わっていないので、曲げモーメントは生じない。



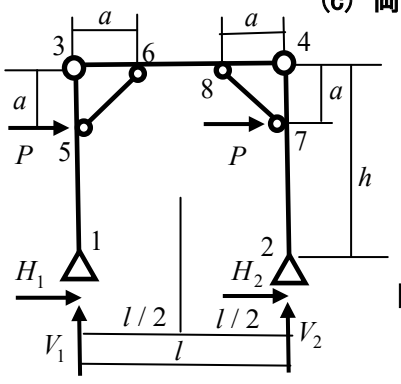
(b) 片側方杖付き骨組

次に梁の曲げモーメントであるが、節点 3 及び 4 では曲げモーメントはゼロとなり、支持点鉛直反力 V_2 より、節点 6 の曲げモーメントは $M_6 = V_2(l-a) = Ph(l-a)/l$ となる。これらを元に、各節点を直線で結べば曲げモーメント分布が得られる。当然、方杖には曲げモーメントは生じない。曲げモーメントの描き方をもう一度復習しておこう。図は断面の引張側に描く。例題のように荷重がない場合、曲げモーメント図は直線となり、始点に加わる力ベクトルの矢印と反対、つまり尻尾の方向に向かって描く。このルールを用いることで、その部材断面の引張側に描くことになる。



(c) 両側方杖付き骨組

節点 1-5 間及び 4-6 間のせん断力は、支持点反力 H_1 及び V_2 との力の釣合より、P と Ph/l となる。残りの節点 5-3 間と 6-3 間のせん断力は曲げモーメントの傾きから求めると、各々 $P(h-a)/a$ と $Ph(l-a)/la$ となる。右柱及び方杖にはせん断力は生じない。軸力は少し難しいが、分かる箇所から求めてゆくのが良い。まず、節点 1-5 間と右



(d) 両側方杖付き骨組＋柱中間荷重

図 37 方杖を有する骨組モデル

柱は支持点反力との釣合より Ph/l となり、左が引張、右が圧縮となる。梁では節点 4 での力の釣合より、柱にせん断力がないので節点 4-6 間の軸力はゼロとなる。節点 3 での力の釣合を用いると、鉛直方向では図 38(a)より、柱の軸力は $Ph(l-a)/la$ で圧縮となり、水平方向では同図(b)より、梁の軸力は $P+P(h-a)/a=Ph/a$ で圧縮となる。

方杖の軸力は、切断法で求めることができる。柱頭部直下で切断し、図 39 のように閉曲線で囲われた領域で、水平方向の力の釣合を取ると下式が得られる。ただし方杖の軸力 N_B は引張を仮定する。

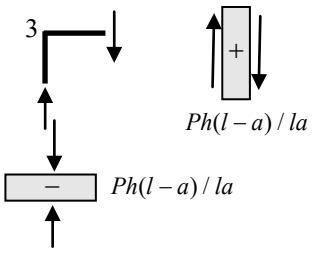
$$P+P(h-a)/a-N_B\cos\theta=0\rightarrow N_B=Ph/a\cos\theta$$

N_B は正として求められ、仮定が正しいので方杖の軸力は引張となる。閉曲線内の上下方向の釣合が成立するか否かを確認しよう。両柱の軸力と方杖軸力の上下方向成分による釣合は、次式となる。ただし、$\theta=45$ 度であることから、$\sin\theta=\cos\theta=1/\sqrt{2}$ である。

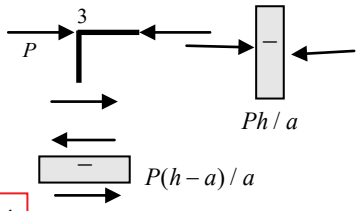
$$-Ph(l-a)/la-Ph/l+N_B\sin\theta\rightarrow$$

$$Ph\left(\frac{-(l-a)-a}{la}+\frac{\sin\theta}{a\cos\theta}\right)\rightarrow 0$$

上記のように、上下方向でも力の釣合が得られていることが分かる。



(a) 鉛直方向の力の釣合



(b) 水平方向の力の釣合

図 38 節点 3 での断面力と外力の釣合

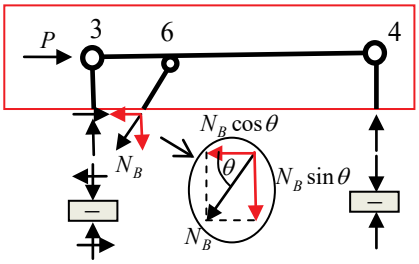
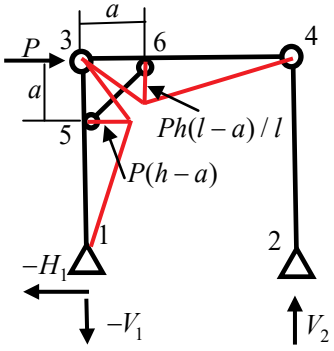
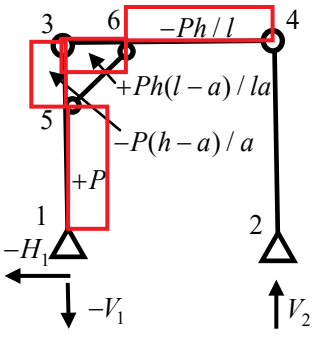


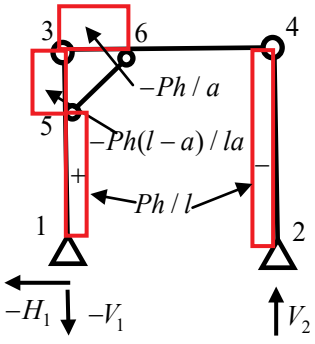
図 39 片側方杖を有する門型ラーメンの断面力図



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 40 片側方杖を有する門型ラーメンの断面力図

2) 図 37(c)の柱頭水平荷重＋両側方杖を有する門型ラーメン　ex41_2

図 37(c)の骨組における両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合は次式となる。

$$x:P+H_1+H_2=0;\quad y:-V_1-V_2=0;\quad Ph-V_2l=0$$

骨組が対称で外力が逆対称であることから $H_1=H_2$ となる。従って、各支持点の反力は以下のようになる。

図 37(c)の反力：　$H_1=-P/2;\quad H_2=-P/2;\quad V_1=-Ph/l;\quad V_2=Ph/l$

ここでも、曲げモーメント分布は切断法の簡易型で行えば、それほど難しくなく求められる。以下の解析は次回とする。

基礎４２話 No.9 両側方杖を有する門型ラーメン

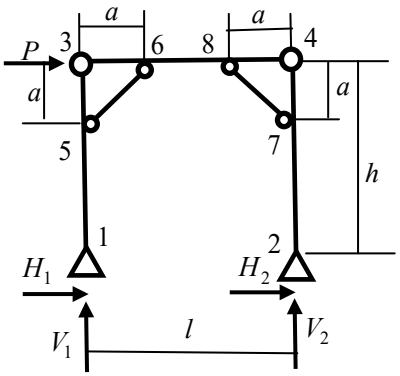
付 10 話参照
ex41_2; ex41_3

今回は、両接合部に方杖を有する門型ラーメンの応力解析を行う。

2) 図 37(c)の柱頭水平荷重＋両側方杖を有する門型ラーメン — ex41_2

図 37(c)の反力： $H_1=-P/2;\quad H_2=-P/2;\quad V_1=-Ph/l;\quad V_2=Ph/l$

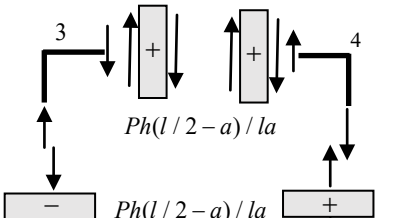
このモデルは対称形状に逆対称荷重が加わっており、逆対称応力状態となる。そのため、曲げモーメント分布では、梁の中央で曲げモーメントがゼロとなる。柱の曲げモーメントは、前例題と同じ手法、簡易切断法で求められる。節点 5 と 7 の曲げモーメントは、支持点反力 H_1,H_2 との力の釣合より、$P(h-a)/2$ となる。梁の曲げモーメントは梁中央でゼロであり、その傾きが支持点反力とせん断力との釣合を考慮すると、節点 6, 8 の曲げモーメントは $M_6=-M_8=Ph(l/2-a)/l$ となる。後は求めた各点での値を直線で結べば良い。せん断力分布も同様に前例題と同じ手法で求めることができる。結果は、図 44 に示される。



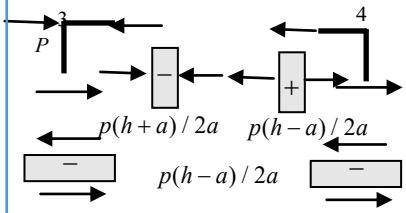
(c) 両側方杖付き骨組

図 37 方杖を有する骨組の応力解析

軸力も同様で、分かる箇所から求めてゆく。節点 1-5 間及び 2-7 間では支持点反力との釣合より Ph/l となり、左柱が引張、右柱が圧縮となる。節点 5-3 間と 7-4 間は、節点 3 及び 4 での力の釣合より、梁のせん断力から求められる。例えば、鉛直方向では図 41(a)より、左柱の軸力は $Ph(l/2-a)/la$ で圧縮、同様に右柱の軸力も同じ値で、引張となる。梁の軸力は、水平方向では同図(b)の節点 4 より $P(h-a)/2a$ で圧縮、同じく節点 3 より $P+P(h-a)/2a=P(h+a)/2a$ で圧縮となる。節点 6-8 間の軸力は、その間で梁を切断し、節点 2 を含む閉曲線での水平方向釣合より $P/2$ の圧縮となる。



(a)鉛直方向の釣合



(b)水平方向の力の釣合

図 41 節点 3 での断面力と外力の釣合

ここでは方杖の軸力を前例と異なる方法で求めてみよう。図 42 のように両柱を各々含む閉曲線で囲み、節点 1 でのモーメントの釣合を考える。節点 3 及び 4 に繋がる梁の軸力やせん断力と、外力はモーメントがゼロとなることを考慮する。左の柱に取り付く方杖の軸力は、次式より、

$$h\cdot P/2-a\cdot N_{BL}\cos\theta=0\rightarrow N_{BL}=Ph/(2a\cos\theta)$$

となり引張応力に、同様に右側の N_{BR} では、同じ値で圧縮応力となる。図 43 を用いて、層せん断力と上下方向の釣合を確認する。水平方向は次式で、釣合が確認され、

$$P+\frac{2P(h-a)}{2a}-\frac{2Ph}{2a\cos\theta}\cos\theta\rightarrow 0$$

また、上下方向は左右の柱の軸力と方杖の上下方向成分で釣合は自明である。

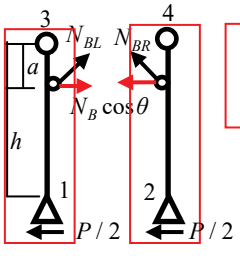
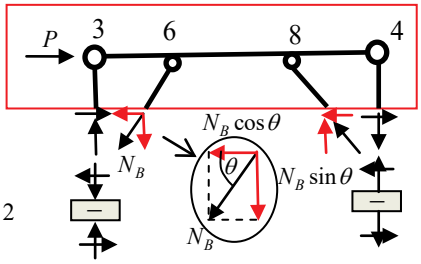
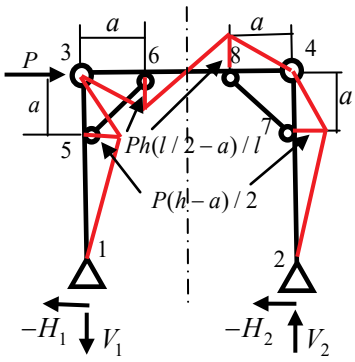


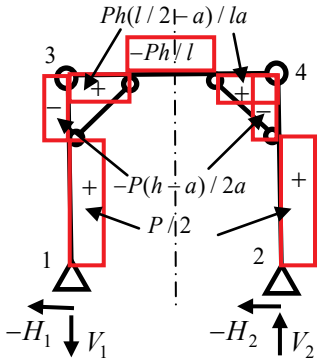
図 42 切断法による方杖の軸力を求める



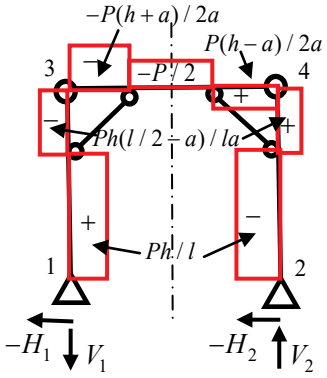
43 両側方杖を有する門型ラーメンの断面力図



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 44 両側方杖を有する門型ラーメンの断面力図

節点 6 と 8 での力の釣合から、梁のせん断力分布と軸力分布を考えてみよう。　**節点 6 での釣合**　　**節点 8 での釣合**

$x: P(h+a)/2a - P/2 - Ph/2a \to 0; \quad P/2 - Ph/2a + P(h-a)/2a \to 0$

$y: Ph(l/2-a)/la + Ph/l - Ph/2a \to 0; \quad Ph/l + Ph(l/2-a)/la - Ph/2a \to 0$

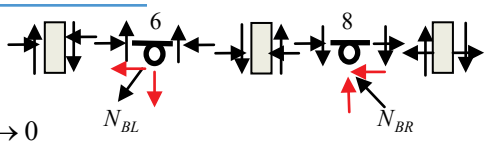


図 45 梁での力の釣合

3) 図 37(d) の柱の中間水平荷重＋両側方杖を有する門型ラーメン　ex41_3

図 37(d) の骨組における両方向の力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合は次式となる。

$$x: 2P + H_1 + H_2 = 0; \quad y: -V_1 - V_2 = 0; \quad M_1 = 2P(h-a) - V_2 l = 0$$

骨組が対称で外力が逆対称であることから逆対称応力状態となる。従って $H_1 = H_2$ となる。各支持点の反力は以下のようになる。

図 37(d) の反力：$H_1 = -P; \quad H_2 = -P; \quad V_1 = -2P(h-a)/l; \quad V_2 = 2P(h-a)/l$

梁・柱の曲げモーメント図、せん断力図、軸力図は反力から容易に求めることができる。宿題とするのでやってみよう。ここでは、方杖の軸力を前例に倣って、柱の囲む閉曲線内の節点 3 及び 6 におけるモーメントの釣合より求める。先例と同様に、左柱が引張、右柱が圧縮となる。

左方杖：$hP - aP - aN_{BL}\cos\theta = 0 \to N_{BL} = P(h-a)/a\cos\theta$

右方杖：$hP - aP + aN_{BR}\cos\theta = 0 \to N_{BR} = -P(h-a)/a\cos\theta$

後は、水平、上下方向の釣合を確認されたい。

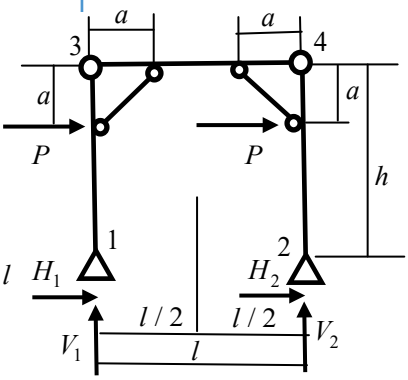


図 37(d) 両側方杖を有する骨組の応力解析その 2

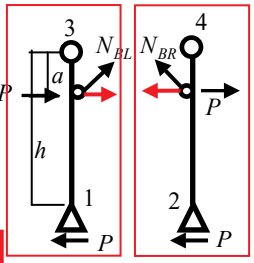
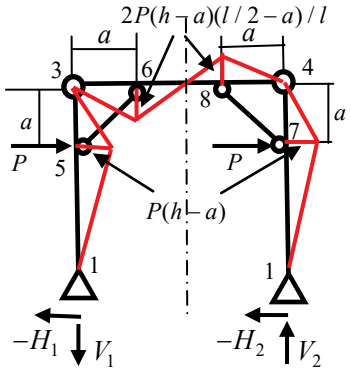
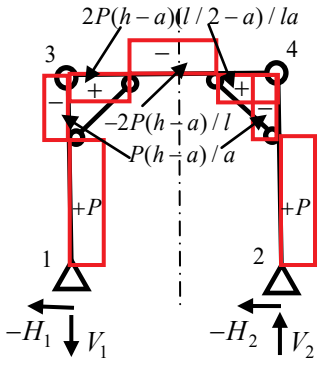


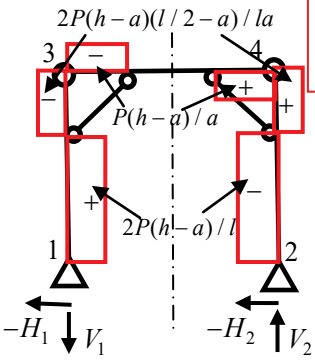
図 46 切断法による方杖の軸力を求める



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 47 両側方杖を有する門型ラーメンの断面力図その 2

基礎４３話 No.1　三角形基本トラス 節点法と切断法

付 11 話参照
ex43_1

今回からトラス構造の応力解析を行う。静的トラスの応力解析手法である**節点法と切断法**について学び、トラスの応力状態を学習する。トラス構造とは、2 本以上の直線部材が互いにピン接合され、形状として基本的に三角形を構成する構造である。トラスは軸力のみで力を伝え、部材に曲げモーメントやせん断力を生じない。静定トラスとは、梁あるいは骨組と同様に、力の釣合条件から支持点反力及び部材軸力が求められる構造をいう。トラスの応力解析では次のような仮定を設ける。

１：節点では理想的なピン状態で、部材が接合されている。
２：各部材は直線材である。
３：節点を結ぶ直線は図芯軸と一致する。
４：外力は全て節点に作用する。
５：トラスの変形は微小であり、力の釣合は変形前の形状で考える。

節点法と切断法は理論的にはそれほど大きな違いはない。断面を切断する閉曲線で囲い、その中の荷重や反力及び切断面に加わる仮想の力との力の釣合から、未定の部材軸力を求める。節点法では、閉曲線は 1 つの節点を囲うため質点系の力の釣合となり、平面上の両方向について 2 つの釣合が得られる。切断法は、これまで学んできた骨組の切断法と同様で、任意の位置で部材を切断し、骨組の一部を閉曲線で囲む。力の釣合は剛体における釣合となり、3 つの釣合式が得られる。ただし、その使用法は以下のルールのように大きく異なる。

R30：節点法と切断法の使用法

1:節点法

全部材の軸力を求める場合に良く使用される。求められる部材から、順次、軸力を求めていく。一般には、支持点や荷重点あるいは、接合部材が 2 つの節点から始めるのが良い。

2:切断法

任意部材の軸力を求める場合に使用される。モーメントの釣合を適切に使用することで、必要とする部材の軸力が容易に求められる。

最初に、トラスの応力解析手法の一つである節点法を学ぶ。図 1 に示すトラス基本構造の応力解析を行い、節点法を理解すると共に基本構造の応力状態を把握する。静定構造の応力解析は、部材の断面性能に影響されないことに注意されたい。

節点法の基本的な考え方は、図 2 に示すように当該節点に加わる外力と反力、及び切断した部材の仮想の力との力の釣合から、未知の部材軸力を求める方法である。この仮想の力は部材軸力に等しい。その際、同図のように引張方向に各部材の仮想の力を仮定すると良い。計算した結果が正の場合、仮定が正しかったことを意味するが、引張を正とすることからそのまま得られた符号を、軸力の正負としても良いことになる。全節点で力の釣合は得られるが、解析の都合上、未知の部材軸力が少ないところから求めていくと便利である。次の例題で節点法を理解しよう。

図中の数字はトラスの節点番号を示し、アルファベットは部材番号を示す。
図 2 の仮想の力は、その部材の軸力に等しく、以後、仮想の力を軸力と表現する。

1）基本トラスの応力解析　節点法　　ex43_1

まず、トラスの反力を求める。外力と反力との力の釣合、及び節点 1 に関するモーメントの釣合より、

$$\sum X=0: H_1+100=0;\quad \sum Y=0: -V_1-V_2=0$$
$$\sum M_1=0: 100\cdot 2-V_2\cdot 2=0$$

となり、従って、反力は、

$$H_1=-100kN;\quad V_1=-100kN;\quad V_2=100kN$$

として得られる。

次に、節点法を用いて各部材の軸力を求める。まず、節点 2 での X 方向と Y 方向の力の釣合より、部材軸力 N_A と N_C を求める。

$$\sum X=0: -N_A=0 \qquad \sum Y=0: -N_C-100=0$$
$$\rightarrow \begin{cases} N_A=0 \\ N_C=-100kN \end{cases}$$

同じく、節点 3 での力の釣合より、軸力 N_B を求める。ただし、図 2 から分かるように、$\cos\theta=\sin\theta=1/\sqrt{2}$ である。

$$\sum X=0: 100-N_B\cos 45°=0 \qquad \sum Y=0: N_B\sin 45°+N_C=0$$
$$\rightarrow N_B=100\sqrt{2}kN$$

以上で全ての部材の軸力は求まったが、確認のため節点 1 における力の釣合を検証してみよう。

$$\sum X=0: -100+N_A+N_B\cos\theta=-100+100\sqrt{2}/\sqrt{2}\rightarrow 0$$
$$\sum Y=0: -N_B\sin\theta+100=-100\sqrt{2}/\sqrt{2}+100\rightarrow 0$$

確かに両方向で力の釣合が得られている。

節点法により、基本トラスの部材軸力が以下のように求められた。

$$N_A=0;\quad N_B=100\sqrt{2}kN;\quad N_C=-100kN$$

上記のように、符号付で部材の軸力が得られた。図 2 のように各部材で引張を正として軸力を仮定した。解析結果が正であれば引張、負であれば圧縮となる。従って、B 部材の軸力は引張、C 部材は圧縮となる。

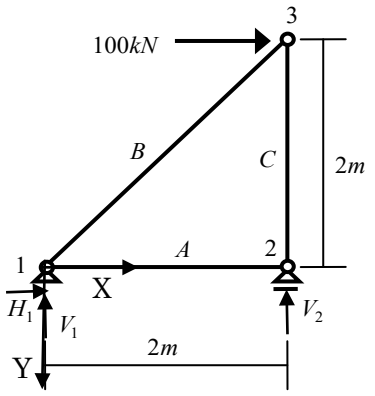


図 1 トラスの基本構造

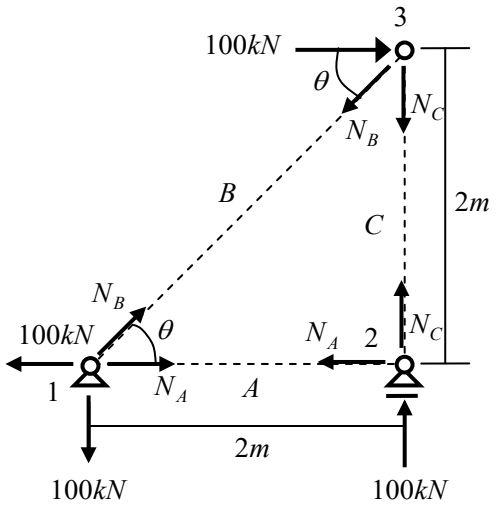
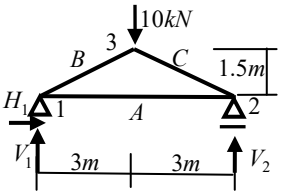


図 2 節点法における断面力の仮定

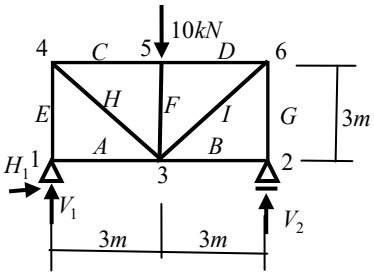
基礎４４話 No.2　基本形の山形・単純梁型・片持ち梁型トラス

付 11 話参照
ex43_2 ~ ex43_4

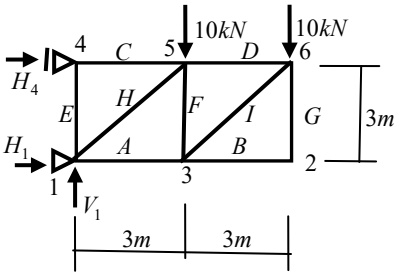
今回もトラス基本構造の応力解析を行う。トラスの基本構造として次の 3 種、山型、単純梁型、片持ち梁型がある。



(a) 山型トラス



(b) 単純梁型トラス



(c) 片持ち梁型トラス

図 3 トラス基本構造の応力解析

2) 3 種のトラス基本構造の反力

ここでは、基本構造の反力を求める。図 3(a)の山型トラスの外力と反力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より、釣合式は

$$\sum X=0:H_1=0;\quad \sum Y=0:10-V_1-V_2=0;\quad \sum M_1=0:10\cdot 3-V_2\cdot 6=0$$

となり、従って、反力は次のようになる。

$$H_1=0;\quad V_1=5kN;\quad V_2=5kN$$

次に、図 3(b)の単純梁型トラスの外力と反力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より、次式が

$$\sum X=0:H_1=0;\quad \sum Y=0:10-V_1-V_2=0;\quad \sum M_1=0:10\cdot 3-V_2\cdot 6=0$$

得られ、従って、反力は次のようになる。

$$H_1=0;\quad V_1=5kN;\quad V_2=5kN$$

最後に、片持ち梁型トラスの外力と反力との力の釣合及び節点 1 に関するモーメントの釣合より、

$$\sum X=0:H_1+H_2=0;\quad \sum Y=0:20-V_1=0;$$
$$\sum M_1=0:10\cdot 3+10\cdot 6+H_4\cdot 3=0\rightarrow H_4=-90/3=-30$$

となり、反力は次のようになる。

$$H_1=30kN;\quad H_4=-30kN;\quad V_1=20kN$$

これで、全モデルの反力を求めた。これから応力解析を行う。

3) 山型トラスの応力解析　節点法

ex43_2

図 3(a)のトラスの反力： $H_1=0;\quad V_1=5kN;\quad V_2=5kN$

図 4 のように一つの節点を囲うように切断し、全節点で仮想の力、つまり軸力を仮定する。節点法では、部材軸力を求める順序が重要となり、未知軸力が少ない節点から選択する。まず、節点 1 に節点法を適用し、両方向の釣合式を得る。

$$\sum X=0:N_A+N_B\cos\theta=0;\quad \sum Y=0:-N_B\sin\theta-5=0$$

図 3(a)より、$\cos\theta=2/\sqrt{5};\sin\theta=1/\sqrt{5}$ であり、従って、軸力 N_A 及び N_B は次式となる。

$$N_B=-5\sqrt{5};\quad N_A=5\sqrt{5}\cdot 2/\sqrt{5}=10$$

上記のように部材軸力 N_A は引張、N_B は圧縮となる。

次に、節点 3 に節点法を適用すると、

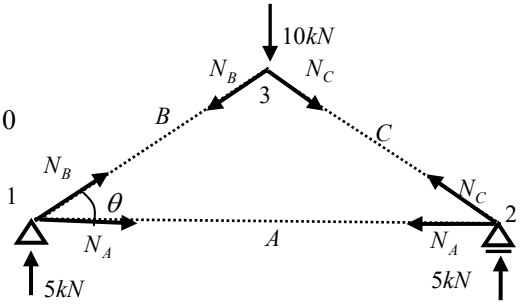


図 4 山型トラスの応力解析
節点法における断面力の仮定

$$\sum X=0:-N_B\cos\theta+N_C\cos\theta=0\rightarrow N_C=N_B$$
$$\sum Y=0:10+N_B\sin\theta+N_C\sin\theta=0\rightarrow N_B=-10\sqrt{5}/2=-5\sqrt{5}$$

となり、部材 B と C の軸力が得られる。節点 2 では、節点法で以下のように力の釣合が取れていることを確認する。

$$\sum X=0:N_C\cos\theta+N_A\rightarrow-5\sqrt{5}\cdot2/\sqrt{5}+10\rightarrow0$$
$$\sum Y=0:-5-N_C\sin\theta\rightarrow-5+5\sqrt{5}/\sqrt{5}\rightarrow0$$

4）単純梁型トラスの応力解析　切断法　ex43_3

単純梁＋中央集中荷重の曲げモーメント分布とせん断力分布を思い出して欲しい。梁は対称応力状態となり、上端は圧縮、下端は引張応力となる。せん断力はトラス斜材の軸力に対応する。

図 3(b)のトラスの反力：　$H_1=0;\quad V_1=5kN;\quad V_2=5kN$

ここでは、切断法を用いて部材の軸力を求める。閉曲線による切断した仮想の力を図 5 のように仮定する。節点法と同様に、閉曲線から外向きに軸力を仮定すると、引張を仮定したことになる。計算結果が正の値であれば引張、負であれは圧縮となる。切断法では、3 つの釣合式が得られるが、その方法は適切に選択すれば良い。ここでは、2 つのモーメントの釣合と上下方向の力の釣合を用いる。まず、節点 6 におけるモーメントの釣合で、N_D と N_I はモーメントがゼロとなるため、次式が得られる。

$$M_6=0:5\cdot6-10\cdot3-N_B\cdot3=0\rightarrow N_B=0$$

次に、節点 3 のモーメントの釣合では、

$$M_3=0:5\cdot3+N_D\cdot3=0\rightarrow N_D=-5$$

となり、最後に上下方向の力の釣合より、N_I が得られる。

$$\sum Y=0:10-5-N_I\sin\theta=0\rightarrow N_I=5\sqrt{2}$$

さらに、節点 5 及び 2 で節点法を用いると、$N_F=-10$ と $N_G=-5$　が得られる。

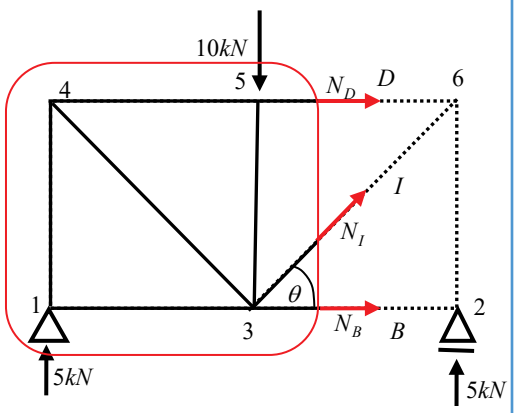


図 5 単純梁型トラスの応力解析
切断法における断面力の仮定

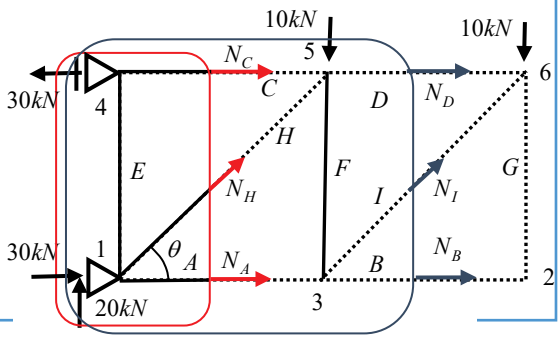


図 6 片持ち梁型トラスの応力解析
切断法における断面力の仮定

図 3(c)のトラスの反力：
$H_1=30kN;\quad H_4=-30kN;\quad V_1=20kN$

5）片持ち梁型トラスの応力解析　切断法　ex43_4

赤色の閉曲線における切断法より、節点 5 と節点 1 でのモーメント釣合より、次式を得る。

$$M_5=0:-30\cdot3+20\cdot3-N_A\cdot3=0\rightarrow N_A=-10$$
$$M_1=0:-30\cdot3+N_C\cdot3=0\rightarrow N_C=30$$

上下方向の釣合より、$N_H=-20/\sin\theta=-20\sqrt{2}$ が得られる。

次に青色の閉曲線で、節点 6 と節点 3 でのモーメントの釣合及び上下の力の釣合より

$$M_6=0:-10\cdot3-30\cdot3+20\cdot6-N_B\cdot3=0\rightarrow N_B=0\quad M_3=0:-30\cdot3+20\cdot3+N_D\cdot3=0\rightarrow N_D=10$$
$$\sum Y=0:10-20-N_I\sin\theta=0\rightarrow N_I=-10\sqrt{2}$$

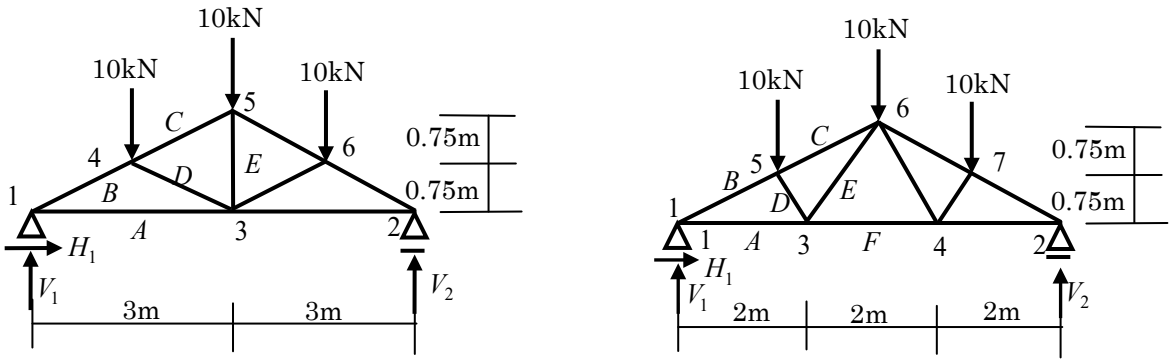
節点 4、2、3 で、節点法により $N_E=0$ と $N_G=N_B=0$ 及び $N_F=-N_I\cos\theta=10$ が得られる。

基礎４５話 No.1　山型トラスその１

付 12 話参照
ex45_1; ex45_2

今回から数回に渡って、トラス構造の応力解析を行う。既に、トラスの基本構造を用いて、節点法と切断法の使用法と基本構造の応力状態を学んだ。それらを元に、少し複雑な静定トラスの応力解析を行い、その軸力分布を学ぶことにする。ここではまず、山型トラスの応力解析を行い、その特性を理解する。

例として、図 1 に示す 2 種のトラスの応力解析を行う。両者共に対称形状・対称荷重であり、対称応力状態となる。そのため、ここでは左半分の部材軸力を節点法により求める。



(a) 山型トラス１　　(b) 山型トラス２

図 1 山形トラスの解析モデル

まず、両モデルの反力を求める。対称構造で対称荷重、しかも水平荷重がないため、両者の水平反力はゼロとなり、鉛直反力は全荷重の半分を負担する。

$$H_1 = 0; \quad V_1 = V_2 = 15kN$$

1）山型トラス 1 の応力解析　　ex45_1

図 1(a)のトラス構造の形状から、$\cos\theta = 2/\sqrt{5}; \sin\theta = 1/\sqrt{5}$ であることを確認する。節点法を適用するために、図 2 に示されるように、各節点を囲む閉曲線で部材を切断し、切断面から外向きに仮想の力を仮定するとその値は軸力に等しい。

図 2 の節点 1 における両方向の力の釣合は、次式で表される。

$$\sum X = 0 : N_B \cos\theta + N_A = 0$$
$$\sum Y = 0 : -15 - N_B \sin\theta = 0$$

上式より、

$$N_B = -15/\sin\theta = -15\sqrt{5}$$
$$N_A = 15\sqrt{5}\cos\theta = 30$$

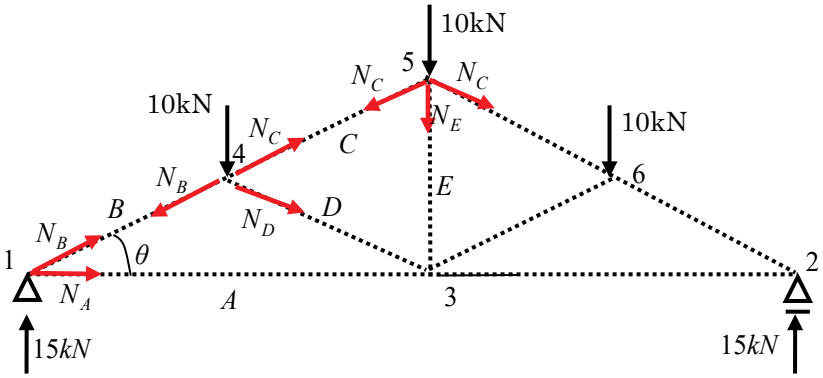


図 2 山型トラス 1 の節点法における断面力の仮定

軸力 N_A と N_B が求められる。

次に、節点 4 における両方向の力の釣合を求める。この節点では、部材が 3 つ結合しているが、既に B 部材の軸力が得られており、未知軸力部材は 2 つで、2 つの釣合方程式より軸力が求められる。

$$\sum X=0:-N_B\cos\theta+N_C\cos\theta+N_D\cos\theta=0\rightarrow 15\sqrt{5}+N_C+N_D=0$$

$$\sum Y=0:10+N_B\sin\theta-N_C\sin\theta+N_D\sin\theta=0\rightarrow 10\sqrt{5}-15\sqrt{5}-N_C+N_D=0$$

上式の両者を足し・引きすると、2 つの部材の軸力が

$$N_D=-5\sqrt{5};\quad N_C=-10\sqrt{5}$$

として得られる。次に節点 5 での上下方向の力の釣合より、N_B が、

$$\sum Y=0:10+2N_C\sin\theta+N_E=0\rightarrow 10-2\cdot 10\sqrt{5}/\sqrt{5}+N_E=0\rightarrow$$

$$10-20+N_E=0\rightarrow N_E=10$$

となる。以上で全ての部材の軸力が求まり、これらを表 1 にまとめる。

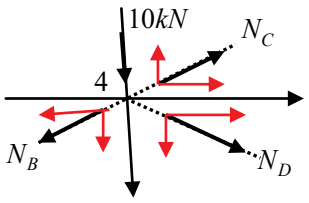


図 3 節点 4 での力の釣合

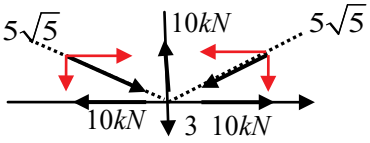


図 4 節点 3 での力の釣合を検証する

最後に、節点 3 での力の釣合を確認してみよう。図 4 に求めた部材の軸力が示されており、確かに両方向とも力の釣合が取れている。

$$\sum X=0:-10+5\sqrt{5}\cos\theta+10-5\sqrt{5}\cos\theta\rightarrow 0$$

$$\sum Y=0:-10+2\cdot 5\sqrt{5}/\sqrt{5}\rightarrow 0$$

表 1 山形トラス 1 の軸力

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_A	$30kN$	N_B	$-15\sqrt{5}kN$	N_C	$-10\sqrt{5}kN$
N_D	$-5\sqrt{5}kN$	N_E	$10kN$		

2）山型トラス 2 の応力解析　　ex45_2

まずトラスの形状について分析する。各部材の角度は図 5 に示す通りであり、$\cos\theta_1=2/\sqrt{5};\sin\theta_1=1/\sqrt{5}$、$\cos\theta_2=2/\sqrt{13};\sin\theta_2=3/\sqrt{13}$ となる。対称形状で対称荷重であることから、鉛直反力は全荷重の半分を負担する。

$$H_1=0;\quad V_1=V_2=15kN$$

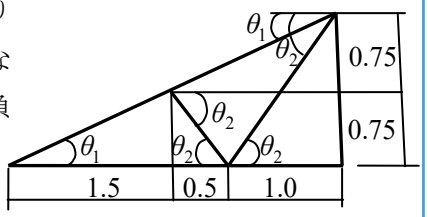


図 5 山型トラス 2 の形状

節点法を適用するために、図 6 のように節点を囲む閉曲線で部材を切断し、切断面から外向きの仮想軸力を仮定する。節点 1 における両方向の力の釣合は、次式で表される。

$$\sum X=0:N_B\cos\theta_1+N_A=0$$

$$\sum Y=0:-15-N_B\sin\theta_1=0$$

上式より、軸力 N_A と N_B が求められる。

$$N_A=15\sqrt{5}\cos\theta_1=30$$

$$N_B=-15/\sin\theta_1=-15\sqrt{5}$$

以後の解析は次回お話しする。

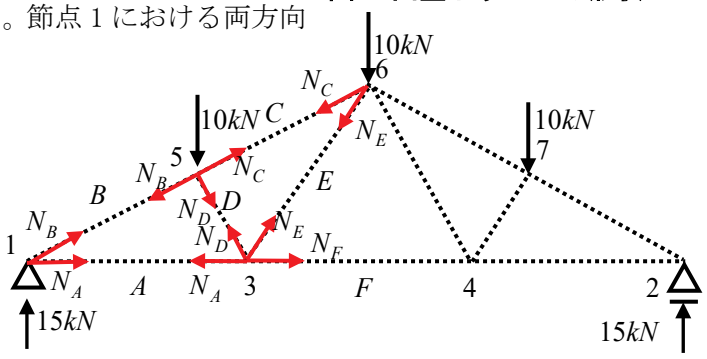


図 6 山型トラス 2 の節点法における断面力の仮定

基礎４６話 No.2　山型トラスその２

付 12 話参照
ex45_2

2）山型トラス 2 の応力解析　　ex45_2

前回に続いてモデル(b)の山型トラス 2 の応力解析を行う。各部材の角度は、$\cos\theta_1 = 2/\sqrt{5}; \sin\theta_1 = 1/\sqrt{5}$ 、$\cos\theta_2 = 2/\sqrt{13}; \sin\theta_2 = 3/\sqrt{13}$ （図 5 参照)。節点法を適用するために図 6 に示されるように各節点を囲む閉曲線で部材を切断し、切断面から仮想の力、つまり軸力を仮定する。

節点 1 における軸力は既に求められ、以下のようである。

$$N_B = -15/\sin\theta_1 = -15\sqrt{5}; \quad N_A = 15\sqrt{5}\cos\theta_1 = 30$$

続いて節点 5 での釣合を考える。ここでは、部材が 3 つ結合しているが、B 部材の軸力は既に求められている。節点 5 における両方向の釣合は次式で与えられる。

$$\sum X = 0 : -N_B\cos\theta_1 + N_C\cos\theta_1 + N_D\cos\theta_2 = 0$$
$$\sum Y = 0 : 10 + N_B\sin\theta_1 - N_C\sin\theta_1 + N_D\sin\theta_2 = 0$$

上式に部材の角度と軸力 N_B の値を代入すると釣合式は次式となる。

$$15\sqrt{5}\cdot 2/\sqrt{5} + N_C 2/\sqrt{5} + N_D 2/\sqrt{13} = 0$$
$$15\sqrt{5}\cdot 1/\sqrt{5} + N_C\cdot 1/\sqrt{5} - N_D\cdot 3/\sqrt{13} = 10$$

さらに整理すると、

$$N_C/\sqrt{5} + N_D/\sqrt{13} = -15$$
$$N_C/\sqrt{5} - N_D 3/\sqrt{13} = -5$$

上の両式から、2 つの軸力が次のように得られる。

$$4N_C = -50\sqrt{5} \rightarrow N_C = -12.5\sqrt{5}$$
$$4N_D = -10\sqrt{13} \rightarrow N_D = -2.5\sqrt{13}$$

次に、節点 6 での釣合を考える。ここでは部材応力が対称であることから、次の鉛直方向の釣合が成立する。

$$\sum Y = 0 : 10 + 2N_C\sin\theta_1 + 2N_E\sin\theta_2 = 0 \rightarrow N_C/\sqrt{5} + 3N_E/\sqrt{13} = -5$$

さらに、上式を整理し、軸力 N_C の値を代入すると、

$$-12.5\sqrt{5}/\sqrt{5} + 3N_E/\sqrt{13} = -5 \rightarrow 3N_E/\sqrt{13} = 7.5 \rightarrow N_E = 7.5\sqrt{13}/3$$

最後に、節点 3 での水平方向の釣合を考え、軸力 N_F を求める。

$$\sum X = 0 : -N_A - N_D\cos\theta_2 + N_E\cos\theta_2 + N_F = 0 \rightarrow$$
$$N_F = 30 - (2.5\sqrt{13} + 7.5\sqrt{13}/3)\cdot 2/\sqrt{13} = 30 - (5 + 15/3) = 30 - 30/3 = 20$$

同じモデルを切断法により解いてみよう。切断法を用いると、容易に軸力が求められる。例えば、図 7 ように閉曲線を考え、外力と反力及び切断する部材の軸力の釣合を考える。まず、節点 3 を中心とするモーメントの釣合は、軸力 N_E と N_F によるモーメントがゼロであることを考

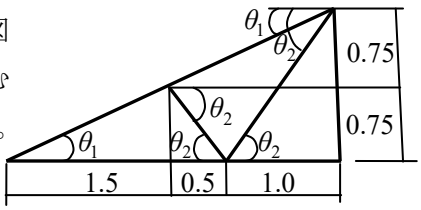


図 5 山型トラス 2 の形状

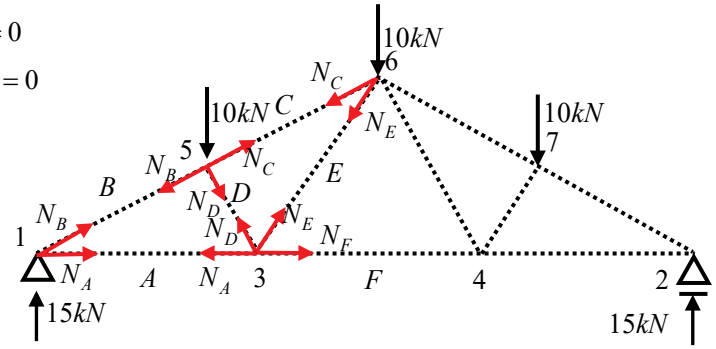


図 6 山型トラス 2 の節点法における断面力の仮定

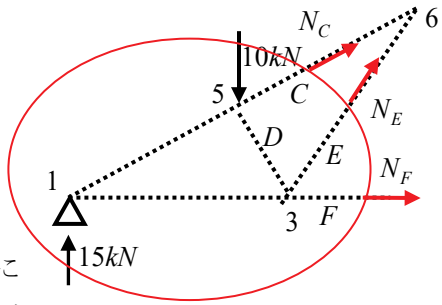


図 7 節点 1, 3, 5 を含む閉曲線内の力の釣合

慮し、軸力 N_C を両方向に分解してモーメントを計算すると、

$$M_3 = 0 : N_C \cos\theta_1 \cdot 0.75 + N_C \sin\theta_1 \cdot 0.5 + 15 \cdot 2 - 10 \cdot 0.5 = 0$$

で与えられる。上式を解くと、軸力 N_C が次のように求められる。

$$N_C(\cos\theta_1 \cdot 0.75 + \sin\theta_1 \cdot 0.5) = -25 \rightarrow N_C = \frac{-50}{1.5 \cdot 2/\sqrt{5} + 1/\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$N_C = \frac{-50}{4}\sqrt{5} = -12.5\sqrt{5}$$

さらに、節点 1 に関するモーメントの釣合から、軸力 N_E が求められる。

$$M_1 = 0 : -N_E \sin\theta_2 \cdot 20 + 10 \cdot 15 = 0 \rightarrow N_E \cdot 60/\sqrt{13} = 150 \rightarrow N_E = 2.5\sqrt{13}$$

最後に、節点 6 でのモーメントの釣合を考えると、軸力 N_F が次のように求められる。

$$M_6 = 0 : -N_F \cdot 1.5 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 1.5 = 0 \rightarrow N_F = 30/1.5 = 20$$

次に、図 8 の閉曲線を考え、外力、反力及び切断した部材の軸力による釣合を考える。節点 1 を中心とするモーメントの釣合は、軸力 N_A と N_C によるモーメントがゼロであることを考慮し、軸力 N_D を両方向に分解してモーメントを計算すると、

$$M_1 = 0 : N_D \cos\theta_2 \cdot 0.75 + N_D \sin\theta_2 \cdot 1.5 + 10 \cdot 1.5 = 0$$

で与えられ、上式を解くと、軸力 N_D が求められる。

$$N_D(\cos\theta_2 \cdot 0.75 + \sin\theta_2 \cdot 1.5) = -15 \rightarrow N_D = -\frac{30}{1.5 \cdot 2/\sqrt{13} + 3 \cdot 3/\sqrt{13}} \rightarrow$$

$$N_D = \frac{-30}{12}\sqrt{13} = -2.5\sqrt{13}$$

以上をまとめると、各部材の軸力は以下の表で示される。

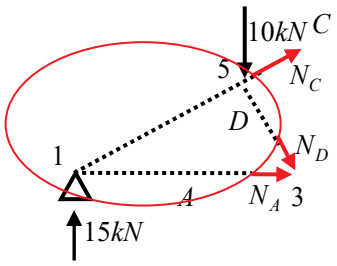


図 8 節点 1 と 5 を含む閉曲線内の力の釣合

表 2 山形トラス 2 の軸力

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_A	$30kN$	N_B	$-15\sqrt{5}kN$	N_C	$-12.5\sqrt{5}kN$
N_D	$-2.5\sqrt{13}kN$	N_E	$2.5\sqrt{13}kN$	N_F	$20kN$

切断法には 2 種の方法があり、一つは、閉曲線内で外力、反力、及び切断された断面力（軸力）の x 方向と y 方向及び任意点におけるモーメントの釣合を用いる方法であり、**カルマン法**と呼ばれる。他方は、この閉曲線内で外力と反力及び切断された断面力（軸力）に関する 3 つの独立なモーメントの釣合を用いる方法で、**リッター法**と呼ばれる。その際、モーメントの中心位置を一直線上にとると、独立なモーメントの釣合が得られないので注意が必要である。無論、x 方向あるいは y 方向の力の釣合と、2 つのモーメントの釣合を用いて、未定の断面力を求めても良い。上記 2 つの方法にこだわらずに、計算し易い方法で釣合式を設定することが、この方法を使いこなすコツである。

基礎４７話 No.3　単純梁型トラス

付 12 話参照
ex45_3

今回は、図 9 に示す単純梁型トラスの応力解析を行い、その特徴を学ぶ。単純梁の曲げモーメント図を思い出し、その特徴とトラスの応力状態を比較して覚えよう。単純梁に等分布荷重が加わった場合、曲げモーメントは、中央で最大、端部でゼロとなる。また、せん断力は中央でゼロ、端部で最大となる(図 10 参照)。曲げモーメントの引張側の応力はトラスの下側の軸力に、圧縮側の応力はトラスの上側の応力の軸力に対応する。また、せん断力はトラスの斜材の軸力に対応する。これらの特徴を以下の例題でより深く理解しよう。

3) 単純梁型トラスの応力解析　　ex45_3

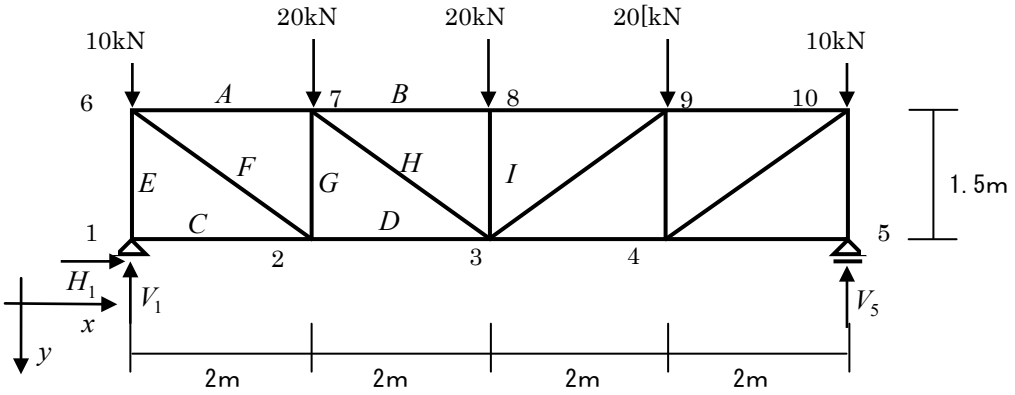
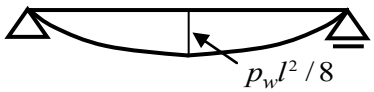
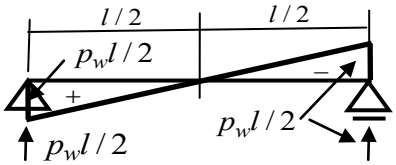


図 9　単純梁型のトラス

上記の単純梁型トラスの応力解析は切断法が最適である。切断法の基本的な考え方は、まず図 11 のように任意位置で部材を切断し、閉曲線で囲む。さらに閉曲線の中で 3 つの独立な釣合式を設定し、未知軸力を求める方法である。釣合式には、**カルマン法とリッター法**がある。ただし、結果を得易いように適切に釣合式を選択して使用すれば良い。閉曲線は未定軸力部材が 3 以下となるように囲うのが良い。閉曲線内の外力・反力及び切断部材の軸力との釣合式は 3 つあり、なるべく連立にならないように釣合式を選択すべきである。例えば、上のトラスでは、図 11 と 12 の閉曲線が最も都合が良い。解析を行う際、その理由を述べるので、是非覚えておこう。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 10 等分布荷重を受ける単純梁の断面力分布

まず、反力を求める。このトラスは対称構造・対称荷重であることより、応力状態は対称となる。従って、反力は次式となる。

$$H_1 = 0; \quad V_1 = V_5 = 40kN$$

次に、節点 1 と 8 に繋がる部材 C と E 及び I の軸力を節点法により求める。図 11 の節点 1 における軸力を参考に、両方向の軸力と反力の釣

合は次式で与えられ、結果、軸力が求められる。

$$\sum X=0:N_C=0 \qquad \sum Y=0:10+N_I=0\rightarrow N_I=-10$$
$$\sum Y=0:-40-N_E=0\rightarrow N_E=-40$$

次に、図 11 に示す閉曲線を用いて切断法により、部材 A,G,D の軸力を求める。まず、両方向の釣合が、外力・反力と切断部材の軸力によって以下のように得られる。

$$\sum X=0:N_A+N_D=0\rightarrow N_A=-N_D$$
$$\sum Y=0:-40+10-N_G=0\rightarrow N_G=-30$$

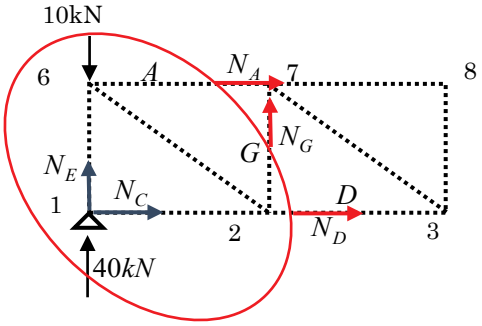


図 11 閉曲線その 1

上式上より、**上側部材の軸力と下側部材の軸力で、符号が逆で値が等しい**ことが分かる。また、同下式より、束材である部材 G の軸力が求められる。次にモーメントの釣合であるが、その中心は 2 つの切断部材が一点に集まる位置で考えるのが良い。例えば、節点 7 あるいは 2 である。ここでは、節点 2 に関するモーメントの釣合を考えると次式が得られ、軸力 N_A が容易に求められる。

$$M_2=0:40\cdot 2-10\cdot 2+N_A\cdot 1.5=0\rightarrow N_A=-40$$

従って、部材 D の軸力も $N_D=40kN$ となる。

続いて、図 12 に示す閉曲線を用いて、部材 B,H の軸力を求める。まず、鉛直方向の釣合より、

$$\sum Y=0:-40+10+20+N_H\sin\theta=0\rightarrow N_H=10\cdot 5/3=50/3$$

ここで、$\cos\theta=4/5;\sin\theta=3/5$ である。次に、節点 3 でのモーメントの釣合を考える。

$$M_3=0:40\cdot 4-10\cdot 4-20\cdot 2+N_B\cdot 1.5=0\rightarrow N_B=-160/3$$

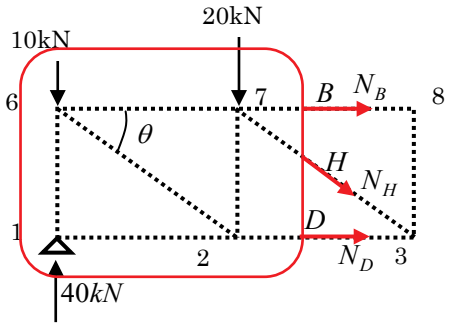


図 12 閉曲線その 2

既に、3 つの軸力は求めたが、ここでは、水平方向の釣合を検証する。

$$\sum X=0:N_B+N_D+N_H\cos\theta=-160/3+40+50/3\cdot 4/5$$
$$=(-160+120+40)/3\rightarrow 0$$

続いて、図 13 に示す閉曲線を用いて、部材 F の軸力を求める。鉛直方向の釣合より、N_F が求められる。

$$\sum Y=0:-40+10+N_F\sin\theta=0\rightarrow N_F=30\cdot 5/3=50$$

求めた 3 つの軸力から、水平方向の釣合を検証する。

$$\sum X=0:N_A+N_F\cos\theta=-40+50\cdot 4/5\rightarrow 0$$

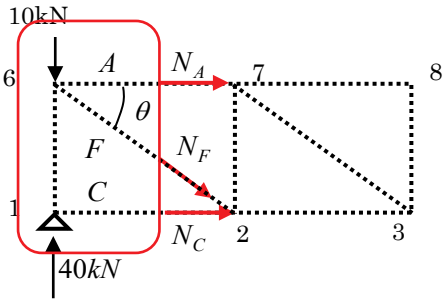


図 13 閉曲線その 3

表 3 単純梁型のトラスの軸力

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_A	$-40kN$	N_B	$-160/3kN$	N_C	$0kN$
N_D	$40kN$	N_E	$-40kN$	N_F	$50kN$
N_G	$-30kN$	N_H	$50/3kN$	N_I	$-20kN$

求めた各部材の軸力を上の表 3 にまとめる。

基礎４８話 No.4　片持ち梁型トラスその１

付 12 話参照
ex45_4

今回は、図 14 に示す片持ち梁型トラスを、切断法により応力解析し、その軸力分布の特徴を理解する。先端に集中荷重が加わった片持ち梁の断面力図は図 15 に示されており、その特徴とトラスの応力状態を比較して覚えよう。片持ち梁に先端集中荷重が加わった場合、曲げモーメントは、固定部で最大、端部でゼロとなる。また、せん断力は、一定値となり、変化しない。曲げモーメントの引張側の応力はトラスの上側の軸力に、圧縮側の応力はトラスの下側の軸力に対応する。また、せん断力はトラスの斜材の軸力に対応する。

4）片持ち梁型トラスの応力解析

ex45_4

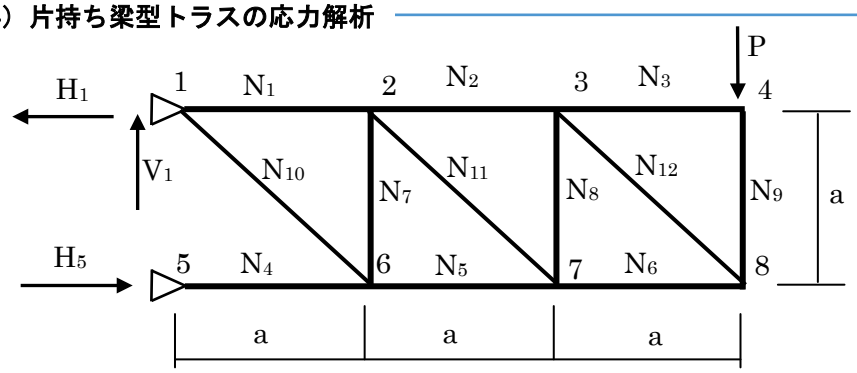


図 14　先端に集中荷重が加わった片持ち梁型トラス

ここでは、トラスの部材名と軸力記号を同じとし、図 14 のように設定する。支持部は両端共にピン支持であるが、節点 5 では部材が N_4 のみであることから、節点での力の釣合より、鉛直方向反力はゼロとなる。そのため、ここではこの反力 V_5 を省いている。また、斜材の角度は同図より $\cos 45^o = \sin 45^o = 1/\sqrt{2}$ である。

ここでも切断法を用いて、トラス材の軸力を求めていく。最初に、反力を求めよう。反力は、図 14 より、次の外力と反力に関する 2 方向の力の釣合と、節点 1 でのモーメントの釣合より求められる。

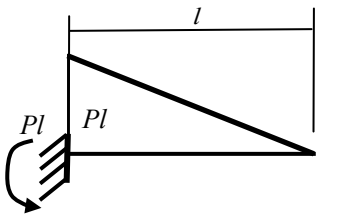
$$\sum X = 0 : H_1 - H_5 = 0; \quad \sum Y = 0 : -V_1 + P = 0 \rightarrow V_1 = P$$

$$\sum M_1 = 0 : -H_5 \cdot a + P \cdot 3a = 0 \rightarrow H_5 = 3P = H_1$$

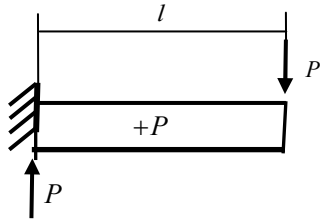
次に、カルマン法を用いて断面力を求める。閉曲線は、図 16 で与えられ、この中で 2 方向の力の釣合と節点 3 におけるモーメントの釣合を考える。今回は支持部側ではなく、荷重側に閉曲線を設け、各軸力を求める。

$$\sum X = 0 : -N_3 - N_6 - N_{12}\cos 45^0 = 0; \quad \sum Y = 0 : -N_{12}\sin 45^0 + P = 0$$

$$M_3 = 0 : N_6 \cdot a + P \cdot a = 0$$



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 15 先端集中荷重を受ける片持ち梁の断面力分布

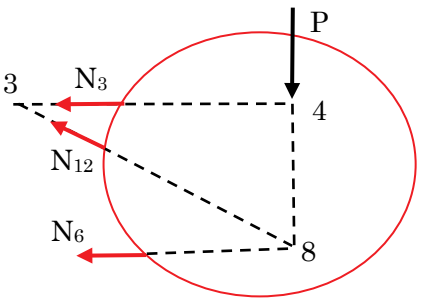


図 16　閉曲線内の断面力と外力その１

上式を解くと、3 つの未定軸力が次のように求められる。

$$N_6 = -P; \quad N_{12} = \sqrt{2}P; \quad N_3 = 0$$

カルマン法の替わりに、節点 3 と 8 に関するモーメントの釣合 2 つと、鉛直方向の力の釣合を用いて、上記と同じ閉曲線内の断面力を求めてみよう。釣合式は、以下のように与えられる。

$$\sum Y = 0 : N_{12} \sin 45^0 - P = 0 \rightarrow N_{12} = \sqrt{2}P$$

$$M_3 = 0 : N_6 \cdot a + P \cdot a = 0 \rightarrow N_6 = -P; \quad M_8 = 0 : N_3 \cdot a = 0 \rightarrow N_3 = 0$$

上式を解くと、カルマン法と同様に未定の軸力が得られる。

次に、図 17 に示される閉曲面内の軸力を求めてみよう。外力と軸力との鉛直方向の力の釣合と節点 7 と 3 に関するモーメントの釣合が次のように得られる。

$$\sum Y = 0 : N_8 + P = 0$$

$$M_7 = 0 : -N_2 \cdot a + P \cdot a = 0$$

$$M_3 = 0 : -N_6 \cdot a - P \cdot a = 0$$

上式を解くと、3 つの未定軸力は次のように求められる。

$$N_8 = -P; \quad N_2 = P; \quad N_6 = -P$$

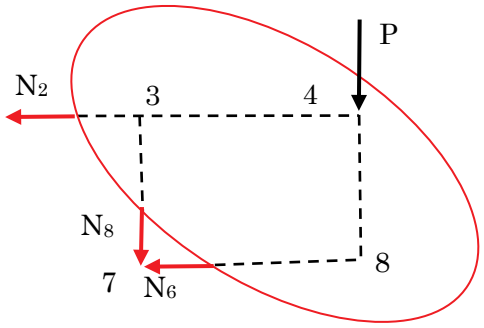


図 17　閉曲線内の断面力と外力その２

次に、図 18 に示される閉曲面内の軸力を求める。外力と軸力との鉛直方向での力の釣合と、節点 1 と 6 に関するモーメントの釣合が次式のように得られる。

$$\sum Y = 0 : -N_{10} \sin 45^o + P = 0$$

$$M_1 = 0 : N_4 \cdot a + P \cdot 3a = 0$$

$$M_6 = 0 : -N_1 \cdot a + P \cdot 2a = 0$$

上式より、以下のように軸力が得られる。

$$N_1 = 2P; \quad N_4 = -3P; \quad N_{10} = \sqrt{2}P$$

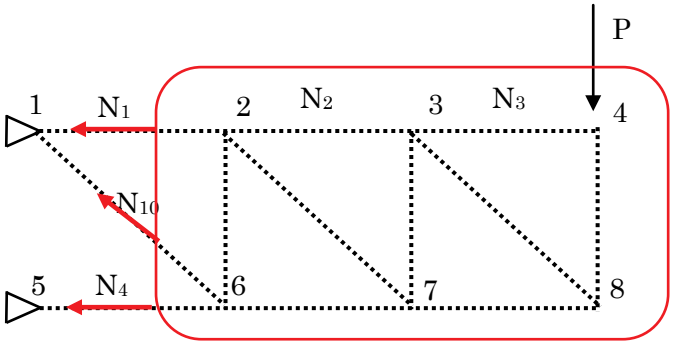


図 18　閉曲線内の断面力と外力その３

表 4 片持ち型トラスの軸力

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
H_1	$3P$	V_1	P	H_5	$3P$
N_1	$2P$	N_2	P	N_3	0
N_4	$-3P$	N_5	$-2P$	N_6	$-P$
N_7	$-P$	N_8	$-P$	N_9	$-P$
N_{10}	$\sqrt{2}P$	N_{11}	$\sqrt{2}P$	N_{12}	$\sqrt{2}P$

他の軸力についても、同様の方法で求めることができる。これは読者の演習としよう。全ての軸力と反力を表 4 にまとめる。

基礎４９話 No.5　片持ち梁型トラスその２

付 12 話参照
ex45_5

今回は、図 19 に示す片持ち形式のトラスを、節点法と切断法を適宜併用することにより応力解析する。ここでも、各部材の応力状態は、片持ち梁の応力状態を参考にあらかじめ予測すると良い。特に、圧縮か引張か、あるいは大きさはどの程度か、などである。

まず、トラス構造での切断法について復習しよう。切断法の基本的な考え方は、まず図 20 のように任意位置で部材を切断し、閉曲線で囲む。さらに、この閉曲線の中で 3 つの独立な力の釣合式を設定し、未知軸力を求める方法である。釣合式の設定法によって、次の 2 種の方法が提案されている。

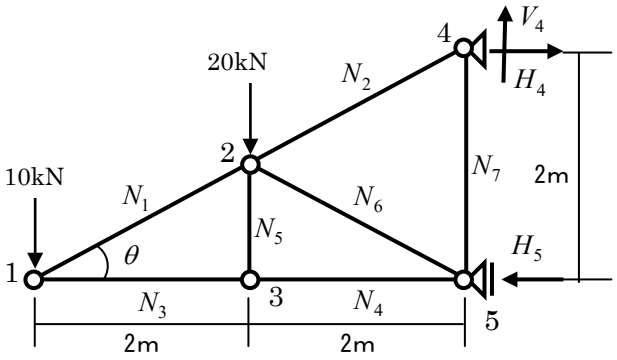


図 19　片持ち梁型トラス

R31：切断法の特徴と利用法

切断法には 2 つの方法、カルマン法とリッター法がある。カルマン法は、閉曲線内で、外力、反力、及び切断された部材に加わる仮想の力（断面力（軸力）に等しい）との水平方向と鉛直方向の力の釣合、任意点におけるモーメントの釣合を用いる方法であり、リッター法は、閉曲線内で外力と反力及び切断された部材に加わる仮想の力に関する 3 つの独立なモーメントの釣合を用いる方法である。その際、モーメントの中心位置を一直線上に設定すると、独立なモーメントの釣合が得られない。

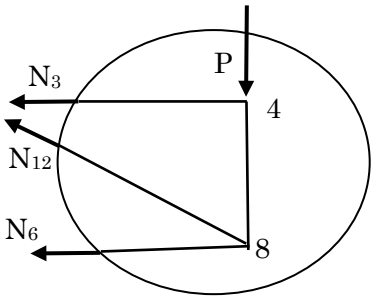


図 20　閉曲線内の断面力と外力

切断法は上記 2 つの方法にこだわる必要はない。計算し易い方法で、適宜釣合式を選択すること、さらに 3 つの未定軸力が連立にならないように釣合式を求めることが、この方法を使いこなすコツである。

5）片持ち梁型トラス 2 の応力解析　　**ex45_5**

トラスの形状から、$\cos\theta = 2/\sqrt{5}; \sin\theta = 1/\sqrt{5}$ である。最初に、反力を求めよう。反力は、図 19 より、次のように外力と反力に関する 2 方向の力の釣合と節点 4 でのモーメントの釣合より

$$\sum X = 0 : H_4 - H_5 = 0; \quad \sum Y = 0 : -V_4 + 10 + 20 = 0$$

$$M_4 = 0 : H_5 \cdot 2 - 10 \cdot 4 - 20 \cdot 2 = 0$$

上式より、各反力が以下のように求められる。

$$H_4 = 40kN; \quad V_4 = 30kN; \quad H_5 = 40kN$$

次に、節点 1 で節点法を用いて、N_1 と N_3 部材の軸力

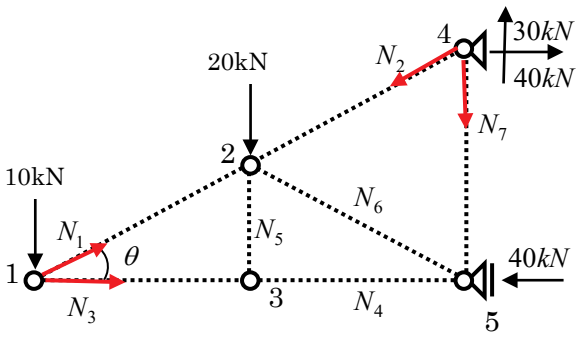


図 21 節点法による軸力の仮定

を求める。図 21 を参考にすると、両方向の力の釣合は次式で与えられ、軸力 N_1 が求められる。

$$\sum X = 0 : N_3 + N_1 \cos\theta = 0$$
$$\sum Y = 0 : 10 - N_1 \sin\theta = 0 \rightarrow N_1 = 10\sqrt{5}$$

上式上より、部材 N_3 の軸力は次となる。

$$N_3 = -N_1 \cos\theta \rightarrow N_3 = -10\sqrt{5} \cdot 2 / \sqrt{5} = -20$$

次に、節点 4 で節点法を用いて N_2 と N_7 部材の軸力を得る。図 21 を参考にすると、両方向の力の釣合は次式で与えられ、軸力 N_2 が得られる。

$$\sum X = 0 : -N_2 \cos\theta + 40 = 0 \rightarrow N_2 = 40 / \cos\theta = 20\sqrt{5}$$
$$\sum Y = 0 : N_2 \sin\theta + N_7 - 30 = 0$$

上式下より、

$$N_7 = -N_2 \sin\theta + 30 = -20\sqrt{5} \cdot 1 / \sqrt{5} + 30 = 10$$

残り部材の軸力を、図 22 に示される 2 つの閉曲線を用いた切断法で求める。最初に、青色の閉曲線内で、外力及び切断された部材の軸力 N_1, N_5, N_4 を求める。まず、節点 2 を中心とするモーメントの釣合より、軸力 N_4 を求める。

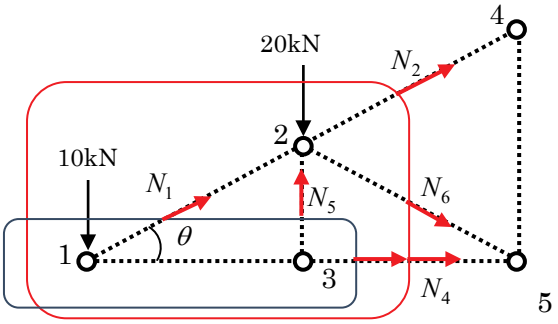


図 22 切断法による閉曲線が切断する軸力の仮定

$$M_2 = 0 : -N_4 \cdot 1 - 10 \cdot 2 = 0 \rightarrow N_4 = -20$$

鉛直方向の力の釣合より、軸力 N_5 は以下のようである。

$$\sum Y = 0 : 10 - N_1 \sin\theta + N_5 = 0 \rightarrow N_5 = -10 + 10\sqrt{5} \cdot 1 / \sqrt{5} = 0$$

次に、水平方向の釣合が満たされているか検証する。

$$\sum X = N_1 \cos\theta + N_4 = 10\sqrt{5} \cdot 2 / \sqrt{5} - 20 \rightarrow 0$$

続いて、赤色の閉曲線内で、外力及び切断された部材の軸力 N_2, N_4, N_6 を求める。既に、軸力 N_2, N_4 は求められており、ここでは、鉛直方向の力の釣合より、軸力 N_6 を得る。

$$\sum Y = 0 : 10 + 20 - N_2 \sin\theta + N_6 \sin\theta = 0 \rightarrow N_6 = (-30 + N_2 \sin\theta) / \sin\theta = -30\sqrt{5} + 20\sqrt{5} = -10\sqrt{5}$$

最後に、水平方向の釣合が満たされているか検証する。

$$\sum X = N_2 \cos\theta + N_6 \cos\theta + N_4 = 20\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 20 \cdot \sqrt{5} / 2 \rightarrow 0$$

表 5 片持ち梁型トラスの軸力

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_1	$10\sqrt{5}kN$	N_2	$20\sqrt{5}kN$	N_3	$-20kN$
N_4	$-20kN$	N_5	$0kN$	N_6	$-10\sqrt{5}kN$
N_7	$10kN$				

全ての断面力と反力を表 5 にまとめる。

基礎５０話 No.1　梁の微分方程式でたわみを求める　単純梁＋中央集中荷重

付 2 話参照
ex3_1

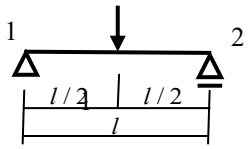
今回から、骨組の変位あるいは梁のたわみを求める手法を学ぶ。まずは、静定基本構造のたわみを求める。得られた結果を理解し丸覚えすれば、少し複雑な構造物の変形状態も理解できるようになろう。

断面力の釣合と梁の微分方程式は、次の 2 つの方程式で表される。

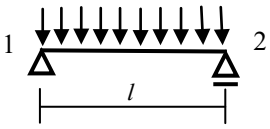
$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$$

静定構造では、梁や柱などの部材の断面特性に依存せず、断面力分布が決定する。つまり、上の右式のみを使用して、断面力が決まることになる。そこで、断面力分布が求まった後、上の左式を用いて、変位を求めることになる。無論、両者を同時に解き、断面力と変位を求めても良い。ただし、一般的に後者の方法は少し煩雑となる。

まず、図 1 と 2 に示す 4 つの基本構造の断面力分布を思い出してみよう。以下に、4 種の構造に関する曲げモーメント図とせん断力図を示す。

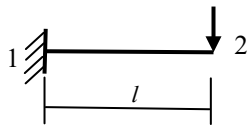


(a)中央集中荷重

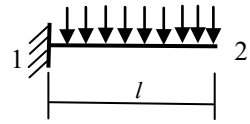


(b)等分布荷重

図 1 単純梁

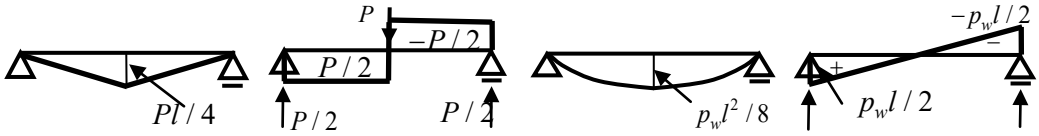


(a) 先端集中荷重

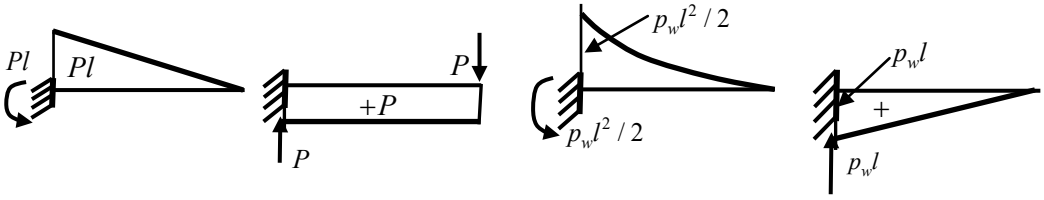


(b)等分布荷重

図 2 片持ち梁



(a) 単純梁＋集中荷重の断面力図　(b) 単純梁＋等分布荷重の断面力図



(c) 片持ち梁＋集中荷重の断面力図　(d) 片持ち梁＋等分布荷重の断面力図

図 3 静定基本構造の断面力分布

上記 4 つの基本構造の曲げモーメント関数を以下に示す。これらは既に求められている。以降、これらの関数を用いてたわみなどを求める。

R32：静定基本構造の曲げモーメント関数

モデル(a)：単純梁に中央集中荷重

$$M(x)=Px/2;\quad Q(x)=P/2\quad (x=0\sim l/2)$$

$$M(x)=-Px/2+Pl/2;\quad Q(x)=-P/2\quad (x=l/2\sim l)$$

モデル(b)：単純梁に等分荷重

$$M(x)=p_w(-x^2/2+lx/2);\quad Q(x)=p_w(-x+l/2)$$

モデル(c)：片持ち梁に中央集中荷重

$$M(x)=P(x-l);\quad Q(x)=P$$

モデル(d)：片持ち梁に等分布荷重

$$M(x)=p_w(-x^2/2+lx-l^2/2);\quad Q(x)=p_w(-x+l)$$

1) 図 1(a)の単純梁に中央集中荷重　　ex3_1

このモデルでは梁の中央に集中荷重が加わっているため、2 つに分けて方程式を解く。ただし、対称変形となるため半分解けば良い。梁左の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。さらに 2 回積分すると右式が得られる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{P}{2EI}x;\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{P}{2EI}(-\frac{1}{2}x^2+C_1);\quad v(x)=\frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2)$$

上式右のたわみの式には、積分定数 C_1,C_2 がある。2 つの境界条件からこの積分定数を決定すれば、たわみ関数が得られる。

このモデルの境界条件は、左端がピン支持であり、たわみはゼロとなる。また対称変形であるため、中央のたわみが最大となり、その梁中央点におけるたわみの接線はゼロとなる。この 2 つの境界条件を次のように表すと、

$$v(0)=\frac{P}{2EI}(C_2)=0;\quad \frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l/2}=\frac{P}{2EI}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{l^2}{4}+C_1)=0$$

上式から、積分定数は $C_1=l^2/8;C_2=0$ となり、この積分定数をたわみの式に代入すると、次式が得られる。このたわみ式は、梁左半分の式であることに注意されたい。

$$v(x)=\frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}x^3+\frac{l^2}{8}x)$$

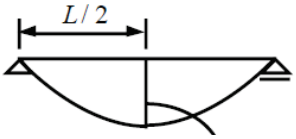
最大値は、上式に $x=l/2$ を代入することで得られる。

$$v_{\max}=v(x=\frac{l}{2})=\frac{P}{2EI}(-\frac{1}{6}(\frac{l}{2})^3+\frac{l^2}{8}\frac{l}{2})=\frac{Pl^3}{2EI}(-\frac{1}{48}+\frac{1}{16})=\frac{Pl^3}{48EI}$$

基本構造である単純梁に中央集中荷重が加わった際の最大曲げモーメント $Pl/4$ と共に、最大たわみ $Pl^3/48EI$ も、最も基本的な情報である。良く覚えておこう。最大たわみは、材料定数のヤング係数と断面二次モーメントに反比例し、荷重に正比例する。特に、梁長さの 3 乗に比例することを良く理解しておこう。

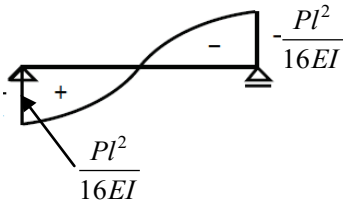
左半分の回転角分布は積分定数を代入して求め、最大値は $x=0$ を代入することで求められる。変形状態が対称であることを考慮して、たわみと回転角の分布を図 4 に示す

$$\theta(x=0)=\frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{P}{16EI}(-4x^2+l^2)\Big|_{x=0};\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{16EI}$$



$$v_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 4 中央集中荷重を受ける単純梁のたわみと回転角分布

基礎５１話 No.2　単純梁＋等分布荷重
片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_2 ~ ex3_4

前回の続きで、単純梁に中央集中荷重の加わる場合で、右半分のたわみ関数を求めてみよう。梁右の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。さらに、2 回積分すると右式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{P(x-l)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{2}x^2-lx+C_1);\quad v(x)=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{l}{2}x^2+C_1x+C_2)$$

境界条件は、梁中央でたわみの接線がゼロ、梁右のローラー支持部でたわみがゼロとなる。境界条件を上式に適用すると、

$$\frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l/2}=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{8}l^2-\frac{1}{2}l^2+C_1)=0\rightarrow C_1=\frac{3}{8}l^2$$

$$v(l)=\frac{Pl^3}{2EI}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{C_2}{l^3})=0\rightarrow C_2=\frac{-l^3}{24}$$

求めた積分定数をたわみの式に代入すると、

$$v(x)=\frac{P}{2EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{l}{2}x^2+\frac{3l^2}{8}x-\frac{l^3}{24})=\frac{Pl^3}{48EI}(4X^3-12X^2+9X-1)\leftarrow X=\frac{x}{l}$$

となり、上式右に $X=1/2$ を代入することで最大たわみが得られる。

$$v_{\max}=v(X=\frac{1}{2})=\frac{Pl^3}{48EI}(\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}-1)=\frac{Pl^3}{48EI}$$

2) 図 1(b)の単純梁に等分布荷重　　ex3_2

モデル(b)の梁の曲げモーメント関数を用いると、梁の微分方程式は次式左となる。2 回積分すると右式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{p_w(x^2-lx)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{3}x^3-\frac{l}{2}x^2+C_1);\quad v(x)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}x^4-\frac{l}{6}x^3+C_1x+C_2)$$

上式に境界条件を適用し、未定定数の C_1 と C_2 を決定する。モデル(b)の境界条件として梁両端のたわみをゼロとする。境界条件を上式右のたわみ関数に適用すると、

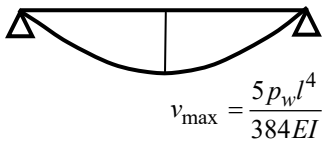
$$v(0)=\frac{p_w}{2EI}C_2=0\rightarrow C_2=0;\quad v(l)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}l^4-\frac{l}{6}l^3+C_1l)=0\rightarrow C_1=\frac{l^3}{12}$$

となり、求めた積分定数を、たわみの式に代入すると次式が得られる。

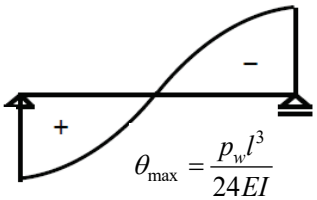
$$v(x)=\frac{p_w}{2EI}(\frac{1}{12}x^4-\frac{l}{6}x^3+\frac{l^3}{12}x);\quad v(X)=\frac{p_wl^4}{24EI}(X^4-2X^3+X)\quad\leftarrow X=x/l$$

最大たわみは梁中央に生じるので、上式右に $X=1/2$ を代入すると、

$$v_{\max}=v(X=\frac{1}{2})=\frac{p_wl^4}{24EI}(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})=\frac{5p_wl^4}{384EI}$$



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 5 等分布荷重を受ける単純梁のたわみと回転角

となり、最大たわみが得られる。回転角分布とその最大値は回転角関数に $x=0$ を代入することで得られる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{p_w l^3}{24EI}\left(4(\frac{x}{l})^3-6(\frac{x}{l})^2+1\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{p_w l^3}{24EI}$$

3）図 2(a)の片持ち梁に先端集中荷重　　ex3_3

梁の微分方程式は、モデル(c)の曲げモーメント関数より次式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{P(l-x)}{EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{P}{EI}(lx-\frac{1}{2}x^2+C_1);\quad v(x)=\frac{P}{EI}(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2)$$

境界条件は、片持ち梁の支持部が固定であることから、たわみはゼロ、回転角もゼロとなる。上記の式に、$x=0$ で $v(x)=0$ と $dv/dx=0$ を適用すると、

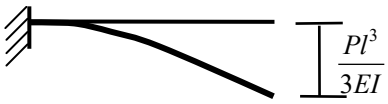
$$v(0)=\frac{P}{EI}C_2=0\rightarrow C_2=0;\quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{P}{EI}C_1=0\rightarrow C_1=0$$

上記の積分定数をたわみの式に代入し、たわみ関数を求める。さらに、最大たわみは、片持ち梁の先端に生じるので、たわみ式に $x=l$ を代入すると、以下のように求められる。

$$v(x)=\frac{P}{EI}(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)=\frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3);\quad v_{\max}(l)=\frac{Pl^3}{6EI}(3-1)=\frac{Pl^3}{3EI}$$

回転角分布は、上記のモデルと同様に、最大値は $x=l$ を適用すると

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{Pl^2}{2EI}\left(2(\frac{x}{l})-(\frac{x}{l})^2\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{Pl^2}{2EI}$$



(a) たわみ曲線

(b) 回転角分布

図 6 先端集中荷重を受ける片持ち梁のたわみと回転角

4）図 2(b)の片持ち梁に等分布荷重　　ex3_4

梁の微分方程式は、モデル(d)の曲げモーメント関数より次式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{p_w(x^2-2lx+l^2)}{2EI};\quad \frac{dv(x)}{dx}=\frac{p_w}{2EI}(\frac{x^3}{3}-lx^2+l^2x+C_1);\quad v(x)=\frac{p_w}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2+C_1x+C_2)$$

境界条件は、片持ち梁の支持部が固定であることから、たわみはゼロ、回転角もゼロとなる。上記の式に、$x=0$ で $v(x)=0$ と $dv/dx=0$ を適用すると、積分定数が決定される。

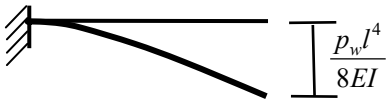
$$v(0)=\frac{p_w}{2EI}C_2=0\rightarrow C_2=0;\quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{p_w}{2EI}C_1=0\rightarrow C_1=0$$

上記の積分定数をたわみの式に代入して、たわみ関数を求める。さらに、最大たわみは、片持ち梁の先端に生じるので、たわみ式に $x=l$ を代入することで求められる。

$$v(x)=\frac{p_w l^4}{24EI}((\frac{x}{l})^4-4(\frac{x}{l})^3+6(\frac{x}{l})^2);\quad v_{\max}(l)=\frac{p_w l^4}{24EI}(1-4+6)=\frac{Pl^4}{8EI}$$

回転角も前モデルと同様に求められる。最大値も、回転角の式に $x=l$ を代入することで、次式となる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{p_w l^3}{6EI}\left((\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+3(\frac{x}{l})\right);\quad \theta_{\max}=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{p_w l^3}{6EI}$$



(a) たわみ曲線

(b) 回転角分布

図 7 等分布荷重を受ける片持ち梁のたわみと回転角

基礎５２話 No.1　はね出しを有する単純梁 先端集中荷重による先端変位

付 13 話参照
ex52_1

前回では、梁の微分方程式を用いて、静定基本構造のたわみ式と回転角式を求め、最大値を求めた。ここではまず、これらの最大値をまとめておく。基本中の基本などで丸覚えしておこう。

R33：静定基本構造の最大曲げモーメントと最大たわみ

1:中央集中荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{P}{2};\quad M_{\max}=\frac{Pl}{4};\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{16EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

2：等分布荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{p_w l}{2};\quad M_{\max}=\frac{p_w l^2}{8};\quad \theta_{\max}=\frac{p_w l^3}{24EI};\quad v_{\max}=\frac{5p_w l^4}{384EI}$$

3：先端荷重＋片持ち梁

$$Q_{\max}=P;\quad M_{\max}=Pl;\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{2EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{3EI}$$

4：等分布荷重＋片持ち梁

$$Q_{\max}=p_w l;\quad M_{\max}=\frac{p_w l^2}{2};\quad \theta_{\max}=\frac{p_w l^3}{6EI};\quad v_{\max}=\frac{p_w l^4}{8EI}$$

梁の微分方程式を用いて、基本構造以外の骨組の変位やたわみを求めることは、不可能ではないが一般に難しい。後で学ぶたわみ角法や固定法を用いたほうが、効率的である。ここでは、2 つの例題を用いて、梁の微分方程式を用いてたわみを求める。応力解析を行う過程を観察して、如何に面倒であるかを確認しよう。

1) はね出しを有する単純梁　　ex52_1

解析モデルは、図 1 に示す梁であり、単純梁の先にはね出し(片持ち梁)が取り付いている。ここでは、片持ち梁の先端に鉛直方向の荷重が加わっており、その直下のたわみを求める問題である。ただし、梁断面は全て EI が一定であるとする。

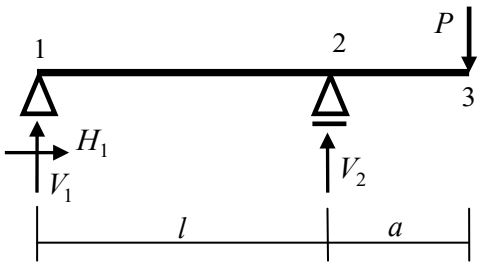


図 1 単純梁＋片持ち梁モデル

最初に、反力を求めよう。両方向の力の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合式を以下に示す。

$$\sum X=0;H_1=0;\quad \sum Y=0;P-V_1-V_2=0;$$
$$M_1=0;P(l+a)-V_2 l=0$$

上式を解き、反力を求める。

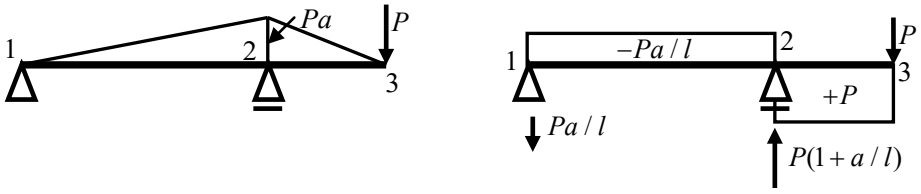
$$V_2=P(1+a/l);\quad V_1=P-P(1+a/l)=-Pa/l;\quad H_1=0$$

次に、断面力分布を求める。曲げモーメントは、まず、片持ち梁部分から決めるのが良い。片持ち梁の曲げモーメント分布は、他の部分の応

力状態から影響を受けないので、端部の曲げモーメントは$M_2 = Pa$となる。後は、単純梁部の曲げモーメントは、荷重がなく、また支持点ではゼロであることから、両端を直線で繋げば、図 2(a)のように得られる。節点 1 を原点にすると、曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x) = -\frac{Pa}{l}x$$

せん断力図も容易に求められ、支持点との力の釣合、もしくは曲げモーメントの傾きから、同図(b)のように求められる。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

図 2 単純梁＋片持ち梁モデルの断面力分布

次に、梁のたわみを微分方程式により求めるが、単純梁部と片持ち梁部とに分けて解く必要がある。先の基本構造の応力解析手法に倣って解析を進める。まず、単純梁部の曲げモーメント関数は既に求められており、これを使用すると梁の微分方程式は次式のようになる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}(\frac{Pa}{l}x);\quad \frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^2}{2l} + C_1);\quad v(x) = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^3}{6l} + C_1x + C_2)$$

境界条件は梁両端でたわみがゼロとなり、これを上式に適用すると、

$$v(0) = C_2 = 0;\quad v(l) = \frac{Pa}{2EI}(\frac{l^2}{6} + C_1l) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{l}{6}$$

となり、求めた積分定数をたわみ関数と回転角関数に代入すると次式が得られる。

$$v(x) = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^3}{6l} - \frac{l}{6}x) = \frac{Pal^2}{6EI}((\frac{x}{l})^3 - \frac{x}{l})$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa}{EI}(\frac{x^2}{2l} - \frac{l}{6}) = \frac{Pal}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2 - 1)$$

上式下より最大たわみは、左端より$l/\sqrt{3}$の位置で生じ、この値を上式上に代入すると、

$$v(l/\sqrt{3}) = \frac{Pal^2}{6EI}(\frac{1}{3} - 1)\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{Pal^2}{9\sqrt{3}EI}$$

として、また、上式下に$x = l$を代入すれば、節点 2 における梁の回転角が求められる。

$$\theta(l) = \frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{Pal}{6EI}(3 - 1) = \frac{Pal}{3EI}$$

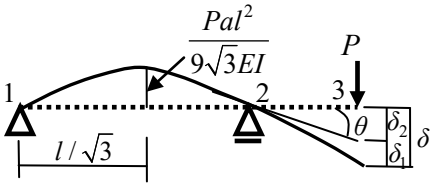


図 3 片持ち梁先端のたわみ

片持ち梁先端のたわみは、基本構造である片持ち梁＋先端集中荷重のたわみδ_1に、上の節点 2 での回転角より生じるたわみδ_2の和となる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pal}{3EI}a = \frac{Pa^3}{3EI}(1 + \frac{l}{a})$$

基礎５３話 No.2　ひじ型骨組 水平荷重による柱頭水平変位

付 13 話参照
ex53_1

2）ひじ型骨組＋水平荷重

ex53_1

今回は、図4に示す骨組の断面力分布と柱頭の水平変位を求める。骨組は静定構造物であることから、最初に力の釣合から断面力を求める。まず、静定構造物の応力解析は反力を求めることから始める。反力を図4のように仮定し、荷重との力の釣合及び節点1に関するモーメントの釣合より、反力を求める。

$$V_1+V_2=0;\quad H_1=P;\quad Ph-V_2l=0\rightarrow$$
$$V_1=-Ph/l;\quad V_2=Ph/l;\quad H_1=P$$

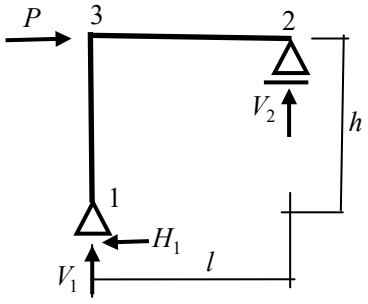


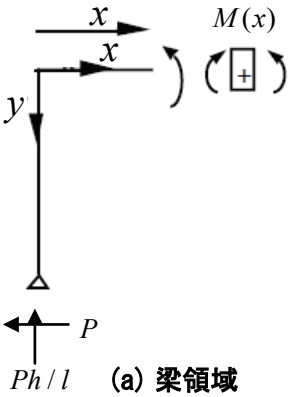
図 4 ひじ型骨組＋水平荷重

反力を求めた後は、断面力を求める。まず、図5(b)を参考にすると、節点1から x 点でのモーメントの釣合は次式となり、柱の曲げモーメントは下式右となる。

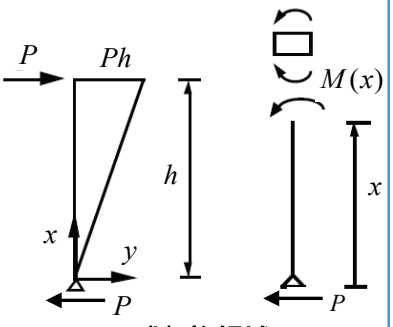
$$-M(x)+H_1x=0\rightarrow\quad M(x)=Px$$

なお、曲げモーメント図は、図5(b)のように水平反力の尻尾側に描く。次に、節点3から x の位置でのモーメントの釣合は次式で与えられ、柱の曲げモーメントは同右式となる。

$$-M(x)+H_1h+V_1x=0\rightarrow\quad M(x)=Ph-\frac{Ph}{l}x$$



(a) 梁領域



(b) 柱領域

図 5 部材のモーメントの釣合

せん断力は、反力との力の釣合もしくは曲げモーメントの傾きから求められる。また、柱の軸力は反力との力の釣合より得られ、梁の軸力は節点2の境界がローラー支持であることから、ゼロとなる。曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を各々図6に示す。

次に、骨組の変形を求めてみよう。梁の微分方程式は、曲げモーメントから、節点1-3間の柱と節点3-2間の梁に対して、各々、

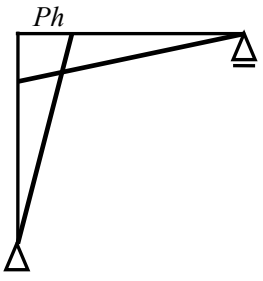
$$EI_c\frac{d^2v_1}{dx^2}=-Px\quad(1-3\text{間});\quad EI_b\frac{d^2v_2}{dx^2}=\frac{Ph}{l}x-Ph\quad(3-2\text{間})$$

となる。ただし、部材の曲げ剛性は、柱では EI_c で、梁では EI_b とする。また、座標系は図5に示されており、各々の鉛直方向たわみとして、柱は v_1、梁は v_2 とする。上式を2回積分すると変位が次のように得られる。

$$EI_cv_1(x)=-\frac{Px^3}{6}+C_1x+C_2;\quad EI_bv_2(x)=\frac{Ph}{6l}x^3-\frac{Ph}{2}x^2+C_3x+C_4$$

梁の微分方程式では、柱が伸縮しないとすると、節点3は上下に変位しないこと、また節点2はローラー支持であるため上下に変位しないことより、次の境界条件が得られ、積分定数が求められる。

$$EI_bv_2(0)=C_4=0$$
$$EI_bv_2(l)=\frac{Phl^3}{6l}-\frac{Phl^2}{2}+C_3l=0\rightarrow C_3=\frac{Phl}{3}$$



(a) 曲げモーメント図

得られた積分定数より梁のたわみ $v_2(x)$ 及び回転角 $\theta_2(x)$ は、

$$v_2(x)=\frac{Phl^2}{6El_b}\left\{(\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l})\right\};\quad \theta_2(x)=\frac{dv_2}{dx}=\frac{Phl}{6EI_b}\left\{3(\frac{x}{l})^2-6(\frac{x}{l})+2\right\}$$

ここで、節点3での梁の回転角 θ_3 は、上右式に $x=0$ を代入することで、$\theta_2(0)=\theta_3=Phl/3EI_b$ となる。

次に、柱の微分方程式の境界条件は、節点1ではピン支持であることより次式となり、積分定数 C_2 が求められる。

$$EI_c v_1(0)=C_2=0$$

一方、節点3では鉛直方向変位、つまり骨組では水平変位が生じる。この変位 δ は、柱のたわみ式に $x=h$ を代入することで得られる。

$$\delta=v_1(h)=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Px^3}{6}+C_1x)\Big|_{x=h}=\frac{h}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{6}+C_1)$$

他の境界条件として、節点3での回転角 θ_3 を用いる。図7に示すように、節点3では、梁と柱は90 度の角度で剛接しており、変形後もこの角度が保たれる。このため、梁の回転角 θ_3 と柱の回転角は等しい。節点3での柱の回転角 θ_3 は次式となり、梁の回転角と等しいと置くと、次式右が

$$\left.\frac{dv_1}{dx}\right|_{x=h}=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{2}+C_1)=\theta_3\rightarrow\frac{Phl}{3EI_b}=\frac{1}{EI_c}(-\frac{Ph^2}{2}+C_1)$$

得られる。上式より積分定数 C_1 は、次のように求められる。

$$C_1=\frac{I_c}{3I_b}Phl+\frac{Ph^2}{2}$$

得られた積分定数をたわみ関数 $v_1(x)$ と回転角 $\theta_1(x)$ に代入すると、たわみと回転角関数が、

$$v_1(x)=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-(\frac{x}{h})^3+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})(\frac{x}{h})+3(\frac{x}{h}))$$

$$\theta_1(x)=\frac{Ph^2}{6EI_c}(-3(\frac{x}{h})^2+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})+3)$$

また、節点3での水平変位 δ は、柱のたわみ関数より、

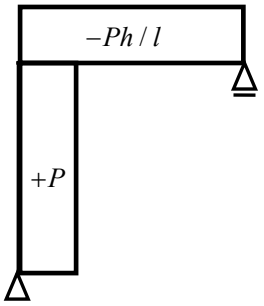
$$\delta=v_1(h)=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-1+\frac{2I_c}{I_b}\frac{l}{h}+3)=\frac{Ph^2}{3E}(\frac{h}{I_c}+\frac{l}{I_b})$$

として得られる。ここで、柱と梁の曲げ剛性を次のように K_c,K_b で表し、

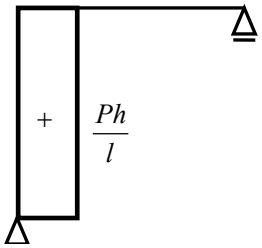
$$K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l}$$

とすると、水平変位 δ は次式で与えられる。これで骨組の変形状態は全て求められた。その骨組の変形を図8 に示す。

$$\delta=\frac{2Ph^2}{3}(\frac{1}{K_c}+\frac{1}{K_b})$$



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 6 骨組の断面力図

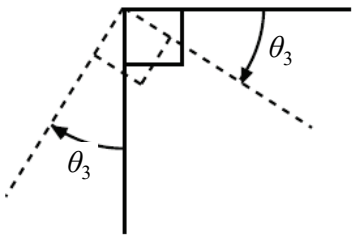


図 7 柱・梁接合部の回転角

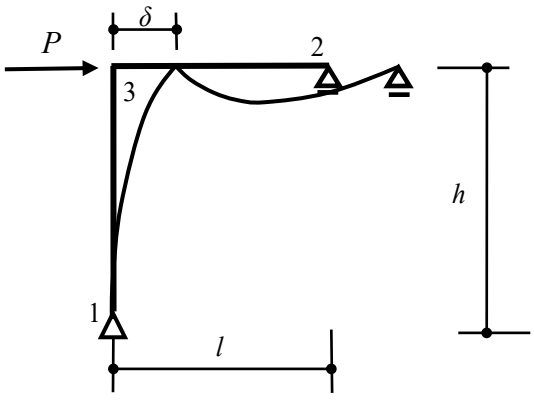


図 8　骨組の変形状態

基礎５４話 No.1　モールの定理の解説 単純梁＋中央集中荷重

付 2 話参照
ex3_1; ex3_2

これまでは微分方程式を解くことで、梁のたわみを求めた。断面力の釣合と梁の微分方程式が似ていることを利用し、微分方程式を解かずにたわみを求める手法がある。これを**モールの定理**という。今回は、この定理を用いて基本構造のたわみを求める。

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-P_w(x)$$

上式を比較すると、微分方程式の形は全く同じであり、右辺項が異なるのみである。従って、静的構造物で断面力分布を求める手法を使えば、微分方程式を解かなくても、たわみを求めることが可能となる。つまり、$-M(x)/EI$ を荷重分布 $p_w(x)$ であるとして、切断法などで断面力分布を求めれば良い。その際、得られた曲げモーメント分布がたわみに、せん断力分布が回転角に相当する。ただし、両微分方程式では、支持点の境界条件が異なるため、表 1 のように変更する必要がある。

表 1　両微分方程式の境界条件

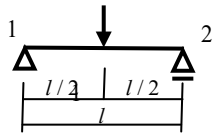
境界条件	梁の微分方程式		断面力の釣合方程式	
	変位	回転角	曲げモーメント	せん断力
自由端	自由	自由	ゼロ	ゼロ
ピンとローラー	ゼロ	自由	ゼロ	自由
固定	ゼロ	ゼロ	自由	自由

ここで、記号「自由」は断面力では反力に等しい。

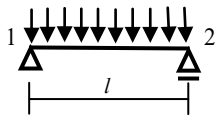
上の表のように、両微分方程式では支持境界が異なるため、モールの定理を適用するためには、境界条件を自由端では固定に、固定では自由端に変更する必要がある。ここで、モールの定理をまとめておこう。

R34：モールの定理でたわみを求める

梁の曲げモーメントを $-EI$ で除し、その値を荷重と考えると、ある点のたわみはその点の曲げモーメントの値に、また、ある点の回転角はその点のせん断力に等しい。ただし、片持ち梁の場合は固定端と自由端とを入れかえる必要がある。



(a) 中央集中荷重



(b) 等分布荷重

図 1 単純梁

演習として、モールの定理を用いて、静定基本構造の最大たわみを求めてみよう。

1）単純梁に中央集中荷重　　ex3_1

図 1(a)の中央集中荷重の単純梁の曲げモーメント分布を $-EI$ で割る。つまり逆方向から加えることになる。解析モデルが図 2 に示されており、

まず反力を求める。全荷重は $l\cdot Pl/8EI$ であり、対称応力状態となるため、反力は $H_1=0;\ \ V_1=V_2=Pl^2/(16EI)$ となる。梁中央の曲げモーメント M_3 を求めるために、まず、節点 1-3 間に加わる荷重の総和(反力 V_1 に等しい)と荷重中心位置を求める。

次に、梁中央で切断し、支持点 1 を囲む閉曲線内で切断法を用いる。図 2 を参考に、節点 3 を中心とするモーメントの釣合より、最大曲げモーメント、つまりたわみの最大値が得られる。

$$M_3=\frac{Pl^2}{16EI}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{6}\right)=\frac{Pl^2}{16EI}\cdot\frac{2l}{6}=\frac{Pl^3}{48EI}\rightarrow v_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

最大せん断力は、節点 1 に生じるため、次式で与えられる。つまり、最大回転角となる。

$$Q_1=\frac{Pl^2}{16EI}\rightarrow\quad\theta_{\max}=\frac{Pl^2}{16EI}$$

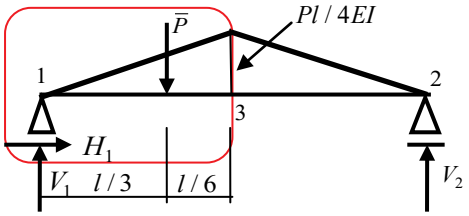


図 2 モールの定理を適用するためのモデル（曲げモーメントを荷重に置き直す）

2）単純梁に等分布荷重　　ex3_2

先のモデルでは、図 2 の閉曲線内の荷重の総和と荷重中心位置は容易に求めることができた。しかし、このモデルの荷重は放物線で表されるため、荷重の総和と荷重中心を求めることは難しい。そこで、荷重の積分を用いて、任意位置における曲げモーメントと荷重の総和を求めてみよう。

まず、図 3 のように原点から x の位置で断面を切断し、反力と荷重及び断面力によるモーメントの釣合を考える。原点から X 位置の微小部分の荷重 p_wdX が作用する際、モーメントは次式で表される。

$$dM=(x-X)p_wdX$$

従って、原点から位置 x までの荷重全てが作用するモーメントは、次のように上式を積分することで得られる。

$$M(x)=\int_0^x(x-X)p_wdX$$

ここで、p_w が定数、つまり等分布荷重の場合、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M(x)=\int_0^x(x-X)p_wdX=p_w\left[xX-\frac{X^2}{2}\right]_0^x=\frac{p_wx^2}{2}$$

上式を参考にすると、反力と荷重によるモーメントも含めて、点 x におけるモーメントの釣合は次式で与えられる。ただし、荷重は等分布とする。得られた曲げモーメント分布は図 4 に示される。

$$-M(x)+R_1x-\int_0^x p_w(x-X)dX=0\rightarrow\quad -M(x)+R_1x-\frac{p_w}{2}x^2=0\rightarrow$$

$$M(x)=\frac{p_wx}{2}(l-x)\quad\leftarrow R_1=\frac{p_wl}{2};\quad M_{\max}=\frac{p_wl^2}{8}\quad\leftarrow x=\frac{l}{2}$$

以降は、次回お話しする。

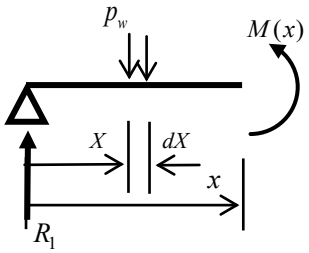


図 3 切断面における微小荷重によるモーメント

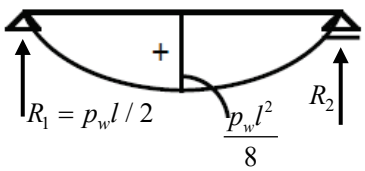


図 4 曲げモーメント図

基礎５５話 No.2　単純梁＋等分布荷重 片持ち梁＋中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_3; ex3_4

前回に続いて、モールの定理を用いて静定基本構造の最大たわみを求める。前回では等分布荷重の曲げモーメント関数を求めたので、その曲げモーメントを $-EI_z$ で割った関数を荷重とし、モールの定理を適用する。荷重の方向は図 5 のように曲げモーメント図と反対側に描く。

まず、力の釣合より反力を求める。曲げモーメント関数は前回求めた。その関数を用いて、全荷重を以下のように積分して求める。

$$W=\int_0^l \frac{p_w}{2EI}(lx-x^2)dx=\frac{p_w}{2EI}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{p_w}{2EI}\frac{l^3}{6}=\frac{p_w l^3}{12EI}$$

対称応力状態を考慮し、鉛直方向反力 V_1, V_2 は以下のようである。

$$V_1=V_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_w l^3}{12EI}=\frac{p_w l^3}{24EI}$$

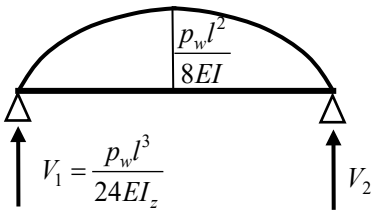


図 5 曲げモーメントを荷重に置き直し、反力を求める

モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の最大鉛直変位である。梁中央を切断する手法より右図の梁中央での曲げモーメント M_C を求める。まず、微小部分のモーメント dM は、先に求めた p_w の替わりに曲げモーメントの式を用いると、

$$dM=(\frac{l}{2}-X)\frac{p_w}{2EI}(lX-X^2)dX$$

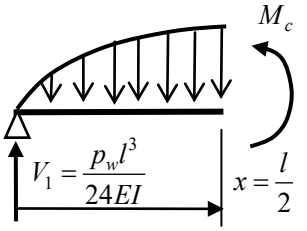


図 6 切断面における モーメントの釣合

となる。図 6 に示される分布荷重全体によるモーメントは、0 から $l/2$ まで積分することによって得られる。梁中央でのモーメントの釣合より、M_C は下右式となり、

$$-M_C+V_1\frac{l}{2}-\frac{p_w}{4EI}\int_0^{\frac{l}{2}}(l-2X)(lX-X^2)dX=0\rightarrow M_c=\frac{p_w l^4}{48EI}-\frac{p_w}{4EI}\int_0^{\frac{l}{2}}(l^2X-3lX^2+2X^3)dX$$

従って、梁中央の変位、つまり最大たわみは上式を積分することで求められる。

$$\delta_{\max}=\frac{p_w l^4}{48EI}-\frac{p_w}{4EI}\left[\frac{l^2X^2}{2}-lX^3+\frac{X^4}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{p_w l^4}{48EI}-\frac{p_w l^4}{4EI}(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32})=\frac{p_w l^4}{48EI}-\frac{p_w l^4}{128EI}=\frac{5p_w l^4}{384EI}$$

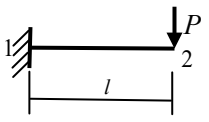
最大回転角は、材端に生じるため、次式で与えられる。

$$\theta_{\max}=V_1=\frac{p_w l^3}{24EI}$$

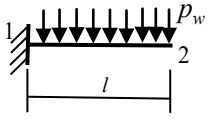
3) 片持ち梁に先端集中荷重　　ex3_3

続いて、図 7 に示す 2 つの基本構造である片持ち梁について、その最大たわみをモールの定理より求めてみよう。この 2 つのモデルの曲げモーメント分布は既に求めており、それを利用してモールの定理を適用する。モデル(a)の曲げモーメント分布は図 8 に示される。

モールの定期を適用するために、単純梁と同様、求めた曲げモーメン



(a) 先端集中荷重



(b) 等分布荷重

図 7 片持ち梁

トを $-EI$ で割って、その値を荷重とし、図 9 のように荷重の方向を逆にする。さらに、片持ち梁では、同図のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

まず、この荷重に対する節点 2 での曲げモーメントを求める。この端部の曲げモーメントが片持ち梁の最大変位となる。また、反力と端部の部材断面力との釣合より、反力を代用しても良い。

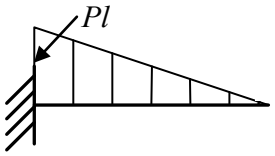


図 8 先端集中荷重＋片持ち梁の曲げモーメント図

分布荷重の合力 W は次式で、荷重中心は節点 2 から $2l/3$ となる。

$$W = \frac{Pl}{EI}\frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

固定端でのモーメントの釣合より M_2 は次のようになり、モールの定理より、その値が変位となる。

$$M_2 = \frac{Pl^2}{2EI}\frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI} \rightarrow \quad \delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

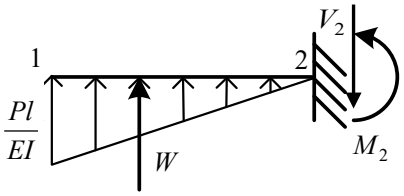


図 9 曲げモーメントを荷重に置き直す

また、反力 V_2 は、モールの定理によれば、片持ち梁先端の回転角となる。反力は次のように求められる。

$$V_2 = \frac{Pl^2}{2EI} \rightarrow \quad \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

以上のように、モールの定理を用いても、微分方程式の解と同一の結果が得られる。モールの定理は微分方程式を解く必要がなく、簡単に任意位置の変位を求めることができる。覚えておくと便利である。

4）片持ち梁に等分布荷重　　ex3_4

図 7(b)に示す片持ち梁に等分布荷重が加わるとき、梁の最大変位をモールの定理により求める。最初に、曲げモーメント関数を求める。図 10 のように位置 x で切断し、その点におけるモーメントの釣合より次式のように曲げモーメント関数が得られる。この関数より曲げモーメント図が図 11 に示される。

$$-M(x) - \int_0^x (x-X)p_w dX + V_1 x - M_1 = 0 \leftarrow \quad \int_0^x (x-X)p_w dX = p_w\left[xX - \frac{X^2}{2}\right]_0^x$$

$$-M(x) - p_w\frac{x^2}{2} + p_w lx - p_w\frac{l^2}{2} = 0 \rightarrow M(x) = \frac{p_w}{2}(-l^2 + 2lx - x^2)$$

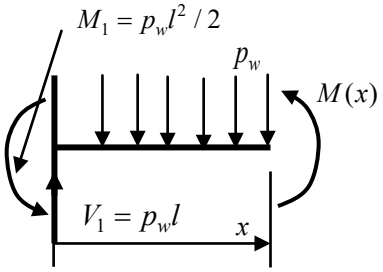


図 10 切断面におけるモーメントの釣合

モールの定理を適用するために、前例と同様、求めた曲げモーメントを $-EI$ で割る。つまり荷重を逆方向から加える。ただし、図 12 のように境界である固定端と自由端を入れ替える。以降は次回お話しする。

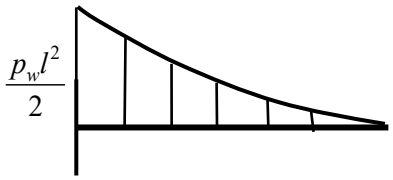


図 11 片持ち梁の曲げモーメント図

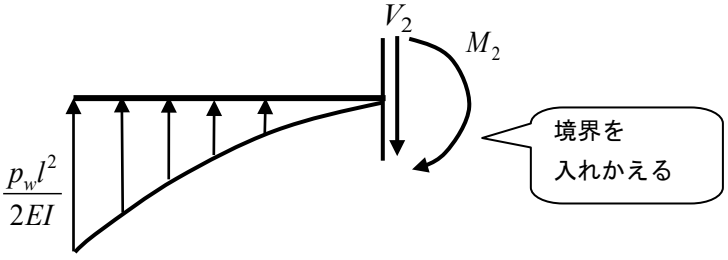


図 12 曲げモーメントを荷重に置き直す

基礎５６話 No.3　はね出しを有する単純梁 はね出し部等分布荷重による先端変位

付 14 話参照
ex56_1;

前回の続きで、モールの定理を用いて静定基本構造である片持ち梁の最大たわみを求める。まず、図 12 の荷重に対する固定端でのモーメント反力 M_2 と鉛直方向反力 V_2 を求める。節点 2 における曲げモーメント $M(l)$ とモーメント反力 M_2 の釣合、及びせん断力 $Q(l)$ と鉛直方向反力 V_2 の釣合より、モーメント反力が最大たわみとなり、鉛直方向反力が最大回転角となる。

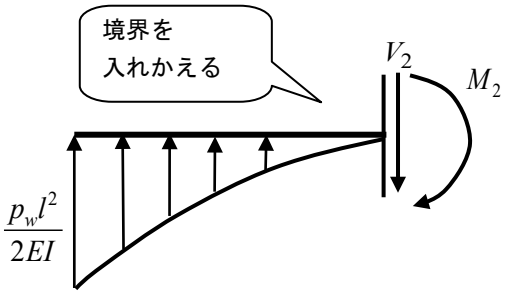


図 12 曲げモーメントを荷重に置き直す

モーメント反力 M_2 は、外力と反力との力の釣合より次式で求められる。ただし、等分布荷重を受ける単純梁と同様に、図 12 に示される荷重による節点 2 を中心とするモーメントは次の積分で表される。

$$M_2 - \int_0^l (l-X)\frac{p_w}{2EI}(l^2 - 2lX + X^2)dX = 0$$

上式の積分を実行すると、梁先端のたわみが次式として得られる。

$$M_2 = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l-X)(l^2-2lX+X^2)dX = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l^3 - 3l^2X + 3lX^2 - X^3)dX$$

$$= \frac{p_w}{2EI}\left[l^3X - 3l^2\frac{X^2}{2} + lX^3 - \frac{X^4}{4}\right]_0^l = \frac{p_w l^4}{8EI}(4-6+4-1) = \frac{p_w l^4}{8EI} \rightarrow \delta_{\max} = \frac{p_w l^4}{8EI}$$

片持ち梁先端の回転角は、モールの定理より反力 V_2 で与えられる。また反力 V_2 は、図 12 の分布荷重の合力に等しい。合力もモーメントと同様に次の積分で求められる。

$$V_2 = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (l^2 - 2lX + X^2)dX = \frac{p_w}{2EI}\left[l^2X - lX^2 + \frac{X^3}{3}\right]_0^l = \frac{p_w l^3}{2EI}(1-1+\frac{1}{3}) = \frac{p_w l^3}{6EI} \rightarrow \theta(l) = \frac{p_w l^3}{6EI}$$

5）はね出しを有する単純梁にはね出し部等分布荷重　　ex56 1

このモデルは、はね出し(片持ち梁)部に等分布荷重が加わっている。モールの定理により、片持ち梁先端のたわみを求める。

最初に、反力を求めよう。両方向の力の釣合と節点 1 を中心とするモーメントの釣合を以下に示す。

$$\sum X = 0; H_1 = 0; \quad \sum Y = 0; \bar{P} - V_1 - V_2 = 0;$$
$$M_1 = 0; \bar{P}(l + a/2) - V_2 l = 0 \leftarrow \quad \bar{P} = p_w a$$

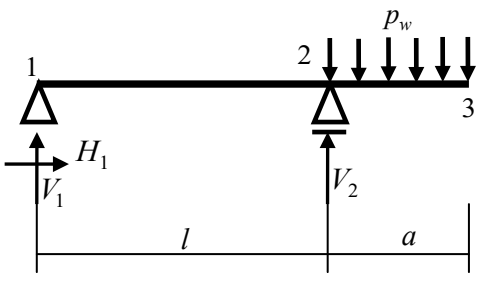


図 13 単純梁＋片持ち梁

上式を解き、以下のように反力を求める。

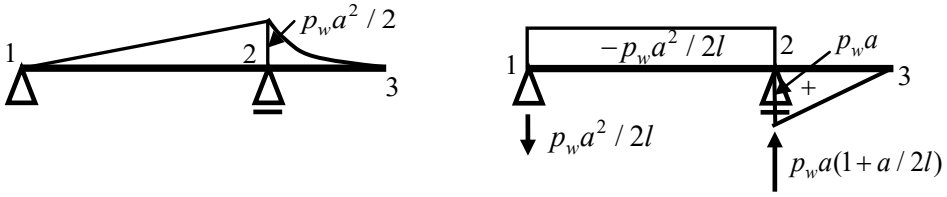
$$V_2 = p_w a(1 + a/2l); \quad V_1 = p_w a - p_w a(1 + a/2l) = -p_w a^2/2l; \quad H_1 = 0$$

次に、断面力分布を求める。曲げモーメントは、まず片持ち梁部分か

ら決める。片持ち梁の曲げモーメント分布は、他の部分の影響を受けないことから、端部の曲げモーメントは$M_2 = p_w a^2 / 2$となる。後は、単純梁部の曲げモーメントは、荷重が加わっていないため、両端の曲げモーメントを直線で繋げば、図 14(a)のように得られる。節点 1 を原点にすると、この曲げモーメント関数は次式となる。

$$M(x) = -\frac{p_w a^2}{2l} x$$

せん断力図も容易に求められ、支持点との力の釣合、もしくは曲げモーメントの傾きから、同図(b)のようになる。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

図 14 単純梁＋片持ち梁の断面力分布

次に、梁のたわみをモールの定理により求めるが、単純梁部と片持ち梁部とに分けて解く必要がある。梁の微分方程式でもモールの定理でもモデルが少し複雑になると、理論解析は結構面倒になる。ここではまず、先の微分方程式で用いた手法に倣って、モールの定理より節点 2 の回転角を求めることにする。

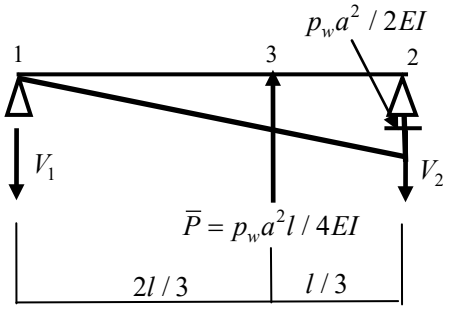


図 15 モールの定理を適用するためのモデル

先の基本構造の応力解析手法に従い、単純梁部の曲げモーメントを$-EI$で割り、荷重の方向は図 15 のように反対側となる。まず、反力から求めよう。分布荷重の合力は、$\bar{P} = p_w a^2 l / 4EI$であり、力の釣合より、次のように反力が得られる。

$$V_1 + V_2 - \frac{p_w a^2 l}{4EI} = 0; \quad M_1 = 0 : V_2 l - \frac{p_w a^2 l}{4EI}\frac{2l}{3} = 0 \rightarrow \quad V_2 = \frac{p_w a^2 l}{6EI}; \quad V_1 = \frac{p_w a^2 l}{12EI}$$

節点 2 における回転角$\theta(l) = \theta_2$は、モールの定理によれば、その節点におけるせん断力に等しい。さらに、せん断力$Q(l)$は、反力との力の釣合より、$Q(l) = V_2 = p_w a^2 l / 6EI \rightarrow \theta_2$となり、回転角の値となる。この回転角によって、片持ち梁部が剛体回転し、先端の鉛直変位が、節点 2 の回転角に長さaを掛けることで、$\delta_2 = \theta_2 a = p_w a^3 l / 6EI$として求められる。

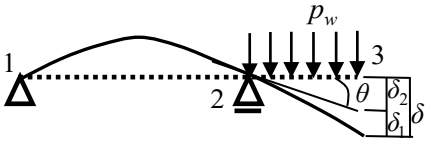


図 16 片持ち梁先端のたわみ

片持ち梁先端のたわみは、図 16 に示すように基本構造である片持ち梁＋等分布荷重のたわみδ_1に、上の節点 2 での回転角より生じるたわみδ_2を加えることで次のように求められる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{p_w a^4}{8EI} + \frac{p_w a^3 l}{6EI} = \frac{p_w a^4}{24EI}(3 + 4\frac{l}{a})$$

基礎５７話 No.4　ひじ型骨組 水平荷重による柱頭水平変位

付 13 話参照
ex53_1;

6）ひじ型骨組＋水平荷重　　ex53_1

このモデルは既に梁の微分方程式を用いて応力解析した。ここでは、モールの定理を用いて柱頭水平変位を求める。骨組は静定構造物であることから、断面力の求め方は、梁の微分方程式を用いた方法と全く同一である。簡単に振り返ってみよう。まず、反力は次式より求められる。

$$V_1+V_2=0;\quad H_1=P;\quad Ph-V_2l=0\rightarrow\quad V_1=-Ph/l;\quad V_2=Ph/l;\quad H_1=P$$

次に、柱の曲げモーメントは、点1から x 点でのモーメントの釣合より次式となり、結果、曲げモーメント関数が右式として得られる。

$$-M(x)+H_1x=0\rightarrow\quad M(x)=Px$$

梁の曲げモーメント関数も同様で、節点3から x の位置でのモーメントの釣合より次式で与えられ、曲げモーメントは同式右となる。

$$-M(x)+H_1h+V_1x=0\rightarrow\quad M(x)=Ph-\frac{Ph}{l}x$$

せん断力は、反力との力の釣合もしくは曲げモーメントの傾きから求められる。また、軸力は反力との力の釣合より得られる。梁の軸力は節点2の境界がローラー支持であることからゼロとなる。曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を各々図18に示す。

次に、モールの定理を用いて、柱頭の水平変位を求める。柱と梁の曲げモーメント関数を求めたので、その曲げモーメントを $-EI$ で割った関数を荷重とする。ただし、梁の断面二次モーメントは I_b であり、柱のそれは I_c とする。荷重の方向を考慮して、図 19 のように曲げモーメントと反対側に描く。

同図の断面力をそのまま求めても水平変位は得られない。なぜなら、梁の微分方程式は梁のたわみ、つまり図芯軸に対し直交方向の変位を求めており、節点3における変位の適合が得られない。つまり、梁の鉛直方向変位と柱の鉛直方向変位は異なるからである。そこで、梁と柱を分けてモールの定理を適用する。ここでは、両端の境界条件に気を付けてモールの定理を用いなければならない。

まず、図20に示す梁の断面力を求める。右端の支持点は元の骨組と同じでローラー支持で良い。ただし、左端の境界は柱の伸縮が解析では無視されるため、上下方向は拘束され、回転は自由、つまりピン支持と同じである。荷重は図のように三角形状の分布荷重であり、左端は Ph/EI_b となる。この三角形状の荷重の合力は $\overline{P}_b=Phl/2EI_b$ であり、荷重中心位置は左端より $l/3$ の位置となる。まず、荷重と反力との力の釣合より

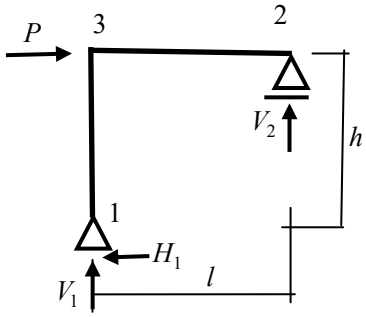
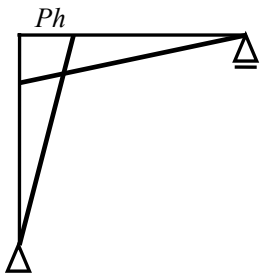
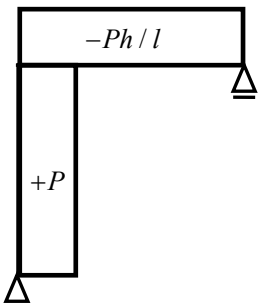


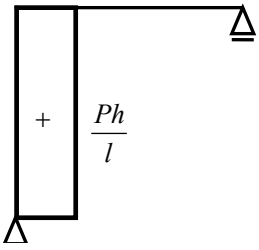
図 17 解析モデル



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 18 骨組の断面力図

次式が得られ、反力が求められる。

$$\frac{Phl}{2EI_b}-V_3-V_2=0;\quad M_3=0:\frac{Phl}{2EI_b}\frac{l}{3}-V_2l=0\rightarrow V_2=\frac{Phl}{6EI_b};\quad V_3=\frac{Phl}{3EI_b}$$

梁に加わる荷重関数は、梁の曲げモーメント式より、

$$p_2(x)=\frac{1}{EI_b}(Ph-\frac{Ph}{l}x)=\frac{Ph}{EI_b}(1-\frac{x}{l})$$

であり、左端から x の位置における曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M_2(x)=V_3x-\int_0^x(x-X)p_2(X)dX=\frac{Phl}{3EI_b}x-\frac{Ph}{EI_b}\int_0^x(x-X)(1-\frac{X}{l})dX$$

$$=\frac{Ph}{EI_b}\{\frac{xl}{3}-\left[xX-(1+\frac{x}{l})\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3l}\right]_0^x\}=\frac{Phl^2}{6EI_b}\{2(\frac{x}{l})-3(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l})^3\}\rightarrow v_2(x)$$

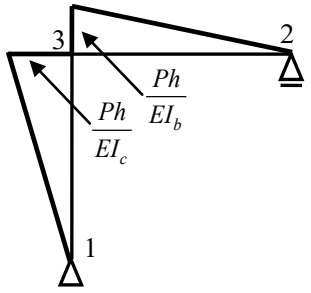


図 19 曲げモーメントを荷重に置き直した骨組

同様に、せん断力は次式で与えられる。

$$Q_2(x)=V_3-\int_0^x p_2(X)dX=\frac{Phl}{3EI_b}-\frac{Ph}{EI_b}\int_0^x(1-\frac{X}{l})dX$$

$$=\frac{Ph}{EI_b}\{\frac{l}{3}-\left[X-\frac{X^2}{2l}\right]_0^x\}=\frac{Phl}{6EI_b}\{2-6\frac{x}{l}+3(\frac{x}{l})^2\}\rightarrow\theta_2(x)$$

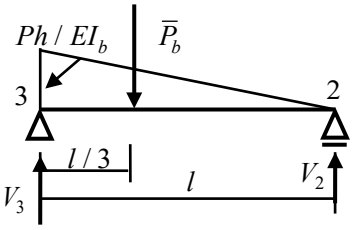


図 20 梁領域の力の釣合

ここで、節点3での梁の回転角 θ_3 は、上式に $x=0$ を代入することで、$\theta_2(0)=\theta_3=Phl/3EI_b$ となる。

続いて、図21に示す柱の断面力を求めよう。両端の境界条件の設定は少し難しい。左端はピン支持であるが、右端は自由端であり、荷重として P_3 とモーメント $\bar{M}_3$ が加わる。柱の回転角は梁で求めた θ_3 に等しいので、せん断力 $Q(h)$ が θ_3 に等しく、材端の荷重は図の方向に $P_3=\theta_3$ となる。三角形分布荷重の合力は $\bar{P}_c=Ph^2/2EI_c$ であり、荷重中心位置は左端より $2h/3$ となる。荷重と反力の鉛直方向の力の釣合より、V_1 は

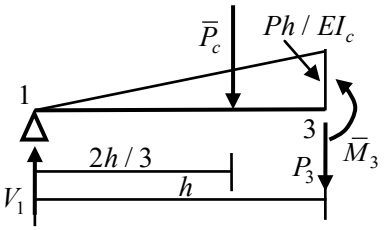


図 21 柱領域の力の釣合

$$\frac{Ph^2}{2EI_c}-V_1+P_3=0\rightarrow V_1=\frac{Ph^2}{2EI_c}+\frac{Phl}{3EI_b}=\frac{Ph}{6E}(3\frac{h}{I_c}+2\frac{l}{I_b})$$

となり、柱のたわみと回転角の関数が以下のように得られる。

$$M_1(x)=V_1x-\frac{1}{EI_c}\int_0^x PX(x-X)dX=\frac{Ph^2}{2EI_c}x+\frac{Phl}{3EI_b}x-\frac{P}{EI_c}\left[\frac{xX^2}{2}-\frac{X^3}{3}\right]_0^x=\frac{Ph^2}{2EI_c}x+\frac{Phl}{3EI_b}x-\frac{Px^3}{6EI_c}$$

$$=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-(\frac{x}{h})^3+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})(\frac{x}{h})+3(\frac{x}{h}))\rightarrow v_1(x)$$

$$Q_1(x)=V_1-\frac{1}{EI_c}\int_0^x PXdX=\frac{Ph^2}{2EI_c}+\frac{Phl}{3EI_b}-\frac{P}{EI_c}\left[\frac{X^2}{2}\right]_0^x$$

$$=\frac{Ph^2}{6EI_c}(-3(\frac{x}{h})^2+2\frac{I_c}{I_b}(\frac{l}{h})+3)\rightarrow\theta_1(x);\quad Q(h)=\frac{Phl}{3EI_b}\rightarrow P_3$$

節点3の柱頭水平変位 δ は、柱のたわみ関数に $x=h$ を代入することで得られる。

$$\delta=v_1(h)=\frac{Ph^3}{6EI_c}(-1+2\frac{I_c}{I_b}\frac{l}{h}+3)=\frac{2Ph^3}{6}(\frac{1}{EI_c}+\frac{1}{EI_b}\frac{l}{h})=\frac{2Ph^2}{3}(\frac{1}{K_c}+\frac{1}{K_b})$$

ただし、柱と梁の曲げ剛性を次のように K_c,K_b で表す。

$$K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l}$$

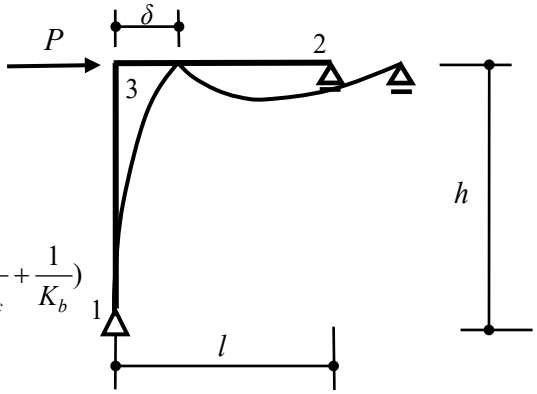


図 22 骨組の変形状態

基礎５８話 No.1　単位荷重法の解説
片持ち梁先端集中荷重による先端変位

付2話参照
ex3_3

これまで、梁の微分方程式とモールの定理を用いて、基本的な梁のたわみを求めてきた。同法は、少し基本構造を拡張すると途端に解析自身が面倒となり、利用しづらい。そこで骨組の変位やトラス構造の変位を求める手法として、使い易い仮想仕事の原理による方法を紹介する。

仮想仕事の原理(principle of virtual work)とは、「ある物体に複数の力が作用して釣合状態にある場合、その物体が十分小さい仮想変位を受けるとき、その力の為す仕事はゼロである」である。言い換えると、「複数の外力が作用し、構造物が釣合状態にあるとき、境界条件を満足する任意の微小変形に対して、外力と内力のなす仕事は等しい」。この仮想仕事の原理は、1725 年ごろヨハン・ベルヌーイが創始したと言われており、その子のダニエルと弟子のオイラーが材料力学に応用した。

この仮想仕事の原理は色々なところで用いられるが、ここでは骨組の変位を求める手法として利用する。最初に、骨組に関する内力仕事を求めるが、まずは、断面力と歪の関係を復習する。

1）軸力と歪の関係：　$N = EA\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 = N / EA$

2）曲げモーメントと曲率の関係：　$M = EI\kappa \rightarrow \kappa = M / EI$

3）せん断力とせん断ひずみの関係：　$Q = GA\gamma / k \rightarrow \gamma = kQ / GA$

上式において、ε_0 と κ は各々軸歪と曲げ歪に関する曲率を表す。また、k はせん断変形に関する断面の形状係数である。

部材内に蓄えられる内力仕事は、応力・歪を部材内について積分して求めるが、部材の断面力を利用すると次式左で表される。さらに、上の断面力と歪の関係を用いると次式右となる。

ベルヌーイ・オイラー梁ではせん断ひずみを考慮していないため、せん断力による仕事は発生しない。
　このテキストでは、単位荷重法の第 3 項は考慮しないことになる。

1）軸力による仕事：　$\int_0^l N\varepsilon_0 dx = \int_0^l \frac{N \cdot N}{EA} dx$

2）曲げモーメントによる仕事：　$\int_0^l M\kappa dx = \int_0^l \frac{M \cdot M}{EI} dx$

3）せん断力による仕事：　$\int_0^l Q\gamma dx = \int_0^l k\frac{Q \cdot Q}{GA} dx$

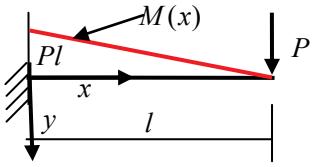
骨組内の任意点変位や回転角を求める手法として、先の仮想仕事の原理を応用した**単位荷重法**が便利である。最初に、単位荷重法の計算式を示し、後にその使用法について学ぶ。

R35：仮想仕事の原理で変位を求める：単位荷重法

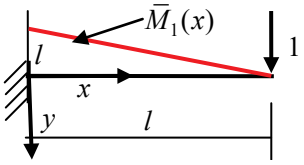
$$1 \cdot d_m = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \left(\frac{N \cdot \bar{N}}{EA} + \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} + k\frac{Q \cdot \bar{Q}}{GA} \right) dx$$

荷重が加わり、釣り合った状態の実構造物と、全く同じ仮想の構造物

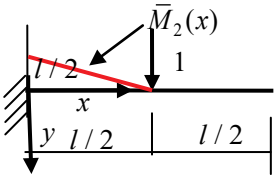
を考え、実構造物の特定点 m で変位 v_m を求めたいとき、仮想構造物内の対応点 $\bar{m}$ に単位集中荷重 $\bar{P}_m=1$ あるいは単位モーメントを作用させる。その際、仮想骨組に生じる仮想の軸力、曲げモーメント、せん断力を各々 $\bar{N},\bar{M},\bar{Q}$ とすると上式が成立し、d_m として実構造物の特定点の変位が得られる。これが**単位荷重法**といわれる理論である。同式の誘導は応用力学の専門書を読まれたい。単位荷重法は演習を通して理解しよう。



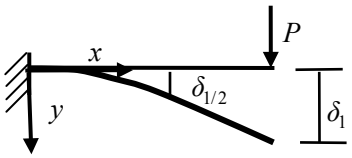
(a) 曲げモーメント図



(b) 先端単位荷重による曲げモーメント図



(c) 梁中央単位荷重による曲げモーメント図



(d) たわみ曲線

図 1 単位荷重法

1) 片持ち梁に先端集中荷重　　ex3_3

図 1(a)の梁先端に集中荷重が加わる片持ち梁について、先端と中央の変位を求める。この例題は梁の微分方程式で既に解かれており、曲げモーメント関数とたわみ関数は次式で与えられる。

$$M(x)=P(x-l);\quad v(x)=\frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3)$$

上式右より先端及び梁中央のたわみを求めると、以下のようである。

$$v(l)=\frac{Pl^3}{6EI}(3-1)=\frac{Pl^3}{3EI};\quad v(\frac{l}{2})=\frac{Pl^3}{6EI}(3(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^3)=\frac{Pl^3}{48EI}(6-1)=\frac{5Pl^3}{48EI}$$

次に、単位荷重法を用いて、片持ち梁の先端及び梁中央のたわみを求めてみよう。先端集中荷重を受ける片持ち梁の曲げモーメント関数は、

$$M(x)=P(x-l)$$

であり、図 1(b)と(c)に示される先端及び梁中央の単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}_1(x)$ と $\bar{M}_2(x)$ は次式で与えられる。

$$\bar{M}_1(x)=(x-l);\quad \bar{M}_2(x)=(x-l/2)\leftarrow\quad x<l/2$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、先端及び中央のたわみを求める。

$$1\cdot\delta_1=\int_0^l\frac{M\cdot\bar{M}_1}{EI}dx=\int_0^l\frac{P(x-l)(x-l)}{EI}dx=\frac{P}{EI}\int_0^l(x-l)^2dx$$

$$1\cdot\delta_{1/2}=\int_0^{l/2}\frac{M\cdot\bar{M}_2}{EI}dx=\int_0^{l/2}\frac{P(x-l)(x-l/2)}{EI}dx=\frac{P}{2EI}\int_0^{l/2}(x-l)(2x-l)dx$$

ここで、図 1(d)に示されるように、δ_1 は片持ち梁先端のたわみを、また $\delta_{1/2}$ は梁中央のたわみを意味する。後は、上の積分を計算すれば良い。

$$\delta_1=\frac{P}{3EI}\Big[(x-l)^3\Big]_0^l=\frac{P}{3EI}(0+l^3)=\frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\delta_{1/2}=\frac{P}{2EI}\int_0^{l/2}(2x^2-3lx+l^2)dx=\frac{P}{2EI}\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3lx^2}{2}+l^2x\right]_0^{l/2}$$

$$=\frac{Pl^3}{2EI}(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2})=\frac{Pl^3}{48EI}(2-9+12)=\frac{5Pl^3}{48EI}$$

得られた結果は、梁の微分方程式で求めたたわみと同じとなる。このように、実構造物の断面力が判明すれば、容易に任意点の変位が求められることが分かる。

基礎５９話 No.2　単純梁と片持ち梁 中央集中荷重と等分布荷重

付 2 話参照
ex3_1 ~ ex3_4

今回は、仮想仕事の原理を応用した単位荷重法を用いて、図 2 と 3 に示す静定基本構造のたわみを求めてみよう。単位荷重法の計算式を再度以下に示す。

$$1\cdot d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}+\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\right)dx$$

2）単純梁に梁中央集中荷重　ex3_1

図 4 の節点 1-3 間の単純梁の曲げモーメント関数は、

$$M(x)=Px/2$$

であり、単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ も同様に、

$$\bar{M}(x)=x/2$$

となる。上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、梁中央つまり最大たわみを求める。ただし、節点 3-2 間では、上記の値と同じとなることから、節点 1-3 間の積分値を 2 倍すれば良い。またここでは、曲げによるたわみのみ考慮するため、せん断力や軸力の項は無視する。

$$1\cdot\delta=2\int_0^{l/2}\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx$$

上の積分を計算すると、梁中央のたわみが求められる。

$$\delta=2\int_0^{l/2}\frac{Px\cdot x}{4EI}dx=\frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}=\frac{P}{2EI}\cdot\frac{l^3}{24}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

回転角の最大値は、両支持点で生じる。そこで節点 1 に単位モーメント荷重を加えて、仮想曲げモーメントを求めると、

$$\bar{M}(x)=1-x/l$$

となり、節点 1 における回転角は、次のように求められる。

$$\theta=\int_0^l\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx=\frac{P}{2EI}\left(\int_0^{l/2}x(1-x/l)dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)(1-x/l)dx\right)=\frac{P}{2EI}\left(\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3l}\right]_0^{l/2}+\left[lx-x^2+\frac{x^3}{3l}\right]_{l/2}^{l}\right)$$

$$=\frac{Pl^2}{2EI}\left\{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)+\left(1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)\right\}=\frac{Pl^2}{16EI}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{Pl^2}{16EI}$$

3）単純梁に等分布荷重　ex3_2

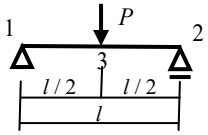
モデルの曲げモーメント分布は、既に次式として求められている。

$$M(x)=-p_w x^2/2+p_w lx/2=\frac{p_w}{2}(lx-x^2)$$

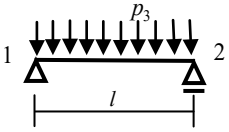
梁中央の単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ は、前例題と同じで以下の関数となる。

$$\bar{M}(x)=x/2$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位

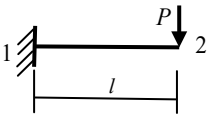


(a) 中央集中荷重

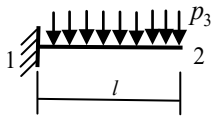


(b) 等分布荷重

図 2 単純梁



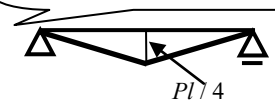
(a) 先端集中荷重



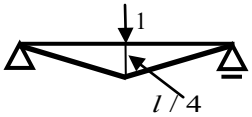
(b) 等分布荷重

図 3 片持ち梁

答え合わせは基礎 50 話を参照されたい。



(a) 曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図
(梁中央に単位集中荷重)

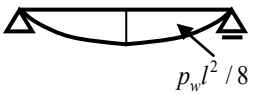
(c) 仮想曲げモーメント図
(梁端部に単位モーメント荷重)

図 4 単純梁＋中央集中荷重

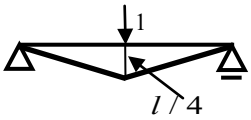
荷重法の計算式に適用して、梁中央つまり最大たわみを求める。

$$\delta = 2\int_0^{l/2} \frac{p_w(lx-x^2)\cdot x}{4EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\left[\frac{lx^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{p_w l^4}{24EI}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\right) = \frac{p_w l^4}{384EI}(8-3) = \frac{5p_w l^4}{384EI}$$



(a)曲げモーメント図



(b)仮想曲げモーメント図
（梁中央に単位集中荷重）

図 5 単純梁＋等分布荷重

4）片持ち梁に先端集中荷重　　ex3_3

ここでは、片持ち梁先端の回転角を求めてみよう。この場合の曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x) = P(x-l)$$

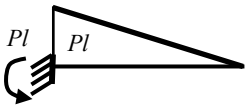
片持ち梁先端に加わる単位モーメント荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ は梁全体一様で、次式となる。

$$\bar{M}(x) = -1$$

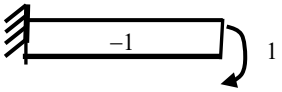
実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、片持ち梁先端の回転角 θ を求める。

$$1\cdot\theta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{P(x-l)(-1)}{EI}dx \rightarrow$$

$$\theta = \frac{P}{EI}\int_0^l (l-x)dx = \frac{P}{EI}\left[lx-\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{Pl^2}{2EI}$$



(a)曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図
（梁端部に単位モーメント荷重）

図 6 片持ち梁＋先端集中荷重

5）片持ち梁に等分布荷重　　ex3_4

図 3(c)の等分布荷重による片持ち梁先端のたわみを求めてみよう。曲げモーメント関数は、次式で与えられている。

$$M(x) = p_w(-x^2/2 + lx - l^2/2)$$

片持ち梁先端に加わる単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ は、以下の関数となる。

$$\bar{M}(x) = (x-l)$$

上の実構造物の曲げモーメントと仮想構造物の曲げモーメントを、単位荷重法の計算式に適用して、先端のたわみを求める。

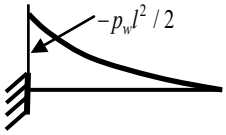
$$\delta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{p_w(-x^2+2lx-l^2)(x-l)}{2EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (-x^3+3lx^2-3l^2x+l^3)dx$$

$$= \frac{p_w}{2EI}\left[-\frac{x^4}{4}+lx^3-\frac{3l^2x^2}{2}+l^3x\right]_0^l = \frac{p_w l^4}{8EI}(-1+4-6+4) = \frac{p_w l^4}{8EI}$$

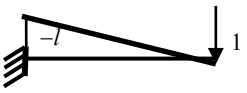
続いて、先端の回転角は次式で与えられる。ただし片持ち梁先端に加える単位モーメント荷重による仮想曲げモーメントは $\bar{M}(x) = -1$ である。

$$\theta = \int_0^l \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx = \int_0^l \frac{p_w(-x^2+2lx-l^2)(-1)}{2EI}dx = \frac{p_w}{2EI}\int_0^l (x^2-2lx+l^2)dx$$

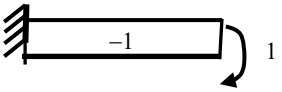
$$= \frac{p_w}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}-lx+l^2x\right]_0^l = \frac{p_w l^3}{6EI}(1-3+3) = \frac{p_w l^3}{6EI}$$



(a)曲げモーメント図



(b)仮想曲げモーメント図
（梁先端に単位集中荷重）



(c) 仮想曲げモーメント図
（梁先端に単位モーメント荷重）

図 7 片持ち梁＋等分布荷重

答え合わせは基礎 56 話を参照されたい。

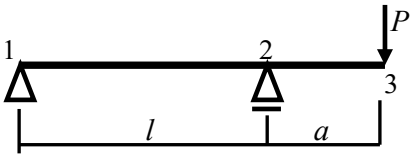
基礎６０話 No.3　はね出しを有する単純梁 ひじ型骨組　3 ヒンジ門型ラーメン

付 13 話と付 15 話参照
ex52_1; ex53_1; ex38_2

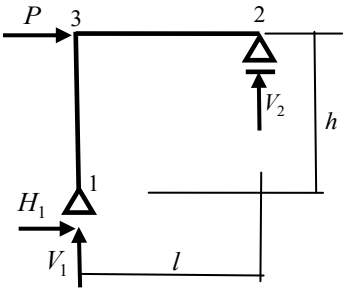
今回も単位荷重法を用いて、図 8 に示す静定構造物のたわみを求めてみよう。単位荷重法の計算式を再度以下に示す。

$$1\cdot d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}+\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\right)dx$$

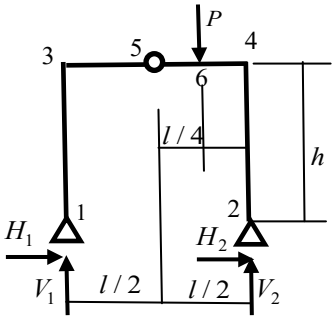
図 8 に示す骨組の断面力は既に求められている。これを利用して、単位荷重法により変位を求める。



(a) はね出しを有する単純梁



(b) ひじ型骨組

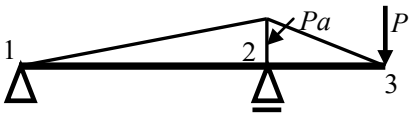


(c) 3 ヒンジ門型ラーメン

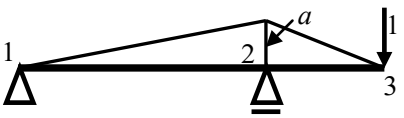
図 8 静定構造物の変位

6) はね出しを有する単純梁　ex52_1

曲げモーメント図は図 9(a)に、また、はね出し先端の単位集中荷重による仮想曲げモーメント $\bar{M}(x)$ も同様に、同図(b)に示される。



(a)曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図

図 9 はね出しを有する単純梁＋先端集中荷重の先端たわみ

部材 1-2 間及び 2-3 間の曲げモーメントと仮想曲げモーメントは

$$M_1(x)=-P(ax/l);\quad \bar{M}_1(x)=-(ax/l)$$
$$M_2(x)=P(x-a);\quad \bar{M}_2(x)=(x-a)$$

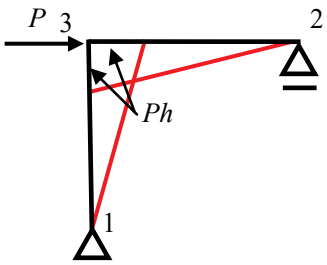
であり、先端のたわみ δ は、単位荷重法により、

$$\delta=\frac{P}{EI}\{\int_0^l(ax/l)(ax/l)dx+\int_0^a(x-a)(x-a)dx\}$$

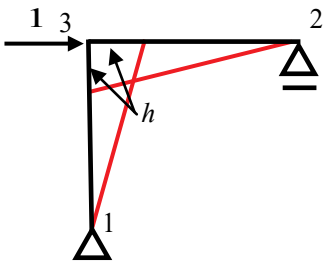
で与えられる。後は上式を積分すれば良い。

$$\delta=\frac{P}{EI}\{(\frac{a}{l})^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l+\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_0^a\}=\frac{P}{EI}(\frac{a^2l}{3}+\frac{a^3}{3})=\frac{Pa^3}{3EI}(1+\frac{l}{a})$$

7) ひじ型骨組　ex53_1



(a)曲げモーメント図



(b) 仮想曲げモーメント図

図 10 ひじ型骨組＋柱頭水平荷重の柱頭水平変位

柱と梁の断面二次モーメントが異なることに注意して、両者の曲げモ

ーメントと仮想曲げモーメントを求める。

$$M_c(x)=Px;\quad \bar{M}_c(x)=x$$

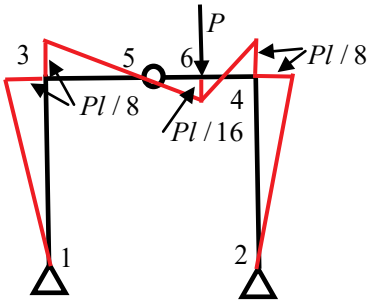
$$M_b(x)=Ph(1-x/l);\quad \bar{M}_b(x)=h(1-x/l)$$

柱頭の水平変位δは、単位荷重法により、

$$1\cdot\delta=\frac{P}{EI_c}\int_0^h x^2dx+\frac{Ph^2}{EI_b}\int_0^l(1-\frac{x}{l})^2dx$$

で与えられる。ここで、I_cは柱、I_bは梁の断面二次モーメントを各々表す。後は上式を積分すれば、柱頭水平変位が次のように得られる。

$$\delta=\frac{P}{EI_c}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h+\frac{Ph^2}{EI_b}\left[x-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{3l^2}\right]_0^l=\frac{Ph^3}{3EI_c}+\frac{Ph^2l}{3EI_b}=\frac{Ph^2}{3E}(\frac{h}{I_c}+\frac{l}{I_b})$$



(a) 曲げモーメント図

8) 3 ヒンジ門型ラーメン＋梁偏位置鉛直荷重　　ex38_2

曲げモーメント図は図 11(a)に示される通りであり、また、梁中央部の鉛直荷重による仮想曲げモーメント図は同図(b)に示される。

柱である部材 1-3 間と 2-4 間の曲げモーメントと仮想曲げモーメントは以下のようである。

$$M_{c1}(x)=-\frac{Pl}{8}(x/h);\quad \bar{M}_{c1}(x)=-\frac{l}{4}(x/h);\quad M_{c2}(x)=\frac{Pl}{8}(x/h);\quad \bar{M}_{c1}(x)=\frac{l}{4}(x/h)$$

また、梁は 3-5 間、5-6 間及び 6-4 間の 3 つに分割して積分する。ここで用いる座標原点は、いずれも各分割部材の左側の節点とする。

$$M_{b1}(x)=\frac{Pl}{8}(-1+2x/l);\quad \bar{M}_{b1}(x)=\frac{l}{4}(-1+2x/l);M_{b2}(x)=\frac{Pl}{4}(x/l);$$

$$\bar{M}_{b2}(x)=-\frac{l}{2}(x/l);\quad M_{b3}(x)=\frac{Pl}{16}(1-12x/l);\quad \bar{M}_{b3}(x)=-\frac{l}{8}(1+4x/l)$$

上記の関数を用いて単位荷重法により、梁中央のたわみを求める。

$$1\cdot\delta=\frac{2Pl^2}{32EI_ch^2}\int_0^h x^2dx+\frac{P}{EI_b}\{\frac{1}{32}\int_0^{l/2}(-l+2x)^2dx-\frac{1}{8}\int_0^{l/4}x^2dx-\frac{1}{128}\int_0^{l/4}(l-12x)(l+4x)dx\}$$

上の積分を求めることで梁中央のたわみが得られる。ここでは、上の 4 つの積分を以下のように分割して行う。

$$\delta_1=\frac{2Pl^2}{32EI_ch^2}\int_0^h x^2dx=\frac{Pl^2}{16EI_ch^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{Pl^2h}{48EI_c}=\frac{Pl^2}{24}\frac{1}{2EI_c/h}=\frac{Pl^2}{24}\frac{1}{K_c}\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h}$$

$$\delta_2=\frac{P}{32EI_b}\int_0^{l/2}(-l+2x)^2dx=\frac{P}{32EI_b}\left[\frac{1}{3}(-l+2x)^3\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{l/2}=\frac{P}{192EI_b}(0-(-l)^3)=\frac{Pl^3}{192EI_b}$$

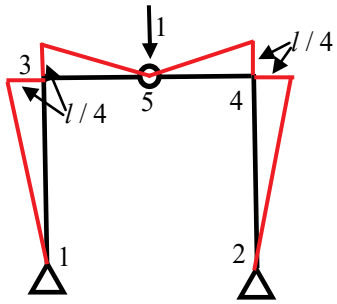
$$\delta_3=-\frac{P}{8EI_b}\int_0^{l/4}x^2dx=-\frac{P}{8EI_b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/4}=-\frac{Pl^3}{1536EI_b}$$

$$\delta_4=-\frac{P}{128EI_b}\int_0^{l/4}(l-12x)(l+4x)dx=-\frac{P}{128EI_b}\left[l^2x-4lx^2-16x^3\right]_0^{l/4}=-\frac{Pl^3}{128EI_b}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=\frac{Pl^3}{512EI_b}$$

従って、梁中央の鉛直方向変位は、次式となる。

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=\frac{Pl^2h}{48EI_c}+\frac{Pl^3}{EI_b}(\frac{1}{192}-\frac{1}{1536}+\frac{1}{512})=\frac{Pl^2h}{48EI_c}+\frac{10Pl^3}{1536EI_b}=\frac{Pl^2}{24}(\frac{1}{K_c}+\frac{5}{16K_b})$$

$$\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l}$$



(b) 仮想曲げモーメント図
(梁中央に単位集中荷重)

図 11　3 ヒンジ門型ラーメン＋梁鉛直荷重による中央の鉛直方向変位

基礎６１話 No.4　各種トラスの変位

付 15 話参照
ex43_1; ex44_1; ex44_2
ex45_4

今回は、静定トラスの節点変位を単位荷重法により求める。単位荷重法の計算式を再度以下に示す。

$$1\cdot d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l}\left(\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}+\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\right)dx$$

R36：仮想仕事の原理でトラスの変位を求める：単位荷重法

トラス構造では、曲げやせん断変形を考慮しないこと、及び一つの部材内では軸力は変化しないことを考慮すると、単位荷重法の計算式は次式となる。

$$d_m=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{N_i\cdot\bar{N}_i}{EA_i}dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i\cdot\bar{N}_i}{k_i}\leftarrow\quad k_i=EA_i/l_i$$

ただし、k_i は部材 i の軸方向剛性 EA_i/l_i を表す。このように、静定トラスでは、単位荷重法を用いれば容易に任意点の変位が求められる。

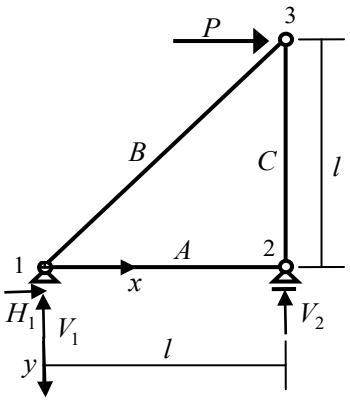


図 12 トラスの基本構造

9）図 12 に示すトラスの基本構造の水平変位　　ex43_1

図 12 に示すトラス基本構造の水平変位を、単位荷重法により求める。実構造である 3 つの部材の軸力は既に求められ、以下のようである。

$$N_A=0;\quad N_B=\sqrt{2}P;\quad N_C=-P$$

節点 3 に加わる単位集中荷重による仮想軸力 $\bar{N}_i$ も同様に、

$$\bar{N}_A=0;\quad \bar{N}_B=\sqrt{2};\quad \bar{N}_C=-1$$

となる。従って、節点 3 の水平方向変位 δ は、次のようである。

$$\delta=\frac{P\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{k_1}+\frac{P\cdot1}{k_2}=P\left(\frac{2}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)\leftarrow\quad k_1=\frac{EA_1}{\sqrt{2}l};\quad k_2=\frac{EA_2}{l}$$

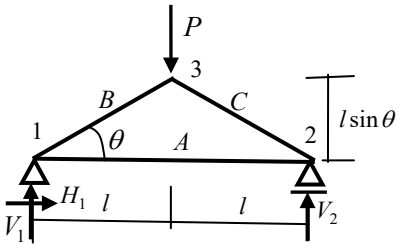


図 13 山形トラスの鉛直方向変位

10）図 13 に示す山形トラスの頂点鉛直変位　　ex44_1

まず、トラスの軸力を求めよう。この構造は対称構造・対称荷重であり、対称変位で対称応力状態となる。従って、反力は $H_1=0;V_1=V_2=P/2$ となる。節点 1 における力の釣合より、軸力 N_A と N_C は

$$\sum Y=0;V_1+N_B\sin\theta=0\rightarrow N_B=-\frac{P}{2\sin\theta}=N_C$$

$$\sum X=0;N_A+N_B\cos\theta=0\rightarrow N_A=\frac{P\cos\theta}{2\sin\theta}$$

となる。節点 3 に加わる単位集中荷重による仮想軸力 $\bar{N}_i$ も同様である。

$$\bar{N}_B=-\frac{1}{2\sin\theta}=\bar{N}_C;\quad \bar{N}_A=\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$$

従って、節点 3 の鉛直方向変位は、次式となる。

$$\delta=\frac{P\cos^2\theta}{4k_1\sin^2\theta}+2\frac{P}{4k_2\sin^2\theta}=\frac{P}{4\sin^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{k_1}+\frac{2}{k_2}\right)\leftarrow\quad k_1=\frac{EA_1}{2l};k_2=\frac{EA_2}{l/\cos\theta}$$

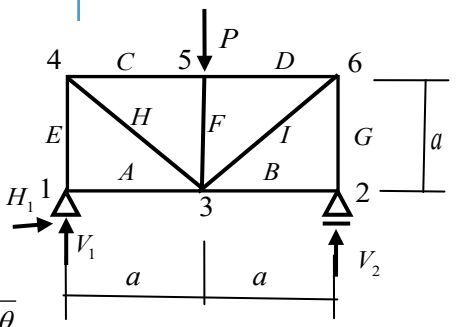


図 14 単純梁型トラスの鉛直方向変位

11）図 14 に示す単純梁型トラスの頂点鉛直変位　　ex44_2

このトラスは、全て同一の断面とする。また対称形状で対称荷重であ

ることより、対称応力状態となる。そこでまずは、骨組左半分の軸力を求める。反力は、$H_1=0;V_1=V_2=P/2$ であり、節点 1 で節点法を用いると、軸力 N_A と N_E は

$$\sum X=0;N_A=0;\quad \sum Y=0;V_1+N_E=0\rightarrow N_E=-P/2$$

となる。さらに、図 15 を参照に切断法を用いると、部材 C の軸力 N_C は、節点 3 を中心とするモーメントの釣合より

$$M_3=0;a\cdot P/2+a\cdot N_C=0\rightarrow \quad N_C=-P/2$$

また、上下方向の釣合より、軸力 N_H は

$$\sum Y=0;P/2-N_H\sin\theta=0\rightarrow N_H=\sqrt{2}P/2$$

となる。次に、節点 5 での鉛直方向の力釣合より、 N_F は

$$\sum Y=0;P+N_F=0\rightarrow N_F=-P$$

となり、以上求めた軸力を表 1 にまとめる。単位集中荷重による仮想軸力 $\bar{N}_i$ も同様であり、表 1 の軸力から荷重 P を 1 に替えることで仮想軸力となる。節点 6 の鉛直方向変位は、下の表を用いると次式となる。

$$\delta=\frac{P}{\bar{k}}(4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}+1\cdot1)=\frac{P(2+\sqrt{2})}{\bar{k}}\leftarrow\bar{k}=\frac{EA}{a};k_s=\frac{EA}{\sqrt{2}a}=\frac{\bar{k}}{\sqrt{2}}$$

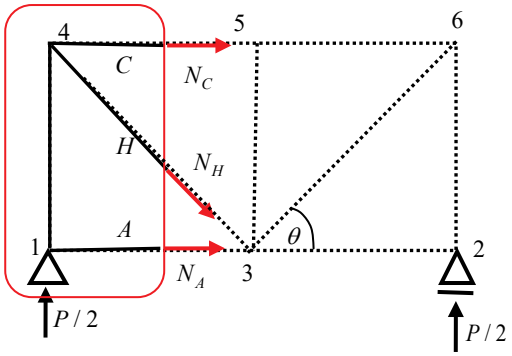


図 15 単純梁型トラスの応力解析
切断法における断面力の仮定

表 1 単純梁型トラスの軸力一覧

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_A	0	N_C	$-P/2$	N_E	$-P/2$
N_F	$-P$	N_H	$\sqrt{2}P/2$		

12) 図 16 に示す片持ち型トラスの荷重点鉛直変位

ex45_4

トラスの断面は斜材のみ A_s とし、他は全て同一とする。また斜材の長さは $\sqrt{2}a$ である。部材の軸方向剛性は、$\bar{k}=EA/a$ であるが、斜材の軸方向剛性は $\bar{k}_s=EA_s/(\sqrt{2}a)$ となる。各部材の軸力は既に求められ、表 2 にまとめられている。単位集中荷重による仮想軸力 $\bar{N}_i$ も同様であり、表 2 の荷重 P を 1 に替えると仮想軸力となる。

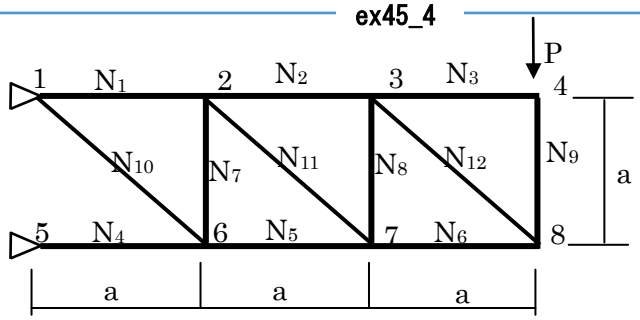


図 16　先端に集中荷重＋片持ち型トラス

表 2 片持ち型トラスの軸力一覧

部材断面名	断面力	部材断面名	断面力	部材断面名	断面力
N_1	$2P$	N_2	P	N_3	0
N_4	$-3P$	N_5	$-2P$	N_6	$-P$
N_7	$-P$	N_8	$-P$	N_9	$-P$
N_{10}	$\sqrt{2}P$	N_{11}	$\sqrt{2}P$	N_{12}	$\sqrt{2}P$

節点 4 の鉛直方向変位は、上の表を用いると次式となる。

$$\delta=\frac{P}{\bar{k}}(2\cdot2+1\cdot1+0+3\cdot3+2\cdot2+4\cdot1\cdot1)+\frac{P}{k_s}(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=\frac{22P}{\bar{k}}+\frac{6P}{k_s}$$

基礎６２話　不静定構造の応力解析 不静的次数を求める

今回から不静定構造の応力解析について学ぶ。ベルヌーイ・オイラー梁理論によって、曲げを受ける梁の微分方程式は次の 2 式となり、連立微分方程式となる。第 1 式の右が断面力の釣合を表し、第 2 式が梁の微分方程式である。

$$\frac{dM}{dx}=Q(x);\quad \frac{dQ}{dx}=-p_w(x)\rightarrow \frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x);$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$$

静定構造では、断面力の釣合式のみで曲げモーメントやせん断力が決定し、梁の材料特性である断面二次モーメント I やヤング係数 E に依存しない。つまり、任意の材料や断面形状の梁を用いても、断面力分布は変わらないことを意味する。応力解析では、断面力分布、特に曲げモーメント関数が決まった後、梁の微分方程式を用いてたわみや回転角を求めることになる。

一方、構造が不静定の場合、両者を同時に、つまり連立微分方程式として解を求めなければならない。ただし、断面が一定であると、上の下式の両辺を 2 回微分し、上式に代入して曲げモーメントを削除することで、次の 4 階の微分方程式用いることもできる。

$$\frac{d^4v}{dx^4}=-\frac{1}{EI}\frac{d^2M}{dx^2};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)\rightarrow\quad EI\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x)$$

上右の微分方程式を解くのは容易である。以下のように上式の両辺を 4 回積分すれば解が得られ、たわみが求められる。

$$EI\frac{d^3v}{dx^3}=\int p_w dx+C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=\iint p_w dxdx+C_1x+C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx}=\iiint p_w dxdxdx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIv(x)=\iiiint p_w dxdxdxdx+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

後は、4 つの積分定数 C_1,C_2,C_3,C_4 を、4 つの境界条件を用いて決定すれば良い。ここで、上記 4 つの式が何を意味するのか、考えてみよう。最後の式はたわみを表し、両辺を EI で割るとたわみ関数が得られる。

$$v(x)=\frac{1}{EI}\{\iiiint p_w dxdxdxdx+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4\}$$

部材の回転角は、法線保持の仮定より、$\theta(x)=dv/dx$ であることから、

第 3 式より、次のようになる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\{\iiint p_w dxdxdx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3\}$$

さらに、

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-M;\quad \frac{dM}{dx}=Q(x)$$

であることから、第 2 式と第 1 式より、

$$M(x)=-EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\{\iint p_w dxdx+C_1x+C_2\}$$

$$Q(x)=\frac{dM}{dx}=-EI\frac{d^3v}{dx^3}=-\int p_w dx+C_1$$

として、断面力が求められる。後は、境界条件として、梁両端の変位と回転角、及び曲げモーメントとせん断力の値から、4 つの積分定数を求める。**前者 4 つを変位境界、後者 4 つを応力境界と呼ぶ**。境界 8 つの中から 4 つを選択し、4 つの未定積分定数を決めることになる。

次に、構造物の安定・不安定、あるいは静定・不静定について学習しよう。力の釣合から、支持点反力や部材応力が決定される構造物を静的構造と呼ぶ。これについては既に学んだ。以後は、この構造以外について、つまり不静定構造について学ぶことにしよう。

平面骨組の静定・不静定に関する判別式を覚えることにしよう。

R37：静定・不静定に関する判別式

以下に示す判別式の値 m（この値を不静定次数とも呼ぶ）がゼロの場合、その骨組は静的となる。

$$m=s+r+n-2k$$

ここで、m ：不静定次数、s ：部材総数、r ：（節点に剛接合された部材－1）の値の総数、n ：反力総数、k ：節点総数を表す。不静定次数は、$m\geq 1$：不静定　$m=0$：静定　$m<0$：不安定を意味する。

上記の判別式を用いて、簡単な構造物の静定・不静定を検証しよう。

例 1）単純梁

$m=1+0+3-2\times 2=0$　⇒静定構造物

s = 1；r = 0；n = 3；k = 2

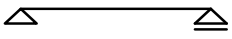


図 1 単純梁の不静定次数

例 2）門型ラーメン

$m=3+(1+1)+4-2\times 4=1$　⇒1 次不静定構造物

s = 3（部材総数 3）；r = 2（1+1）
n = 4（両支持点共ピン支持）；k = 4（4 節点）

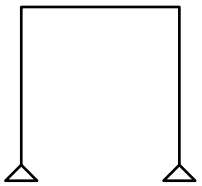


図 2 門型ラーメンの不静定次数

不静定構造の基本構造は両端固定支持梁であり、中央集中荷重と等分布荷重が加わる場合である。この 2 つのモデルは非常に重要であり、解析手法を理解すると共に、断面力分布やたわみなどを覚えよう。

基礎６３話 No.1　両端固定梁＋中央集中荷重 断面力と最大変位

付 16 話参照
ex63_1

今回から不静定構造の応力解析についてお話しする。不静定の基本構造は両端固定支持梁であり、荷重は中央集中荷重と等分布荷重である。この 2 つのモデルは非常に重要であり、その結果を理解すると共に、得られた値を覚えるようにしよう。

1）不静定な基本構造である両端固定梁＋中央集中荷重

ex63_1

前回お話した 4 階の微分方程式の解を用いて、断面力分布とたわみ関数、及び回転角関数を求める。集中荷重の場合、梁全体では通常の関数として扱うことができないため、ここでも梁を 2 つに分けて解を求める。ただ、対称形状で対称荷重であるため、対称応力・対称変形状態となる。そのため、半分の解を求めるのみで良い。静定構造では、まず反力を求めたが、不静定構造では反力は部材の断面力が決定した後、最後に支持点での断面力との釣合より求める。

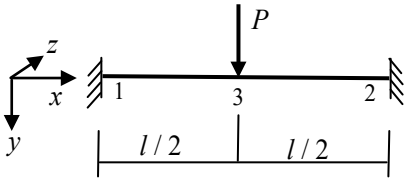


図 1 中央集中荷重＋両端固定支持梁

このモデルでは分布荷重がないことから、4 階の微分方程式の解は以下のようになる。

$$EI\frac{d^3v}{dx^3}=C_1;\quad EI\frac{d^2v}{dx^2}=C_1x+C_2;\quad EI\frac{dv}{dx}=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3;$$

$$EIv(x)=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

次に、以下の 4 つの境界条件より積分定数を決定する。境界条件は左端と中央の節点 3 で以下のように与える。境界条件の上 2 式は左端が固定であることから、また 3 番目は構造が対称で部材中央の回転角がゼロとなることから得られる。最後の境界条件は、図 2 のように梁中央点での上下方向の力の釣合、つまり荷重とせん断力との力の釣合から得られる。

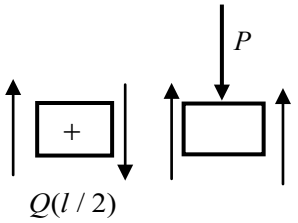


図 2 梁中央での外力とせん断力との力の釣合

$$v(0)=0;\quad \theta(0)=\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0$$

$$\theta\left(\frac{l}{2}\right)=\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}}=0;\quad Q\left(\frac{l}{2}\right)=-EI\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{P}{2}$$

上式の上 2 式より、$C_4=C_3=0$ となる。さらに、上の左式より、

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{l^2C_1}{8}+\frac{l}{2}C_2=0$$

となり、また、同じくの右式より次式が得られる。

$$EI\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\frac{l}{2}}=C_1=-\frac{P}{2}$$

上 2 式より、残りの積分定数が $C_2=Pl/8$ となる。

たわみ関数は求めた全ての積分定数を代入すると、以下のようになる。

$$v(x)=-\frac{P}{12EI}x^3+\frac{Pl}{16EI}x^2=\frac{Pl^3}{48EI}\left(-4(\frac{x}{l})^3+3(\frac{x}{l})^2\right)$$

載荷点における最大たわみ $v_{\max}$ は、上式に $x=l/2$ を代入することで、次のように単純梁のたわみの $1/4$ として求められる。

$$v_{\max}=v\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{Pl^3}{48EI}\left(-4(\frac{1}{2})^3+3(\frac{1}{2})^2\right)=\frac{Pl^3}{192EI}$$

回転角は、たわみと同様、求めた積分定数を代入すると、次式となる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}Px^2+\frac{Pl}{8}x)=\frac{Pl^2}{8EI}(-2(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l}))$$

上式は、$x=0$ 及び $x=l/2$、つまり材端と梁中央でゼロとなり、また、最大値は、上式の微分である曲げモーメントがゼロの位置で最大回転角となる。この位置 $x=l/4$（後で曲げモーメント関数より求める）を上式に代入すると、回転角の最大値は以下の値となる。

$$\theta_{\max}=\theta(\frac{l}{4})=\frac{Pl^2}{8EI}(-2(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4}))=\frac{Pl^2}{64EI}$$

次に、曲げモーメントとせん断力は、前回お話ししたように、微分方程式の積分途中で求めた関数に、得られた積分定数を代入することで、得られる。

$$M(x)=-EI\frac{d^2v}{dx^2}=-C_1x-C_2=-\frac{Pl}{8}+\frac{P}{2}x=-\frac{Pl}{8}\left(1-4(\frac{x}{l})\right)$$

$$Q(x)=-EI\frac{d^3v}{dx^3}=-C_1=\frac{P}{2}$$

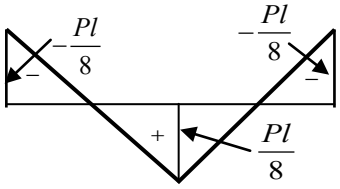
曲げモーメント関数は一次式であり、材端あるいは梁中央位置で最大モーメントとなる。この 2 つの曲げモーメントを各々、材端モーメント M_e と中央モーメント M_c と呼ぶ。

$$M_e=-\frac{Pl}{8};\quad M_c=\frac{Pl}{8}$$

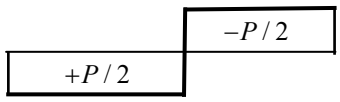
せん断力は荷重が加わっていない領域では定数であり、荷重直下で不連続となる。この位置での不連続は、図 2 に示される荷重との釣合より生じる。得られた式は、先に述べたように解析モデルの左半分の値を与えており、右半分は、構造が対称であることから、右半分にコピーすれば良い。最後に、反力は両端の曲げモーメントとせん断力から次のように求められる。

$$V_1=V_2=\frac{Pl}{2};\quad H_1=H_2=0;\quad M_1=M_2=\frac{Pl}{8}$$

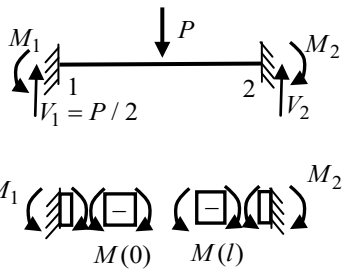
同じ荷重状態の単純梁では、曲げモーメントは両端でゼロ、中央で $M_0=Pl/4$ となる。両端を固定支持とすると曲げモーメントの形状はそのままで、半分せり上がり、材端に曲げモーメントが生じることになる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 外力と反力

図 3 中央集中荷重＋両端固定梁の断面力図

基礎６４話 No.2　両端固定梁＋等分布荷重

付 16 話参照
ex64_1

2）不静定な基本構造である両端固定支持梁＋等分布荷重　　ex64_1

前回の続きで、図 4 に示す両端固定支持梁に等分布荷重が加わる場合の応力解析を行う。等分布荷重 p_w を受ける梁の微分方程式は、

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=p_w$$

で与えられ、上の両辺を4回積分すると、

$$EI\frac{dv^3}{dx^3}=p_wx+C_1\rightarrow\quad -Q(x)$$
$$EI\frac{dv^2}{dx^2}=\frac{1}{2}p_wx^2+C_1x+C_2\rightarrow\quad -M(x)$$
$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{1}{6}p_wx^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3\rightarrow\quad EI\theta(x)$$
$$EIv=\frac{1}{24}p_wx^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

となる。境界条件として、梁両端が固定であることより、以下の4つの条件が得られる。

$$v(0)=0;\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0;\quad v(l)=0;\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=l}=0$$

まず、$x=0$ における節点1のたわみと回転角に対して、境界条件を適用すると、積分定数 C_3,C_4 が決定する。

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=C_3=0;\quad EIv(0)=C_4=0$$

続いて、$x=l$ の節点2のたわみと回転角に境界条件を適用する。

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=l}=\frac{1}{6}p_wl^3+\frac{1}{2}C_1l^3+C_2l=0\rightarrow\frac{1}{6}p_wl^2+\frac{1}{2}C_1l+C_2=0$$
$$EIv(l)=\frac{1}{24}p_wl^4+\frac{1}{6}C_1l^3+\frac{1}{2}C_2l^2=0\rightarrow\frac{1}{12}p_wl^2+\frac{1}{3}C_1l+C_2=0$$

上式を連立にして積分定数 C_1,C_2 を求めると、以下となる。

$$C_1=-\frac{p_wl}{2};\quad C_2=\frac{p_wl^2}{12}$$

今回は、前回と異なり、断面力から求めてみよう。求めた積分定数より、曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x)=-EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{p_w}{2}x^2+\frac{p_w}{2}lx-\frac{p_w}{12}l^2=\frac{p_wl^2}{12}\left(-6(\frac{x}{l})^2+6(\frac{x}{l})-1\right)$$

上式より、梁端部及び中央の曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$M_e=M(0)=-\frac{p_wl^2}{12};\quad M_c=M(\frac{l}{2})=\frac{p_wl^2}{12}\left(-6(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})-1\right)=\frac{p_wl^2}{24}$$

次に、曲げモーメントと同様に、せん断力関数と最大せん断力は、次式

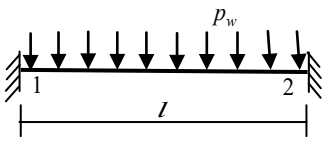
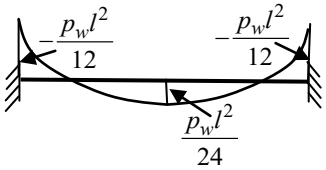
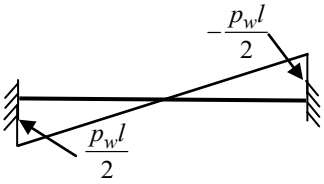


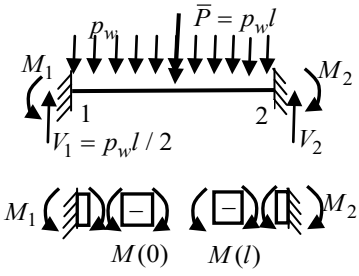
図 4 等分布荷重を受ける両端固定梁



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 外力と反力

図 5 等分布荷重を受ける両端固定梁の断面力図

で与えられる。

$$Q(x)=-p_w x+\frac{p_w l}{2}=\frac{p_w l}{2}\left(-2(\frac{x}{l})+1\right)\rightarrow\quad Q_{\max}=Q(0)=\frac{p_w l}{2};Q(l)=-\frac{p_w l}{2}$$

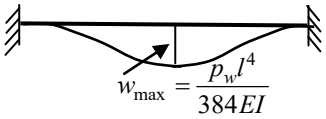
反力は、図5(c)の両端の断面力との釣合より、以下のように求められる。

$$V_1=V_2=\frac{p_w l}{2};\quad H_1=H_2=0;\quad M_1=M_2=\frac{p_w l^2}{12}$$

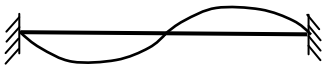
最後に、梁のたわみと回転角は、求めた積分定数をたわみの式と回転角の式に代入すると、

$$v(x)=\frac{p_w}{EI}(\frac{x^4}{24}-\frac{lx^3}{12}+\frac{l^2x^2}{24})=\frac{p_w l^4}{24EI}\left((\frac{x}{l})^4-2(\frac{x}{l})^3+(\frac{x}{l})^2\right)$$

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{p_w}{EI}(\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{4}+\frac{l^2x}{12})=\frac{p_w l^3}{12EI}\left(2(\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l})\right)$$



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 6 等分布荷重を受ける両端固定梁のたわみと回転角分布

たわみの最大値は部材中央に生じ、たわみ式より、

$$v_{\max}=v(l/2)=\frac{p_w l^4}{24EI}\left((\frac{1}{2})^4-2(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^2\right)=\frac{p_w l^4}{384EI}$$

となる。単純梁と比較すると、最大たわみが1/5になっている。

回転角の最大値は、関数の微分がゼロとなる位置を求め、その値を回転角の関数に代入して求める。回転角の微分がゼロとなる位置は、曲げモーメントがゼロとなる位置であることから、

$$6X^2-6X+1=0\rightarrow X=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{6}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}\leftarrow X=\frac{x}{l}$$

上の2点の値を回転角の式に代入すると、最大回転角が得られる。

$$\theta(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6})=\frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\left(2(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6})^2-3(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6})+1\right)$$

$$=\frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{18}(3\pm\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{3})+1\right)=\frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}(\frac{1}{6}(1\mp\sqrt{3}))=\frac{\mp\sqrt{3}p_w l^3}{216EI}$$

以下に基本構造である単純梁と固定支持梁の最大曲げモーメントとたわみなどをまとめる。基本中の基本なので良く覚えておこう。

R38：単純梁と固定支持梁の曲げモーメントと最大たわみ

1:中央集中荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{P}{2};\quad M_{\max}=\frac{Pl}{4};\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{16EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

2：等分布荷重＋単純梁

$$Q_{\max}=\frac{p_w l}{2};\quad M_{\max}=\frac{p_w l^2}{8};\quad \theta_{\max}=\frac{p_w l^3}{24EI};\quad v_{\max}=\frac{5p_w l^4}{384EI}$$

3：中央集中荷重＋固定支持梁

$$Q_{\max}=\frac{P}{2};\quad M_e=\frac{Pl}{8};\quad M_c=\frac{Pl}{8};\quad \theta_{\max}=\frac{Pl^2}{64EI};\quad v_{\max}=\frac{Pl^3}{192EI}$$

4：等分布荷重＋固定支持梁

$$Q_{\max}=\frac{p_w l}{2};\quad M_e=\frac{p_w l^2}{12};\quad M_c=\frac{p_w l^2}{24};\quad \theta_{\max}=\frac{\sqrt{3}p_w l^3}{216EI};\quad v_{\max}=\frac{p_w l^4}{384EI}$$

基礎６５話 No.1　一端固定・他端ピン支持梁＋等分布荷重

付 16 話参照
ex65_1

前回は、基本構造である両端固定支持梁の応力解析を行った。今回以降は、基本構造を少しだけ複雑にした骨組について、断面力と変位やたわみを求める。ここではまず、図 1 に示す一端固定・他端ピン支持の不静定梁が等分布荷重を受ける梁の応力解析を行い、断面力の分布とたわみ曲線、あるいは最大曲げモーメントや最大変位を求める。

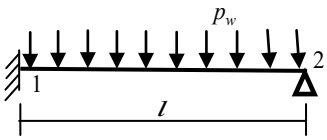


図 1 等分布荷重を受ける一端固定・他端ピン支持梁

1）一端固定・他端ピン支持梁＋等分布荷重　ex65_1

今回の不静的梁の解析でも、基本構造と同じで、次の 4 階の微分方程式を使用する。座標系として原点は節点 1 とし、x は材軸の節点 2 方向、y は下方向を正とする。

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=p_w$$

ここで、$p_w(x)$ は分布荷重を表す関数であるが、ここでは等分布荷重であるため定数となる。解析方法及び解析手順は、基本構造と全く同一、単に境界条件が異なるのみである。

上式を解くために、両辺を 4 回積分する。これについては既にお話ししたので、そちらを参照されたい。ここでは、たわみの関数と回転角の関数を示す。

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{p_w}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$
$$EIv(x)=\frac{p_w}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

上のたわみ式には積分定数が4つあり、4つの境界条件が必要となる。まず、梁の左端は固定であるため、その点の変位と回転角（勾配）は、次に示すように共にゼロとなる。

$$v(0)=0;\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0$$

上の条件より、積分定数が2つ決まることになる。

$$\left.EI\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=C_3=0;\quad EIv(0)=C_4=0$$

また、右端はピン支持であるため、

$$v(l)=0\rightarrow\quad v(l)=\frac{1}{24EI}(p_wl^4+4C_1l^3+12C_2l^2)=0$$

として、変位に対する境界を与え、他のひとつは応力境界で与える。ここでは、ピン支持であることから、曲げモーメントがゼロとなる。曲げモーメントによる境界条件は、次式で与えられる。

$$M(l)=-EI\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l}=0\rightarrow\quad M(l)=-\frac{p_w}{2}l^2-C_1l-C_2=0$$

求めた両境界条件を連立にして、C_1, C_2 を求めると、両積分定数は次式となる。

$$C_1 = -\frac{5p_w l}{8};\quad C_2 = \frac{p_w l^2}{8}$$

これで、積分定数は全て決定したので、たわみや断面力が、これらの積分定数を該当する関数に代入することで得られる。まず、断面力を求めてみよう。曲げモーメントとせん断力は、

$$M(x) = -EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p_w}{2}x^2 + \frac{5p_w}{8}lx - \frac{p_w}{8}l^2 = \frac{p_w l^2}{8}\left(-4(\frac{x}{l})^2 + 5(\frac{x}{l}) - 1\right) = -\frac{p_w l^2}{8}\left(4(\frac{x}{l}) - 1\right)\left((\frac{x}{l}) - 1\right)$$

$$Q(x) = -p_w x + \frac{5}{8}p_{wl}l = \frac{p_w l}{8}(-8\frac{x}{l} + 5)$$

となり、曲げモーメントは x に関する2 次式となる。求めた曲げモーメントとせん断力を図2に示す。

梁の両端では、曲げモーメントは、

$$M(0) = -\frac{p_w l^2}{8};\quad M(l) = -\frac{p_w l^2}{8}(4-1)(1-1) = 0$$

となり、$x = l/4$ でもゼロとなることが分かる。曲げモーメントの最大値は、せん断力がゼロとなる位置を求め、

$$Q(x) = \frac{p_w l}{8}(-8\frac{x}{l} + 5) = 0; \rightarrow \quad x = \frac{5}{8}l$$

曲げモーメント関数に代入すれば以下のように得られる。

$$M_{\max} = M(\frac{5l}{8}) = \frac{p_w l^2}{8}\left(-4(\frac{5}{8})^2 + 5(\frac{5}{8}) - 1\right) = \frac{9}{128}p_w l^2$$

また、梁両端でのせん断力は、次のように得られる。

$$Q(0) = \frac{5}{8}p_w l;\quad Q(l) = \frac{p_w l}{8}(-8+5) = -\frac{3}{8}p_w l$$

反力は、支持点での力の釣り合いから、

$$V_1 = Q(0) = \frac{5p_w l}{8};\quad V_2 = -Q(l) = \frac{3p_w l}{8};\quad M_1 = -M(0) = \frac{p_w l^2}{8};\quad M_2 = 0$$

として求められる。このように、不静定構造物では、部材の断面力との釣合より、反力を最後に求めることになる。

次に、たわみを求めることにしよう。たわみの式及び回転角の式に積分定数を代入し、整理すると以下の式が得られる。

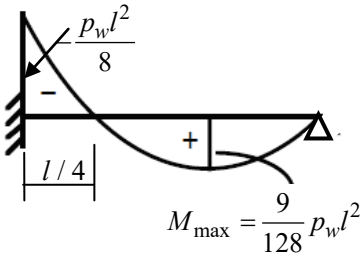
$$v(x) = \frac{p_w l^4}{48EI}\left(2(\frac{x}{l})^4 - 5(\frac{x}{l})^3 + 3(\frac{x}{l})^2\right)$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{p_w l^3}{48EI}\left(8(\frac{x}{l})^3 - 15(\frac{x}{l})^2 + 6(\frac{x}{l})\right)$$

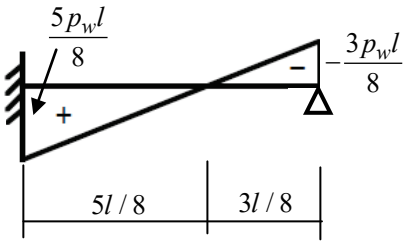
変位の最大値は、回転角がゼロの位置で与えられる。

$$8(\frac{x}{l})^3 - 15(\frac{x}{l})^2 + 6(\frac{x}{l}) = 0 \rightarrow \quad x/l = 0, x/l = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}$$

ただし $x = 0$ と $x > l$ の値は意味をなさない。以降は次回お話しする。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 2 等分布荷重を受ける一端固定・他端ピン支持の不静定梁の断面力

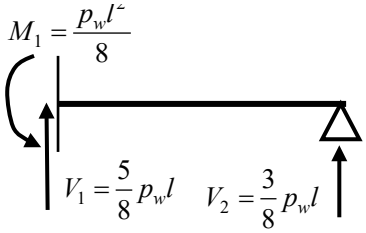


図 3 不静定梁の反力

荷重と反力との上下方向の釣合は、
$5p_w l/8 + 3p_w l/8 - p_w l \rightarrow 0$
となり、節点 1 を中心とするモーメントの釣合は次式となる。
$M_1 = p_w l \cdot l/2 - 3p_w l \cdot l/8 - p_w l^2/8 \rightarrow 0$

基礎６６話 No.2　一端固定・他端ピン支持梁＋中央集中荷重

付 16 話参照
ex65_1; ex65_2

今回は、前回の続きで図1に示す構造物の応力解析についてお話しする。前回では、梁の微分方程式を解いて、断面力分布を求めた。ここでは、骨組の変位やたわみを求める。たわみの最大値は、回転角がゼロの位置で与えられる。その位置も既に求めたが、$x=0$ と $x>l$ の値は意味を成さないので、$x/l=(15-\sqrt{33})/16=0.578$ の値を用いる。この値をたわみ関数に代入することによって、たわみの最大値が次のように得られる。

$$v_{\max}=v(0.578l)=0.26\frac{p_w l^4}{48EI}=\frac{2.08p_w l^4}{384EI}$$

回転角の最大値は、ピン支持端と極値に生じる。回転角の極値は、この関数の接線勾配がゼロとなる位置、つまり、曲げモーメントがゼロとなる位置である。まず、曲げモーメント関数を用いてこの位置を求める。

$$(4(\frac{x}{l})-1)((\frac{x}{l})-1)=0\rightarrow\quad \frac{x}{l}=\frac{1}{4}$$

ピン支持端と上の位置の回転角の大きさは、次式で与えられる。

$$\theta(l)=\frac{p_w l^3}{48EI}(8-15+6)=-\frac{p_w l^3}{48EI}$$

$$\theta(l/4)=\frac{p_w l^3}{48EI}(8(\frac{1}{4})^3-15(\frac{1}{4})^2+6(\frac{1}{4}))=\frac{p_w l^3}{192EI}(\frac{1}{2}-\frac{15}{4}+6)=\frac{p_w l^3}{192EI}\cdot\frac{11}{4}=\frac{11p_w l^3}{768EI}$$

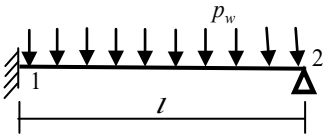
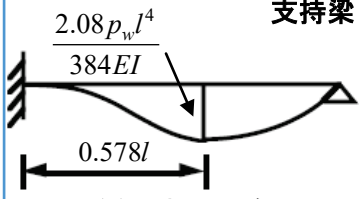
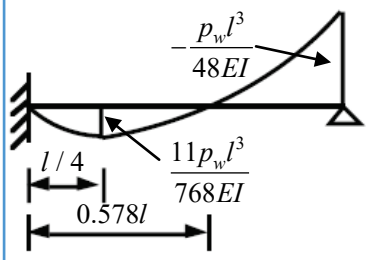


図 1 等分布荷重を受ける一端固定・一端ピン支持梁



(a) たわみ分布



(b) 回転角分布

図 4 等分荷重を受ける一端固定・他端ピン支持梁の断面力図

2) 一端固定・他端ピン支持梁＋中央集中荷重　ex65_2

続いて、図 5 に示す一端固定、他端ピン支持に中央集中荷重が加わる不静定梁について、載荷点の鉛直変位及び断面力分布を求めてみよう。ここでは、前の手法とは少し異なった方法で鉛直変位を求める。基本構造である片持ち梁の解を利用する。基本構造における梁先端のたわみは既に求めている。まず、図 5 のピン支持部の鉛直反力を X で仮定する。次に、下図のように 2 つの片持ち梁に分けて考える。

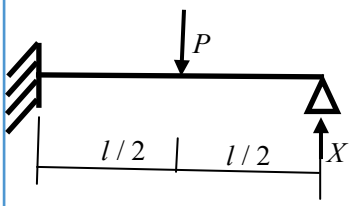


図 5 梁中央集中荷重を受ける一端固定、他端ピン支持梁

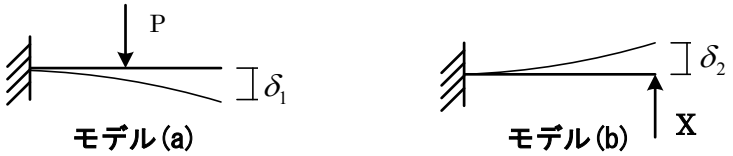


図 6 2 つの片持ち梁に分ける

各片持ち梁先端の変位を次のように求める。この値は、基礎 51 話で既に求めており、これを利用する。ここで、δ_1',θ' は各々荷重直下の変位と回転角である。

$$\delta_1=\delta_1'+\theta'\frac{l}{2}=\frac{P}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\frac{P}{2EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l}{2}=\frac{5Pl^3}{48EI};\quad \delta_2=-\frac{Xl^3}{3EI}$$

先端に集中荷重を受ける片持ち梁の先端の変位は、

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI}$$

また先端の回転角は、回転角の式に $x=l/2$ を代入することで次式となる。

$$\theta=\frac{Pl^2}{2EI}$$

図 5 から分かるように、右端はピン支持なので鉛直変位は生じない。そのため、$\delta_1+\delta_2=0$ の関係が成り立つ。2 つの片持ち梁先端の鉛直方向たわみを用いて、上の関係より X の値が求められる。

$$\delta_1+\delta_2=0 \rightarrow \quad \frac{5Pl^3}{48EI}-\frac{Xl^3}{3EI}=0 \rightarrow \quad X=\frac{5}{16}P$$

一端固定、他端ピン支持不静定梁の変形は、図 6 に示す 2 つの片持ち梁の変形状態の和で与えられる。この 2 つの片持ち梁の中央変位を各々 δ_1' と δ_2' とすると、一端固定、他端ピン支持の不静定梁載荷点の変位 δ は次式となる。

$$\delta=\delta_1'-\delta_2'=\frac{P}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3-\frac{5l^3}{48EI}\cdot\frac{5}{16}P=\frac{7Pl^3}{768EI}$$

曲げモーメント及びせん断力図は、変位と同様に図 6 に示す 2 つの片持ち梁の応力を足し合わせて求める。 以下に両モデルのたわみと曲げモーメント図及びせん断力図を示す。

先端に集中荷重 X を受ける片持ち梁の中央の変位 δ_2' は第 51 話の片持ち梁のたわみ関数より、以下のように求められる。

$$\delta_2'=-\frac{X}{6EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\frac{Xl}{2EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$=\frac{5l^3}{48EI}X$$

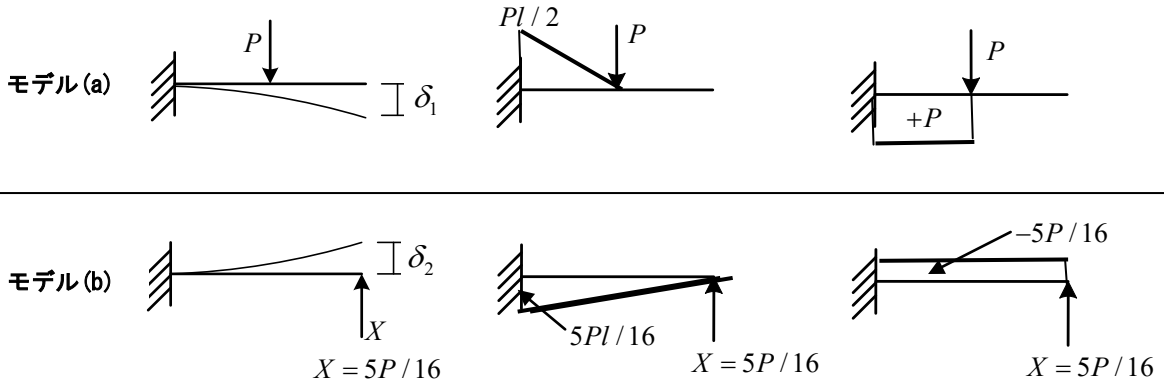


図 7 2 つのモデルのたわみ、曲げモーメント図とせん断力図

上記の 2 つのモデルの和を取ると、一端固定、他端ピン支持に中央集中荷重を受けるモデルのたわみと曲げモーメント図、及びせん断力図が次のように得られる。

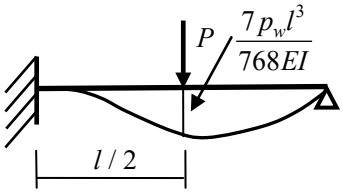


図 8 梁のたわみ曲線

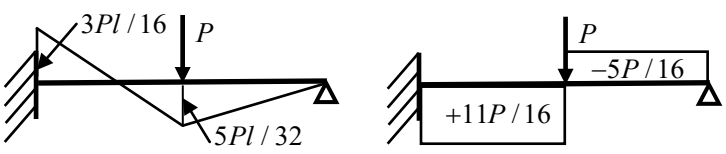


図 9 曲げモーメント図とせん断力図

次回は、もう少し複雑な不静定構造の応力解析を実施し、解析手順をより深く理解しよう。

基礎６７話 No.3　片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重

付 16 話参照
ex67_1

今回は、図10に示す片持ち梁の中央に支持がある不静定構造物の応力解析を行い、その解析手順を理解する。つまり、この構造物の曲げモーメントとせん断力を求め、次に変形状態を求めることにする。

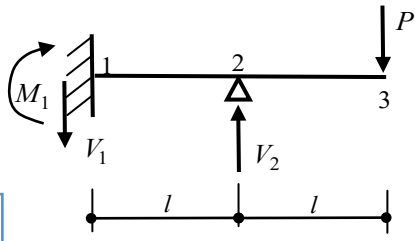


図 10 片持ちで中央に支持のある梁

3）片持ちで中央に支持のある梁＋先端集中荷重　ex67_1

まず、節点2-3間の梁について考える。この部分は片持ち梁であり、断面力は図11に示す基本構造である片持ち梁と同じである。図中の節点2を原点とする座標系を用いると、曲げモーメントと反力は

$$M(x) = -P(l-x); \quad M_2 = -M(0) = Pl$$

となる。従って、この領域における梁の微分方程式は

$$EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = P(l-x)$$

で与えられる。ここで、関数 $v_2(x)$ は節点2-3間の梁の変位を表す。上式を2回積分し、次の境界条件を適用して積分定数を決定する。

$$v_2(0) = 0; \quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0} = \theta_2$$

梁の微分方程式を2回積分すると、

$$EI\frac{dv_2}{dx} = P(lx - \frac{x^2}{2}) + C_1; \quad EIv_2(x) = P(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + C_1x + C_2$$

となり、上の境界条件を適用すると、積分定数は、

$$EIv_2(0) = C_2 = 0; \quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0} = \frac{C_1}{EI} = \theta_2 \rightarrow C_1 = EI\theta_2$$

となる。ただし、上式の回転角 θ_2 は、節点1-2 間の梁の影響を受けるので、ここでは値を決定できない。求めた積分定数を用いると、片持ち梁のたわみ関数は、次式となる。

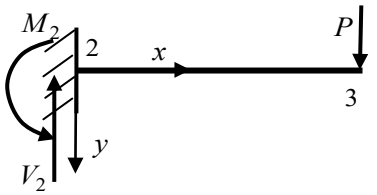
$$v_2(x) = \frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3\right\} + \theta_2 \cdot x$$

次に、節点1-2間の梁について考え、節点1を原点とする座標系を導入する。荷重として、図12に示すように、節点2-3の梁の反力 M_2 とは逆のモーメントが節点2に加わることになる。ただし、梁の中間部に荷重がないことと、不静定梁であることから、梁の微分方程式は、$d^4v_1/dx^4 = 0$ となる。ここで、$v_1(x)$ は節点1-2間の変位を表す。同式を4回積分すると、たわみ関数が次のように得られる。

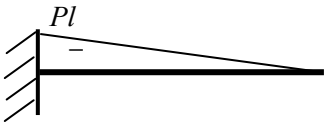
$$EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = -M(x) = C_3x + C_4; \quad EIv_1(x) = \frac{C_3x^3}{6} + \frac{C_4x^2}{2} + C_5x + C_6$$

境界条件として、節点1が固定であることから、

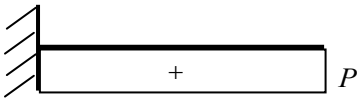
$$EIv_1(0) = C_6 = 0; \quad EI\left.\frac{dv_1}{dx}\right|_{x=0} = C_5 = 0$$



(a) 片持ち梁の座標系と荷重

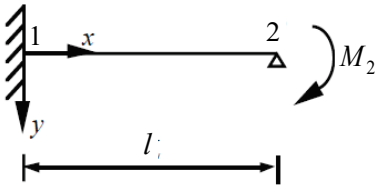


(b) 曲げモーメント図

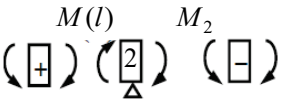


(c) せん断力図

図 11 片持ち梁の断面力図



(a) 座標系と荷重



(b) 節点 2 でのモーメントの釣合

図 12 片持ち梁の座標系と節点での釣合

次に、節点1-2間の梁について考え、節点1を原点とする座標系を導入する。荷重として、図12に示すように、節点2-3の梁の反力 M_2 とは逆のモーメントが節点2に加わることになる。ただし、梁の中間部に荷重がないことと、不静定梁であることから、梁の微分方程式は、$d^4v_1/dx^4 = 0$ となる。ここで、$v_1(x)$ は節点1-2間の変位を表す。同式を4回積分すると、たわみ関数が次のように得られる。

$$EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = -M(x) = C_3x + C_4; \quad EIv_1(x) = \frac{C_3x^3}{6} + \frac{C_4x^2}{2} + C_5x + C_6$$

境界条件として、節点1が固定であることから、

$$EIv_1(0) = C_6 = 0; \quad EI\left.\frac{dv_1}{dx}\right|_{x=0} = C_5 = 0$$

また、節点2における境界条件は、ピン支持であることから

$$EIv_1(l)=\frac{C_3l^3}{6}+\frac{C_4l^2}{2}=0\rightarrow C_3l+3C_4=0;\quad EI\frac{dv_1}{dx}\bigg|_{x=l}=\frac{C_3l^2}{2}+C_4l=EI\theta_2$$

となる。ここで、上式の回転角 θ_2 は、節点2-3 間の梁の回転角 θ_2 と同じであり、現時点では未定である。そこで、他の境界条件として、節点2におけるモーメントの釣合を考える。図12(b)に示すように、モーメントの釣合は $M(l)+M_2=0\rightarrow M(l)=-M_2$ で与えられる。この境界条件を用いると、

$$EI\frac{d^2v_1}{dx^2}\bigg|_{x=l}=-M(l)=M_2\rightarrow C_3l+C_4=M_2\quad\leftarrow M_2=Pl$$

として、積分定数を決定するための条件式が得られる。以上2つの境界条件より、積分定数 C_3,C_4 が次のように得られる。

$$C_3=\frac{3P}{2};\quad C_4=-\frac{Pl}{2}$$

求めた積分定数を用いるとたわみ関数と回転角関数は次式となり、

$$v_1(x)=\frac{Pl^3}{4EI}\left\{(\frac{x}{l})-1\right\}(\frac{x}{l})^2;\quad \theta_1(x)=\frac{dv_1}{dx}=\frac{Pl^2}{4EI}\left\{3(\frac{x}{l})-2\right\}(\frac{x}{l})$$

回転角 θ_2 は、上式右に $x=l$ を代入することで、$\theta_2=\theta_1(l)=Pl^2/4EI$ として得られる。

次に、曲げモーメントとせん断力は求めた積分定数を代入すると、

$$M(x)=-\frac{Pl}{2}\left\{3(\frac{x}{l})-1\right\};\quad Q(x)=\frac{dM}{dx}=-\frac{3}{2}P$$

となる。これで、2つの部材の曲げモーメントとせん断力が全て決定した。これらを図13に示す。

反力も節点での力の釣合より図14のように得られる。求めた反力を検証するため、荷重と反力の釣合を考えてみよう。上下方向の力の釣合は、同図に示すように容易に成立することが分かる。また、節点1を中心とするモーメントを計算すると次式となり、モーメントの釣合が成立する。

$$\frac{Pl}{2}-\frac{5}{2}P\cdot l+P\cdot 2l\quad\rightarrow\quad 0$$

節点2-3間の梁のたわみ及び回転角は、節点2の回転角 $\theta_2=Pl^2/4EI$ を用いると、次式となる。

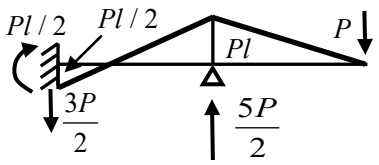
$$v_2(x)=\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\right\}+\theta_2\cdot x=\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\right\}+\frac{Pl^3}{4EI}\frac{x}{l}$$

$$\theta_2(x)=\frac{dv_2}{dx}=\frac{Pl^2}{2EI}\left\{2(\frac{x}{l})-(\frac{x}{l})^2\right\}+\frac{Pl^2}{4EI}\rightarrow\theta_2(l)=\frac{Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{4EI}=\frac{3Pl^2}{4EI}$$

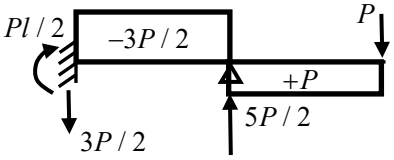
先端3の変位 δ と回転角 θ_3 は、上式に $x=l$ を代入して求める。

$$\delta=v_2(l)=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^3}{4EI}=\frac{7Pl^3}{12EI};\quad \theta_3=\theta_2(l)=\frac{Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{4EI}=\frac{3Pl^2}{4EI}$$

求めた変位分布と回転角の分布を図15に示す。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 13 片持ちで中央に支持のある梁の断面力図

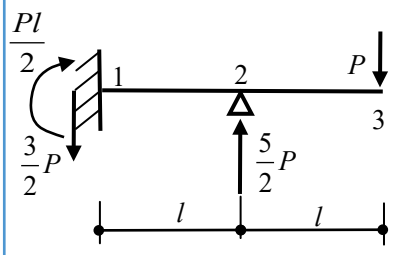
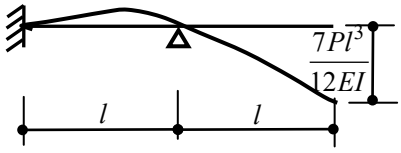
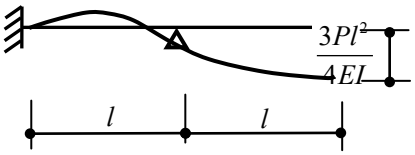


図 14 反力と荷重の釣合



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 15 変位図と回転角図

基礎６８話 No.4　両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重

付 16 話参照
ex68_1 ~ ex68_3

今回は、図16に示す両端ピン支持門型ラーメンで梁中央に鉛直方向集中荷重のモデルである。対称構造で対称荷重であるため、対称の応力・変形状態となる。このことを考慮して梁の微分方程式を用い、断面力分布を求める。つまり、対称変形では半分の骨組を解析する。

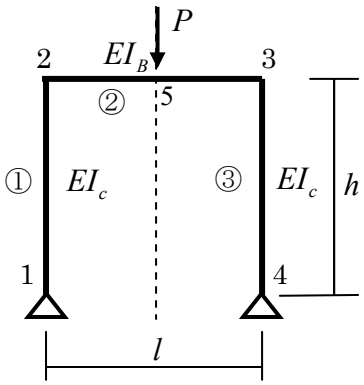


図 16 梁中央集中荷重の門型ラーメン

4）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重　ex68_1

対称変形では、回転角 θ_2 と θ_3 の値が同一で異符号となり、骨組はスウェイ、つまり横移動しない。部材①と②の梁の微分方程式は、共に荷重がないことから次式で表される。

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0$$

上式を解くために、両辺を 4 回積分する。ここでは、たわみ関数と回転角関数を示す。部材①では節点 1 を、部材②では節点 2 を原点とする。

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$
$$EIv(x)=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

まず、境界条件より部材②における梁の積分定数を求める。ここでは梁の変位を v_2 とする。境界条件として、部材の伸縮を考慮しないので、梁の材端となる節点2では上下方向に拘束され、また、回転角を θ_2 とする。

$$v_2(0)=0;\quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0}=\theta_2$$

上の条件より、積分定数が次のように2つ決まることになる。

$$EI_b\left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0}=C_3=EI_b\theta_2\rightarrow\theta_2=\frac{C_3}{EI_b};\quad EI_bv_2(0)=C_4=0$$

他の境界条件として節点5では、対称変形であることより回転角はゼロとなり、またせん断力と荷重との釣合より次式右が得られる。

$$\left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=l/2}=0;\quad Q(l/2)=\frac{P}{2}$$

まず、前者の境界条件と $\theta_2=C_3/EI_b$ より、

$$\frac{C_1}{8}l^2+\frac{C_2}{2}l+C_3=0\rightarrow\frac{1}{4}C_1l^2+C_2l=-2EI_b\theta_2\rightarrow C_2=-\frac{2EI_b\theta_2}{l}-\frac{1}{4}C_1l$$

後者の力の釣合より、

$$-Q(x)=EI_b\frac{dv_2^3}{dx^3}=C_1\rightarrow\quad Q(l/2)=-C_1=\frac{P}{2}\rightarrow C_1=-\frac{P}{2}$$

となり、上の積分定数 C_1 を前者の境界条件に代入すると、C_2 は以下のように求められる。

$$C_2=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{4}C_1l=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2+\frac{1}{8}Pl$$

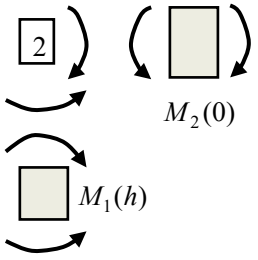


図 17 節点 2 でのモーメントの釣合

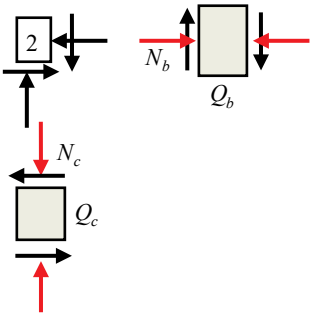


図 18 節点 2 での力の釣合

求めた全ての積分定数を用いて、梁のせん断力 $Q_2(x)$ と曲げモーメント $M_2(x)$ を以下のように求める。

$$EI_b\frac{d^2v_2}{dx^2}=-M_2(x)=C_1x+C_2;\quad EI_b\frac{d^3v_2}{dx^3}=-Q_2(x)=C_1\rightarrow$$
$$M_2(x)=-\frac{Px}{2}+\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{8}Pl;\quad Q_2(x)=\frac{P}{2}$$

次に、柱の変位 v_1 を考える。境界条件として、節点1はピン支持であることから、たわみはゼロ、曲げモーメントもゼロとなる。ここでは積分定数や変位関数を梁と間違わないように下添え字を変更する。

$$EI_c\frac{d^2v_1}{dx^2}=-M_1(x)=C_5x+C_6\rightarrow -M_1(0)=C_6=0$$
$$EI_cv_1(x)=\frac{C_5}{6}x^3+\frac{C_6}{2}x^2+C_7x+C_8\rightarrow EI_cv_1(0)=C_8=0$$

節点2の境界条件は、骨組が横移動しないことより、たわみはゼロとなり、また回転角は梁の回転角と同じ θ_2 となる。

$$EI_cv_1(h)=\frac{C_5}{6}h^3+C_7h=0\rightarrow\frac{C_5}{6}h^2+C_7=0$$
$$EI_c\frac{dv_1}{dx}\Big|_{x=h}=\frac{C_5}{2}h^2+C_7=EI_c\theta_2$$

上記2つの方程式より、積分定数が以下のように求められる。

$$\frac{C_5}{2}h^2-\frac{C_5}{6}h^2=EI_c\theta_2\rightarrow C_5=\frac{3EI_c\theta_2}{h^2};\quad C_7=-\frac{C_5}{6}h^2=-\frac{EI_c\theta_2}{2}$$

上の積分定数を、$M_1(x)$ 及び $Q_1(x)$ に代入すると次式が得られる。

$$EI_c\frac{d^2v_2}{dx^2}=-M_1(x)=C_5x\rightarrow M_1(x)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}x$$
$$EI_c\frac{d^3v_2}{dx^3}=-Q_1(x)=C_5\rightarrow\quad Q_1(x)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}$$

梁と柱の節点2における曲げモーメントは、次のようになる。

$$M_1(h)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}h=-\frac{3EI_c\theta_2}{h}=-1.5K_c\theta_2\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h}$$
$$M_2(0)=\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{8}Pl=K_b\theta_2-C\leftarrow K_b=\frac{2EI_b}{l};C=\frac{1}{8}Pl$$

図17を参考に、節点2でのモーメントの釣合として次式が成立し、θ_2 が求められる。ここで、$\alpha=K_b/K_c$ とすると、

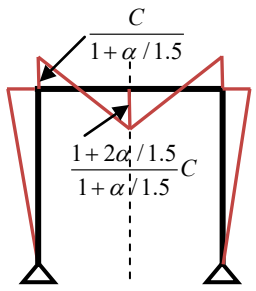
$$-M_1(h)+M_2(0)=1.5K_c\theta_2+K_b\theta_2-C=0\rightarrow\theta_2=\frac{C}{1.5K_c+K_b}$$

梁、柱の材端及び梁中央の曲げモーメントを上の回転角を用いて求める。

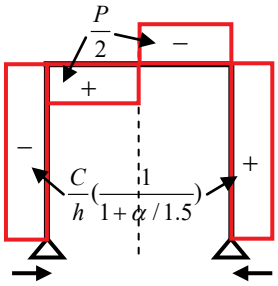
$$M_1(h)=1.5K_c\frac{C}{1.5K_c+K_b}=\frac{C}{1+\alpha/1.5};M_2(0)=K_b\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}-C=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}$$
$$M_c=M_2(l/2)=-2C-K_b\theta_2+C=(\frac{-K_b}{1.5K_c+K_b}-1)C=(\frac{-\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}-1)C=-\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C$$

曲げモーメントのその傾きからせん断力を、節点2のせん断力と軸力の釣合より、軸力を求める。得られた各断面力を図19に示す。

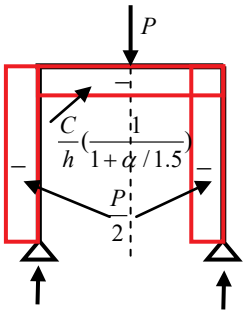
$$Q_c=(-M_{21})/h=\frac{-C}{h}(\frac{1}{1+\alpha/1.5})=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5};\quad Q_b=\frac{P}{2}$$
$$N_b=-Q_c;\quad N_c=-Q_b$$



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

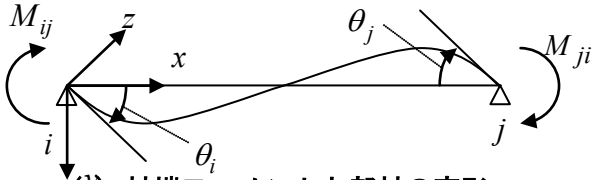


(c) 軸力図

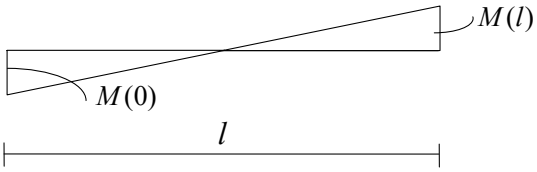
図 19 門型ラーメン断面力図

基礎６９話 No.1　たわみ角法の基本式誘導

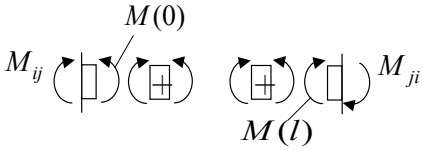
今回から、これまでの応力解析と比較して、抜群の威力を発揮するたわみ角法について学ぶ。まず、たわみ角法の基本式を梁の微分方程式から導く。ここでは図 1(a)のように梁の両端に材端モーメント M_{ij}, M_{ji} が加わり、部材の両端に回転角 θ_i, θ_j が生じる場合について考える。最初、部材に直接加わる荷重は考慮しない。



(a) 材端モーメントと部材の変形



(b) 部材内の曲げモーメント図



(c) 材端力と曲げモーメントとの釣合

図 1 部材の構成と断面力

部材内部に生じる曲げモーメントを $M(x)$ とする。材に中間荷重（部材荷重）がないので曲げモーメント分布は直線となり、関数 $M(x)$ は、次の一次式で表すことができる。

$$M(x) = a + bx \qquad \cdots\cdots(1)$$

材端に加わる荷重と曲げモーメントの釣合より、同図(c)のように両端で次式が成立する。

$$M_{ij} - M(0) = 0; \quad M_{ji} + M(l) = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

式(1)に上式を適用することで、未定定数 a, b は

$$a = M_{ij}; \quad b = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} \qquad \cdots\cdots(3)$$

となり、従って、曲げモーメント $M(x)$ は、両端の材端モーメントより、次式で表される。

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(4)$$

梁の曲げモーメント分布が決まったところで、次は、梁の微分方程式に代入し、梁のたわみを求めることにしよう。梁の微分方程式に上式の曲げモーメントを代入すると、

$$EI\frac{dv^2}{dx^2} = -M(x) = -M_{ij} + \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで、l は部材の長さ、E はヤング係数、I は断面二次モーメントであり、$v(x)$ はたわみを表す関数である。梁の微分方程式を解くために、上式の両辺を 2 回積分すると、次のように

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} = EI\theta(x) &= -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 \\ EIv(x) &= -\frac{M_{ij}x^2}{2} + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6)$$

たわみの一般解が得られる。ここで、C_1, C_2 は積分定数である。

たわみ角法基本式の誘導は少し面倒ではあるが、ゆっくりと式を追っていけばそれほど難しくはない。是非、式を誘導し、理解してほしい。得られた結果は非常に単純であることが分かる。

次に、上式にたわみの境界条件を用いて積分定数C_1, C_2を決定する。
境界条件は、図 2 を参考に両端の法線方向変位より

$$v(0)=v_i;\quad v(l)=v_j \qquad \cdots\cdots(7)$$

であり、従って、式(6)下より

$$\left.\begin{aligned} EIv(0) &= C_2 = EIv_i \\ EIv(l) &= -\frac{M_{ij}}{2}l^2+\frac{l^2}{6}(M_{ij}+M_{ji})+C_1 l+C_2 = EIv_j \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

となる。上式から C_1 を求めると、

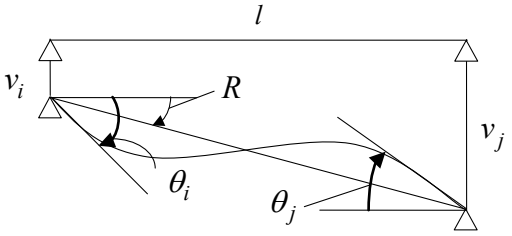


図 2 部材角と両端変位の関係

$$C_1=\frac{EI}{l}v_j+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})-\frac{C_2}{l}=EI(\frac{v_j-v_i}{l})+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})=EIR+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji}) \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。ここでは、部材角 R を定義して用いている。

$$R=\frac{v_j-v_i}{l} \qquad \cdots\cdots(10)$$

得られた積分定数C_1, C_2を式(6)下に代入し、たわみ関数$v(x)$を求める。

$$EIv(x)=-\frac{M_{ij}}{2}x^2+\frac{x^3}{6l}(M_{ij}+M_{ji})+\{EIR+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\}x+EIv_i \rightarrow$$

$$v(x)=v_i+Rx+\frac{1}{EI}\{-\frac{M_{ij}}{2}x^2+\frac{x^3}{6l}(M_{ij}+M_{ji})+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})x\} \qquad \cdots(11)$$

また、回転角$\theta(x)$は、上式を微分することで以下のように得られる。

$$EI\theta(x)=-M_{ij}x+\frac{x^2}{2l}(M_{ij}+M_{ji})+\{EIR+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\}\rightarrow$$

$$\theta(x)=R+\frac{1}{EI}\{-M_{ij}x+\frac{x^2}{2l}(M_{ij}+M_{ji})+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

次に上式を用いて、部材両端の回転角θ_i, θ_jと材端モーメントM_{ij}, M_{ji}の関係を求める。まず、上式に i 端と j 端の位置を代入し、境界として与えられる両端の回転角と等しいと置くと、下式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_i = R+\frac{l}{6EI}(2M_{ij}-M_{ji}) \\ \theta(l) &= \theta_j = R+\frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}l+\frac{l}{2}(M_{ij}+M_{ji})+\frac{l}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\}=R+\frac{l}{6EI}(2M_{ji}-M_{ij}) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

上式を整理すると、

$$\theta_i=R+\frac{l}{6EI}(2M_{ij}-M_{ji});\quad \theta_j=R+\frac{l}{6EI}(2M_{ji}-M_{ij}) \quad \cdots\cdots(14)$$

となり、また、M_{ij}とM_{ji}について求め直すと、次のように

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R) \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

節点移動がある場合のたわみ角法の基本式が得られる。得られた結果は、曲げ剛性$2EI/l$に、係数「2，1、－3」と非常に単純であり、覚え易い。まずは、この係数を覚えよう。以降は次回お話しする。

基礎７０話 No.2　部材荷重や境界のある場合の基本式、変数変換による基本式

前回に続いて、たわみ角法の基本式を誘導する。ここでは、部材に直接荷重が載荷される場合を考えてみよう。図 3 のように部材に中間荷重がある場合(部材荷重)、まず、両端固定として断面力と変形状態を求める。次に両端固定として求めた反力と釣合う、つまり、反力とは逆方向の外力を両端の材端モーメントとして、たわみ角法の基本式に加える。これを**固定端モーメント**あるいは固定端外力と呼ぶ。

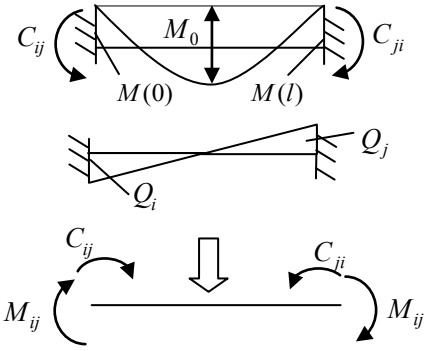


図 3 中間荷重がある場合

この固定端モーメントを左辺に加えると、図 3 を参考に、たわみ角法の釣合式は以下のようになる。

$$M_{ij}+C_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R);\quad M_{ji}-C_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R) \qquad \cdots(16)$$

固定端モーメントを移項して、材端モーメントを書き直すと次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}\\ M_{ji}&=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

これで、たわみ角法の完全な形の基本式が得られたことになる。

部材荷重のある場合の梁内部の断面力と変形は、当然材端モーメントによって生じる断面力と変位に、図 4 に示される両端固定として求めた断面力と変形を加えて得られる。ここで、$\bar{M}_{ij},\bar{M}_{ji}$ は、式(16)中の固定端モーメントを除いた変位によって生じる材端モーメントを示す。この両端固定として求めた断面力を**基本応力**と呼ぶ。

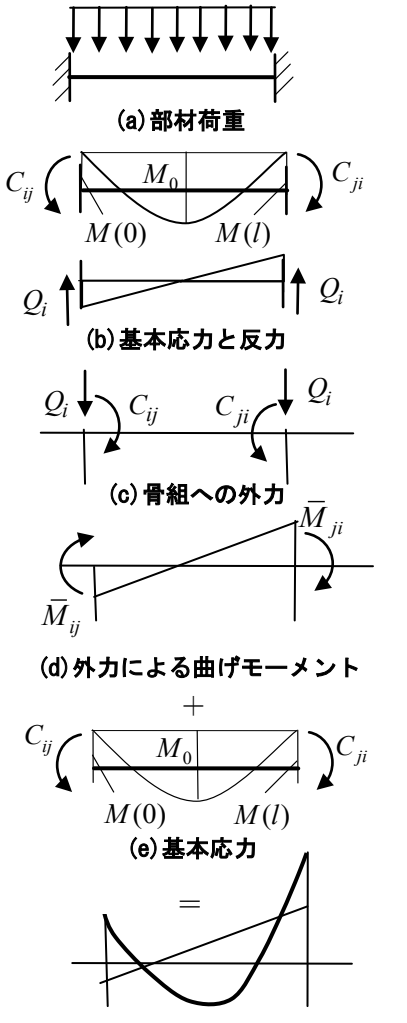


図 4 中間荷重が加わる部材の断面力

一端に境界を有する部材に適用可能とするため、たわみ角法の基本式を拡張する。境界条件は一端ピンの場合と一端固定の場合についてであり、この 2 種の境界条件を用いて基本式を変更する。まず、一端ピンについて考えてみよう。式(17)で i 端がピンの場合、i 端の曲げモーメントはゼロとなるため、次のように材端モーメント M_{ij} はゼロとなる。式(17)上を θ_i について整理すると、下式右となる。

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}=0\rightarrow\quad \theta_i=\frac{1}{2}(-\theta_j+3R+\frac{lC_{ij}}{2EI}) \qquad \cdots(18)$$

上式を式(17)下に代入すると次式が得られる。

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\frac{1}{2}(-\theta_j+3R+\frac{lC_{ij}}{2EI})-3R)+C_{ji}\rightarrow$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(1.5\theta_j-1.5R)+\bar{C}_{ji}\quad\leftarrow\bar{C}_{ij}=C_{ji}+0.5C_{ij} \qquad \cdots\cdots(19)$$

以上のように、i 端ピンの場合の基本式は、

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(1.5\theta_j - 1.5R) + \bar{C}_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(20)$$

続いて、一端固定で他端剛接合の場合について考える。式(17)で i 端が固定の場合、i 端の回転角 θ_i はゼロとなるため、基本式は以下となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(\theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j - 3R) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(21)$$

次に、新しいパラメータを導入して、上記の式(17)と(20)、(21)を変換する。骨組の中で代表的な部材を一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次式で定義する。

$$K_0 = \frac{2EI_0}{l_0} \qquad \cdots\cdots(22)$$

このパラメータ K_0 を**標準剛度**と呼ぶ。たわみ角法の基本式(17)の右辺に K_0 / K_0 を掛け、整理すると、

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI/l}{K_0}(2\theta_i K_0 + \theta_j K_0 - 3RK_0) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI/l}{K_0}(2\theta_j K_0 + \theta_i K_0 - 3RK_0) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(23)$$

となる。ここで、次のような新しいパラメータと変位を定義する。

$$k = \frac{K}{K_0};\quad K = \frac{2EI}{l};\quad \varphi_i = \theta_i K_0;\quad \psi = -3RK_0 \qquad \cdots\cdots(24)$$

特に、新しいパラメータとして定義した k は**剛比**と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対するその部材の曲げ剛性の比を表す。上のパラメータを使用すると、たわみ角法の基本式は次のように変換される。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(25)$$

式(20)の i 端ピン接合で j 端剛接合の基本式は、次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= k(1.5\varphi_j + 0.5\psi) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(26)$$

同様に式(21)の一端固定で他端剛接合の基本式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= k(\varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \psi) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(27)$$

最後に、一端ピンで他端固定の場合の固定端モーメントについて考える。両端固定支持から一端ピン状態となると、図 5 のように固定端モーメントも固定端せん断力も次のように変化する。詳しくは、例題を通して学ぶことにする。

$$\bar{C}_{ji} = C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij};\quad \bar{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1.5C_{ij}}{l};\quad \bar{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1.5C_{ij}}{l} \qquad \cdots(28)$$

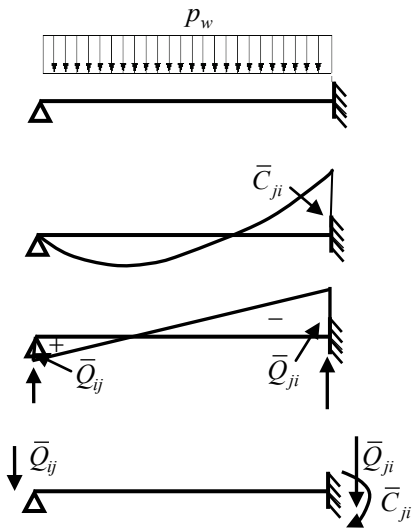


図 5 一端ピン支持梁の固定端モーメント、固定端せん断力と外力

θ_i と R_k は**回転量を表し、無次元量である。しかし、** φ_i と ψ_k は K_0 と**同じ次元を持つ。つまり、モーメントと同じ次元を持つことに注意されたい。**

基礎７１話 No.3　骨組全体の釣合式 節点モーメントと層モーメントの釣合

今回は、たわみ角法の基本式を用いて、釣合式の求め方についてお話しする。たわみ角法は、微分方程式やモールの定理を用いた手法に比較すると圧倒的に使い易い。特に骨組の節点移動を部材角で表すため、平面骨組では座標変換を必要としない。しかも平面部材は両端の 6 自由度で表されるが、たわみ角法では、材端の回転角と部材角の 3 自由度で表されるため、骨組全体の自由度は少なくなる。一方、欠点は、部材の伸縮が無視されるため、全部材の部材角は独立に回転することができず、部材角間に依存関係が生じる。

たわみ角法は骨組の形状と荷重状態によって解析方法が異なる。まず、節点移動がある場合とない場合に分かれ、後者では、整形ラーメンと異形ラーメンに分類される。節点移動のない場合は、部材角は必要なく、節点でのモーメントの釣合によって全釣合式が得られる。一方、節点移動のある場合、整形ラーメンでは、部材角は柱にのみ生じ、層せん断力の釣合式が容易に得られる。異形ラーメンでは、全部材の部材角を考慮し、しかも部材角間の依存関係や層せん断力の釣合に替わる釣合式を必要とする。これらについは、後の回で、詳細にお話しする。

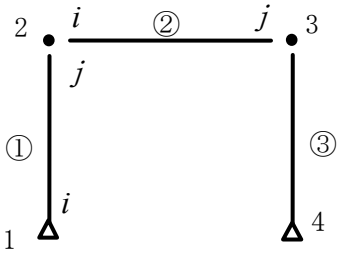


図 6 節点での回転角の適合

Ⅰ）部材両端の回転角の適合：柱と梁が剛接合であるとは、変形前の接合部が変形後も同じ状態である、つまり、部材間の角度が変形前と変形後で変化しないとき、この結合状態を剛接合という。剛接合では、変形後、図 6 の部材①の j 端と部材②の i 端の回転角は同じとなり、代表してこの回転角に節点番号を付けて、以下のように節点回転角 θ_2 とする。

$$ {}_1\theta_j = {}_2\theta_i = \theta_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(29) $$

他の節点も同様で、部材の材端回転角を、剛接合節点の節点回転角とすることで、骨組全体で節点における回転角の適合が得られる。

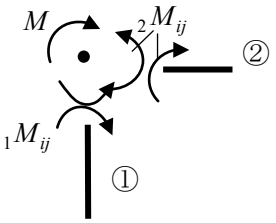


図 7　節点でのモーメントの釣合

Ⅱ）節点でのモーメントの釣合：骨組内の各節点では力の釣合が当然満たされなければならない。節点での力の釣合には x と y 方向の力の釣合、及びモーメントの釣合がある。たわみ角法ではモーメントの釣合のみ考慮しており、しかも、モーメントの方向は、平面骨組ではこの紙面に垂直方向で、全て同じである。従って、モーメントや回転角及び部材角は、回転方向のみを考慮すれば良く、釣合式の誘導などで座標変換を必要としない。そのため、解析手法として断然有利となる。モーメントの釣合は、節点に剛接合している部材の材端モーメントと節点に加わる外力の和がゼロとして表される。例えば、図 7 のように部材番号 1 と 2 の部材

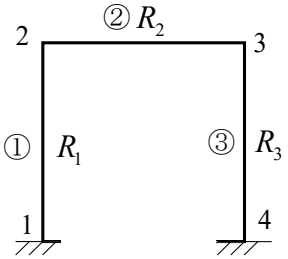


図 8 整形ラーメンの部材角

が節点に剛接している場合、節点でのモーメントの釣合は次式となる。

$$-{}_1M_{ji} - {}_2M_{ij} + M = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

ここで M は節点に直接加わるモーメント外力である。上記のモーメントの釣合が、骨組内の全節点で求められることになる。

Ⅲ）整形ラーメンの層せん断力の釣合：部材の伸縮を無視するため、節点移動を表す各部材の部材角は、独立に回転できず、依存関係が存在する。その依存関係が容易に求まるのが整形骨組である。例えば、図 8 の骨組は 3 つの部材により構成されており、3 個の部材角がある。ただし、節点 1、4 は支持されており、全ての部材が自由に動き得るわけではない。部材を回転して、部材①、②、③の順に x 方向、y 方向それぞれの節点変位を加えていくと、節点 4 では両者ともにゼロとなる。このため、部材の動きには 2 つの制限条件が加わる。部材数からこの制限条件の 2 つを引いた 1 つの部材が独立に動くことができ、他の 2 つは従属的に回転量が決定される。そのため、前者は**独立部材角**と呼ばれ、後者は**従属部材角**と呼ばれる。整形骨組では、独立部材角は各層に 1 つ存在することが分かっており、従って、その層数に対応する釣合式、層せん断力の釣合式が得られる。

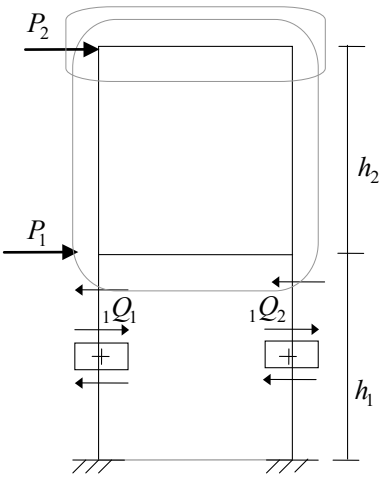


図 9 層せん断力の釣合

上記の釣合は、各層の梁下で切断し、その位置より上の水平力の和と、切断した柱のせん断力に等しい仮想の力とで考える。これらの力は当然釣り合っており、水平方向の力の総和はゼロとなる。例えば、図 9 で示される 2 層の骨組における釣合式は、次の 2 式として得られる。

$$ {}_2Q_1 + {}_2Q_2 = P_2; \quad {}_1Q_1 + {}_1Q_2 = P_2 + P_1 \qquad \cdots\cdots(31)$$

上では仮想の力は柱のせん断力に置き直しており、従って、${}_1Q_1, {}_1Q_2$ は 1 層目の柱のせん断力であり、${}_2Q_1, {}_2Q_2$ は 2 層目の柱のせん断力である。

一方、柱に水平方向の中間荷重がないとすると、各柱のせん断力は、

$$Q_k = -(M_{ij} + M_{ji})/h \qquad \cdots\cdots(32)$$

として与えられる。ここでは、図 10 から理解できるように材端モーメントを正とすると、せん断力が負となる。式(32)を式(31)に代入し、両辺に切断面の層高さ h を掛けて、整理すると

$$\Sigma\,(M_{ij} + M_{ji}) = -P_2h_2; \quad \Sigma\,(M_{ij} + M_{ji}) = -(P_1 + P_2)h_1 \qquad \cdots\cdots(33)$$

となる。ここで Σ は切断した柱について和をとることを意味し、せん断力の総和を**層せん断力**と呼ぶ。式(33)の左辺はモーメントの単位を有すため、**層モーメントの釣合**と呼ばれる。一般に、層モーメントの釣合が、整形骨組の釣合式として用いられる。

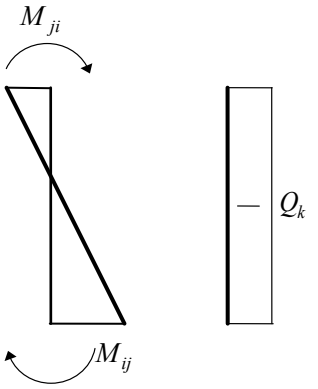


図 10 材端モーメントとせん断力の関係

なお、異形ラーメンについては後日お話しする。

基礎７２話 No.4　ひじ型骨組 水平荷重による柱頭水平変位

付 13 話参照
ex53_1

今回は、誘導したたわみ角法の基本式を用いて、簡単なモデルの応力解析を行い、たわみ角法の解析順序を学ぶ。右図の骨組は静定構造であり、梁の微分方程式を用いて、断面力は元より節点変位や梁のたわみまで求めた(基礎 53 話参照)。ただし、同法は意外と面倒である。

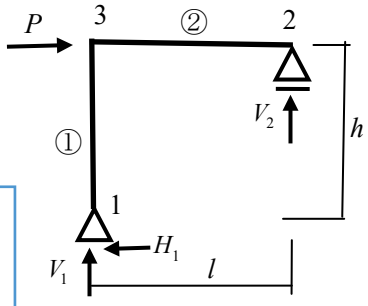


図 11 ひじ型骨組
＋水平荷重

1）ひじ型骨組＋水平荷重　　ex53_1

図 11 には、節点番号と部材番号が記されており、両部材とも一端ピンで他端剛接合となっている。一端ピン・他端剛接合の基本式は、

$$M_{ij}=0;\quad M_{ji}=\frac{2EI}{l}(1.5\theta_j-1.5R)+C_{ji}+\frac{1}{2}C_{ij} \qquad \cdots\cdots(34)$$

であり、2 つの部材の基本式は次式となる。ここで①、②は部材番号を表す記号である。なお、部材荷重はなく、梁には部材角は生じない。

$$\left.\begin{aligned} &M_{13}=0;\quad M_{31}=\frac{2EI_c}{h}(1.5\theta_3-1.5R);\quad ①\ \text{部材}\\ &M_{23}=0;\quad M_{32}=\frac{2EI_b}{l}(1.5\theta_3);\quad ②\ \text{部材}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)$$

上式には未知変数として、節点 3 の回転角 θ_2 と柱の部材角 R があり、従って、釣合式は 2 つ必要となる。ここでは、以下の節点 3 でのモーメントの釣合と、柱 1 本と外力との層モーメントの釣合を用いる。

$$M_{31}+M_{32}=0;\quad M_{31}=-Ph \qquad \cdots\cdots(36)$$

上式に、式(35)を代入すると、次の釣合式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &K_c(1.5\theta_3-1.5R)+K_b(1.5\theta_3)=0\rightarrow(K_c+K_b)\theta_3-K_cR=0\\ &K_c(1.5\theta_3-1.5R)=-Ph\rightarrow K_c\theta_3-K_cR=-2Ph/3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(37)$$

ただし、

$$K_c=\frac{2EI_c}{h};\quad K_b=\frac{2EI_b}{l} \qquad \cdots\cdots(38)$$

式(37)で、上式から下式を引くと、節点 3 の回転角 θ_3 が得られる。

$$K_b\theta_3=2Ph/3\rightarrow\theta_3=\frac{2Ph}{3K_b}=\frac{Phl}{3EI_b} \qquad \cdots\cdots(39)$$

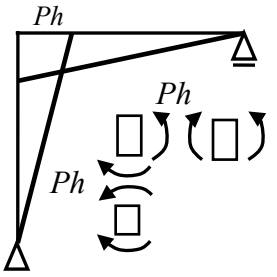
上式を式(37)の上に代入すると、柱の部材角 R が得られる。

$$R=\frac{(K_c+K_b)}{K_c}\frac{2Ph}{3K_b}=\frac{2Ph}{3}\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_c}\right) \qquad \cdots\cdots(40)$$

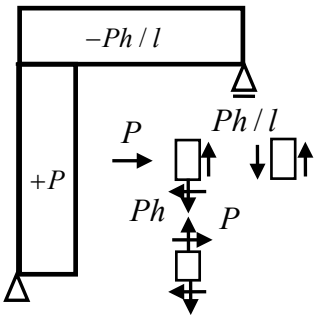
求めた θ_3 と R を両部材の式(35)に代入することで、部材の材端モーメントが得られる。

$$M_{31}=1.5K_c(\theta_3-R)=1.5K_c\left(\frac{2Ph}{3K_b}-\frac{2Ph}{3}\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_c}\right)\right)$$

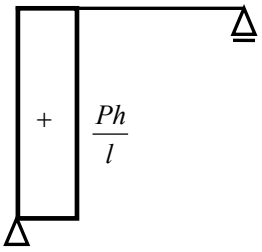
$$=Ph\left(\frac{K_c}{K_b}-\frac{K_c}{K_b}-\frac{K_c}{K_c}\right)=-Ph \qquad \cdots\cdots(41)$$



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 12 骨組の断面力図と
節点 3 での力の釣合

$$M_{32}=1.5K_b\theta_3=1.5K_b\frac{2Ph}{3K_b}=Ph \qquad \cdots\cdots(42)$$

節点 3 の水平方向変位は、柱の部材角を用いると次式で与えられる。

$$\delta=Rh=\frac{2Ph^2}{3}\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_c}\right) \qquad \cdots\cdots(43)$$

以上のように、たわみ角法を用いると、複雑な骨組でも比較的容易に応力解析が実施でき、しかも、後で学ぶように機械的に釣合式が得られる。図 13 には、求めた骨組の変形状態を示す。

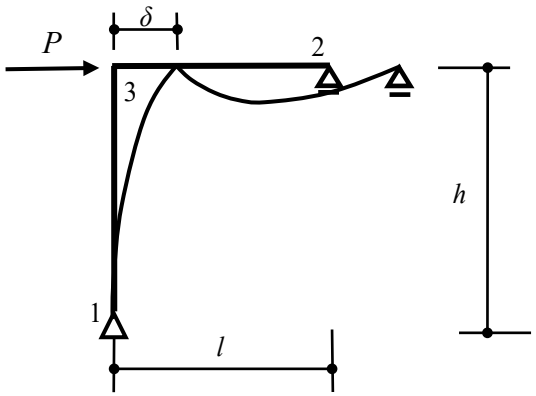


図 13 骨組の変形状態

以下に、これまでに誘導したたわみ角法に関する基本式と釣合式をまとめる。必ず覚えておこう。

R39：たわみ角法の基本式その 1

１：両端剛接合の場合

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji}$$

部材角と固定端モーメント

$$R=\frac{v_j-v_i}{l};\qquad C_{ij},C_{ji}$$

２：一端ピン・他端剛接合の場合

$$M_{ij}=0$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(1.5\theta_j-1.5R)+C_{ji}+\frac{1}{2}C_{ij}$$

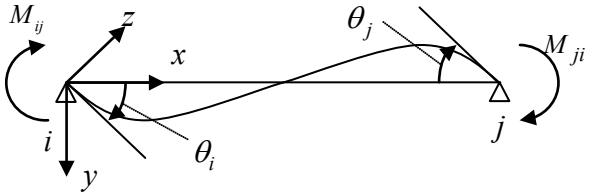


図 14 梁材端変位と材端モーメント

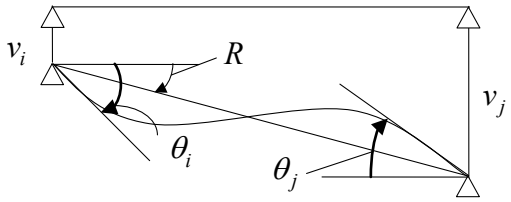


図 15 部材角と両端変位の関係

R40：たわみ角法の基本式その 2

標準剛度 $K_0=2EI_0/l_0$ を用いてたわみ角法の基本式を変換する。パラメータ k は剛比という。

パラメータ変換

$$k=\frac{K}{K_0};\quad K=\frac{2EI}{l}$$

$$\varphi_i=\theta_iK_0;\quad \psi=-3RK_0$$

両端剛接合

$$M_{ij}=k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi)-C_{ij}$$

$$M_{ji}=k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi)+C_{ji}$$

一端ピン、他端剛接合

$$M_{ij}=0$$

$$M_{ji}=k(1.5\varphi_j+0.5\psi)+C_{ji}+C_{ij}/2$$

R41：たわみ角法の釣合式

１：節点におけるモーメントの釣合

２：層せん断力、あるいは層モーメントの釣合

基礎７３話 No.1　片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重

付 16 話参照
ex67_1; ex67_2

今回から、たわみ角法を用いて、簡単な骨組の応力解析を行う。解析手順や解いた骨組の断面力分布を良く理解しておこう。その前に、たわみ角法の分類及び利点と欠点を以下にまとめる。

R42：たわみ角法の分類と釣合式

- 節点移動のない場合；節点モーメントの釣合式
- 節点移動のある場合
  - 整形ラーメン；節点モーメント＋層モーメントの釣合式
  - 異形ラーメン；節点モーメント＋仮想仕事による釣合式

R43：たわみ角法の利点と欠点

１：利点

1. 釣合式の自由度が圧倒的に小さく、手計算でも数値計算が可能となる
2. 変形場として回転角と部材角を用いており、平面骨組では座標変換を必要としない
3. 釣合式を機械的に求めることができる

２：欠点

1. 軸方向の伸縮を考慮しないため、軸力が自動的に求められない
2. 異形ラーメンでは、部材角間の依存関係を求める必要がある
3. 釣合式は連立方程式となり、実骨組では未知数が多数となり手計算では解析が難しい

簡単な例で、たわみ角法の有利さを実感してみよう。まず、節点移動のないモデルについて解析を行う。

1)片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重　　ex67_1

図 1 示すはね出し梁の先端に集中荷重 P が加わっており、先端の鉛直方向変位を求める。はね出し部分は片持ち梁の応力状態で表される。はね出し梁の反力と釣合う外力を加えて、図 1 下の左のような構造物の解析を行うことになる。この部材のたわみ角法の基本式を次のように示す。節点移動がないので部材角はゼロである。

$$M_{12} = \frac{2EI}{l}(2\theta_1 + \theta_2): \quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(2\theta_2 + \theta_1) \qquad \cdots\cdots(1)$$

上式では、部材の中間荷重がないので C_{12} , C_{21} はゼロとしている。ここで上式に境界条件を適用する。節点 1 は固定であるため $\theta_1 = 0$ であり、この境界条件を式(1)に適用すると、材端モーメントは次式となる。

$$M_{12} = \frac{2EI}{l}(\theta_2); \quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(2\theta_2) \qquad \cdots\cdots(2)$$

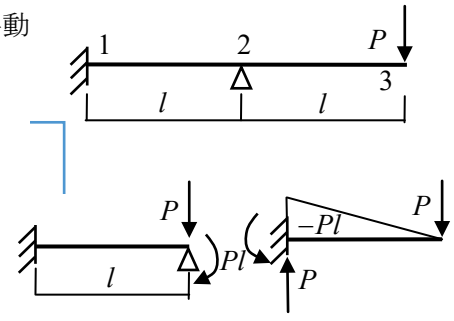


図１　片持ち梁で中央支持のある梁に先端集中荷重

次に、節点 1、2 におけるモーメントの釣合を考える。図 2 を参考にすると、2 節点でのモーメントの釣合は以下のように得られる。ここで、M_1 は固定端における反力であり、また、節点 2 における荷重 P は、直接支持点で支えられているため、釣合式には含まれない。

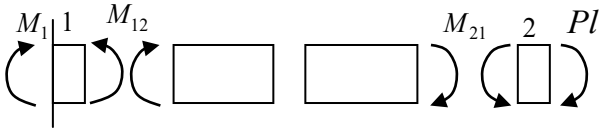


図 2 梁内部の断面力と材端力との力の釣合

$$M_1 - M_{12} = 0; \quad -M_{21} + Pl = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式に、式(2)に示す材端モーメントを代入すると、

$$M_1 = \frac{2EI}{l}\theta_2; \quad \frac{2EI}{l}(2\theta_2) = Pl \qquad \cdots\cdots(4)$$

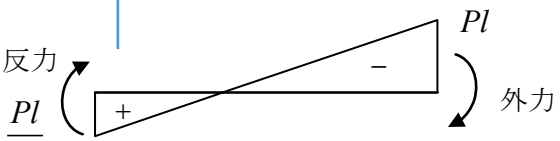
となる。式(4)の右を用いると、未知数である節点 2 の回転角 θ_2 は、次のように得られる。

$$\theta_2 = \frac{Pl^2}{4EI} \qquad \cdots\cdots(5)$$

得られた回転角を、式(2)に代入すると材端モーメント M_{12} と M_{21} は次式となる。

$$M_{12} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{Pl^2}{4EI} = \frac{Pl}{2}; \quad M_{21} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{2Pl^2}{4EI} = Pl \qquad \cdots\cdots(6)$$

梁内部に生じる曲げモーメントは、部材内の曲げモーメントと外力･反力とのモーメントの釣合から､図 3 となることが分かる。曲げモーメント図は、断面の引張側に描くことに注意しよう。従って、骨組全体の曲げモーメント図は、図 4 となる。



部材内の曲げモーメント分布

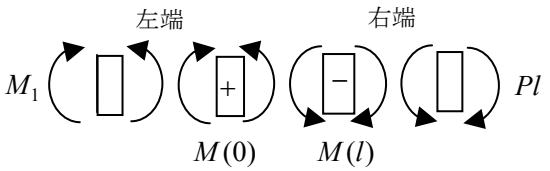


図 3 部材内の断面力と反力・外力との釣合

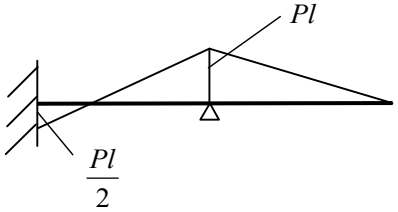


図 4 曲げモーメント図

また、先端のたわみと回転角は、片持梁先端のたわみ $\bar{v}_3$ と節点 2 の回転角による剛体変位との和で、次のように表される。

$$v_3 = \bar{v}_3 + \theta_2 \cdot l = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^2}{4EI}l = \frac{7Pl^3}{12EI}; \theta_3 = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{3Pl^2}{4EI} \cdots\cdots(7)$$

2) 単純梁＋はね出し　　ex67_2

前の例題とは、節点 1 の境界がピン支持である点が異なる。この構造物は前例題と同様にはね出し部分は片持ち梁の応力状態となるため、図 5 の下左の構造物について解析を行うことになる。この構造物は両端ピン支持であるが、節点にはモーメント荷重が加わるため、一端ピン・他端剛接合の基本式を使用する。以下にそのたわみ角法の基本式は、次式となる。

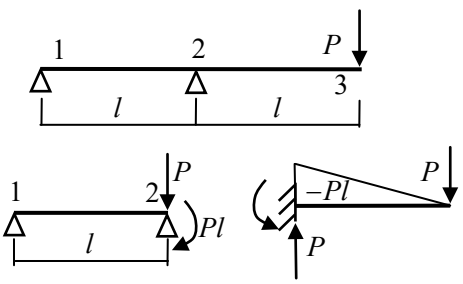


図 5 単純梁・はね出し梁＋梁先端集中荷重

$$M_{12} = 0; \quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2) \qquad \cdots\cdots(8)$$

前例に従って、読者自身で応力解析を行ってみよう。

基礎７４話 No.2　はね出しを有する単純梁＋先端集中荷重

付 17 話参照
ex75_1

前回の続きで、図 5 に示す単純支持で他端にはね出しがある梁を、たわみ角法を用いて応力解析を行う。既に一端が固定の梁を応力解析した。ここでは、先の例に従って応力解析を行い、解析順序を十分に理解しよう。まず、一端ピン・他端が剛接合の基本式を以下に示す。ここでは、部材角も部材荷重もない。

$$M_{12} = 0; \quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2) \qquad \cdots\cdots(9)$$

次に、節点 2 でのモーメントの釣合を考えると、次式の左となり、式(9)の基本式を代入すると、釣合式が得られる。

$$-M_{21} + Pl = 0 \rightarrow Pl = \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2) \qquad \cdots\cdots(10)$$

従って、回転角 θ_2 は、

$$\theta_2 = \frac{Pl^2}{3EI} \qquad \cdots\cdots(11)$$

得られた回転角を式(9)の材端モーメントに代入すると

$$M_{21} = \frac{2EI}{l}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{Pl^2}{3EI}\right) = Pl \qquad \cdots\cdots(12)$$

となる。得られた材端モーメントより、曲げモーメント図とせん断力図を図 6 に示す。また、先端のたわみと回転角は片持梁先端のたわみ $\bar{v}_3$ 及び回転角に、節点 2 の回転角による剛体変位を加えて表される。

$$v_3 = \bar{v}_3 + \theta_2 l = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^2}{3EI}l = \frac{2Pl^3}{3EI}; \theta_3 = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{3EI} = \frac{5Pl^2}{6EI} \qquad \cdots\cdots(13)$$

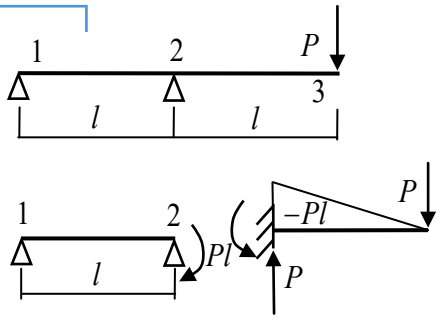
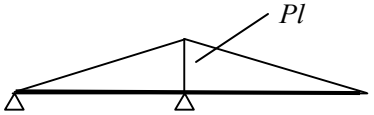
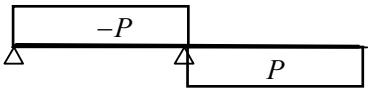


図 5 単純梁・はね出し＋先端集中荷重



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 6 単純梁・はね出し梁の断面力図

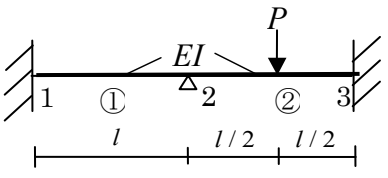
3) 両端固定支持の連梁＋右梁中央集中荷重　ex75_1

図 7 に示す両端固定の連梁で右側の梁に中央集中荷重のある場合ついて、たわみ角法で応力解析を行い、曲げモーメント図とせん断力図を求める。このモデルも節点移動がない骨組であり、また部材荷重が加わっているので、部材②の部材荷重に対する基本応力を求める。**基本応力**とは、両端固定状態における固定端モーメント C と単純梁状態における中央の曲げモーメント M_0、及び端部のせん断力 Q をまとめた総称である。これを CM_0Q と呼ぶ場合もある。

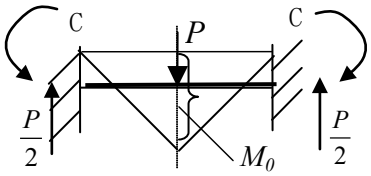
中央集中荷重の基本応力は、以下のようであり、

$$C = \frac{Pl}{8}; \quad M_0 = \frac{Pl}{4} = 2C; \quad Q = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(14)$$

参考のために等分布荷重の基本応力は、



(a) 両端固定の連梁



(b) 基本応力

図 7 両端固定の連梁＋右梁中央集中荷重

$$C=\frac{p_w l^2}{12};\quad M_0=\frac{p_w l^2}{8}=\frac{3C}{2};\quad Q=\frac{p_w l}{2} \qquad \cdots\cdots(15)$$

となる。この 2 種の基本応力は、今後良く使用するので覚えておこう。

部材①、②に対してたわみ角法の基本式を適用する。

部材①　$M_{12}=\frac{2EI}{l}(2\theta_1+\theta_2);\quad M_{21}=\frac{2EI}{l}(2\theta_2+\theta_1)$ ……(16)

部材②　$M_{23}=\frac{2EI}{l}(2\theta_2+\theta_3)-C;\quad M_{32}=\frac{2EI}{l}(2\theta_3+\theta_2)+C$ ‥(17)

上記の固定端モーメントの符号は、図 7(b)の基本応力のモーメント反力の方向で決めることになる。このモデルでは梁中央集中荷重なので、式(14)に示す基本応力を用いる。

次に、境界条件について考えてみよう。境界条件は節点 1 と 3 が固定支持であり、該当する節点の回転角は、次のようにゼロとなる。

$$\theta_1=\theta_3=0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

上式を、式(16)と(17)の材端モーメントに代入すると、次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12}&=\frac{2EI}{l}(\theta_2);\quad M_{21}=\frac{2EI}{l}(2\theta_2)\\ M_{23}&=\frac{2EI}{l}(2\theta_2)-C;\quad M_{32}=\frac{2EI}{l}(\theta_2)+C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

上式から分かるように、未知数は節点 2 の回転角 θ_2 のみである。釣合式は、節点 2 におけるモーメントの釣合より得られ、この釣合式から、θ_2 が以下のように求められる。

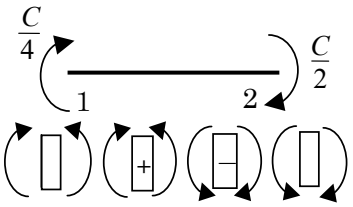
$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\frac{2EI}{l}(2\theta_2)+\frac{2EI}{l}(2\theta_2)-C=0\rightarrow$$
$$\frac{2EI}{l}(4\theta_2)=C\rightarrow\theta_2=\frac{l}{8EI}C \qquad \cdots\cdots(20)$$

次に部材の応力を求める。求めた回転角 θ_2 を式(19)に代入すると、各部材の材端モーメントが次のように得られる。

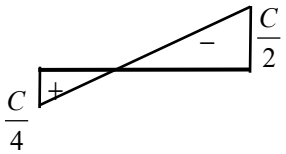
$$\left.\begin{aligned} M_{12}&=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{l}{8EI}C=\frac{C}{4};\quad M_{21}=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{2l}{8EI}C=\frac{C}{2}\\ M_{23}&=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{2l}{8EI}C-C=\frac{C}{2}-C=-\frac{C}{2};\quad M_{32}=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{l}{8EI}C+C=\frac{5}{4}C \end{aligned}\right\}(21)$$

得られた材端モーメントと部材内端部の曲げモーメントとの釣合から、部材内部の応力状態を求める。最初に、部材①について検討しよう。図 8(a)では、材端モーメントと部材内の応力とのモーメントの釣合から部材端部の曲げモーメントが求められ、結果、同図(b)で示される曲げモーメント分布が得られる。部材内の曲げモーメント分布が分かれば、せん断力分布は容易に得られる。曲げモーメント分布が直線であることから、せん断力分布は定数であり、部材のせん断力分布は曲げモーメントの傾きより、次式となる。部材 2 については、次回検討しよう。

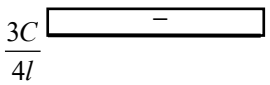
$$Q_1=-\frac{M_{21}+M_{12}}{l}=-\frac{-M(l)+M(0)}{l}=-(\frac{C}{2}+\frac{C}{4})/l=-\frac{3C}{4l}=-\frac{3}{32}P \qquad \cdots(22)$$



(a) 部材①の材端モーメントと部材内曲げモーメントの釣合



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

図 8 部材①の材端モーメントと部材内曲げモーメントの釣合

基礎７５話 No.3　両端固定支持の連梁＋右梁中央集中荷重

付 17 話参照
ex75_2

前回の続きで、図 7 に示す両端固定の連梁を、たわみ角法により応力解析を行う。ここでは、梁中央集中荷重が加わっている部材 2 について考える。材端モーメントと部材内応力のモーメントの釣合が、図 9 に示されている。部材内の応力は、応力解析により求めた応力状態と両端固定の応力状態を重ね合わせて求める。ただし、両端固定の材端応力は、式(19)の M_{23} , M_{32} から分かるように既に固定端力として考慮されている。そのため、図 9(b)の曲げモーメント分布に、図 10 で示す単純梁の応力状態を加えることで、部材内の曲げモーメント分布を求めても良い。一般にはこの方法が良く用いられる。部材中央の曲げモーメント M_c は、図 10 から次式で求められる。

$$M_c = M_0 - (M_{32} - M_{23})/2 = M_0 - (\frac{5}{4}C + \frac{C}{2})/2 = 2C - \frac{7}{8}C = \frac{9}{8}C \quad \cdots(23)$$

結果、図 10 に示すような曲げモーメント分布が得られる。次に、せん断力分布として、中央より左 Q_L と右 Q_R は次のようになり、図 11 に描かれる。

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -(\frac{C}{2} + \frac{C}{4})/l = -\frac{3}{4l}C = -\frac{3}{32}P \\ Q_{2L} &= (\frac{9}{8}C + \frac{C}{2})/0.5l = \frac{13}{4l}C = \frac{13}{32}P \quad \leftarrow C = \frac{Pl}{8} \\ Q_{2R} &= (-\frac{5}{4}C - \frac{9}{8}C)/0.5l = -\frac{19}{4l}C = -\frac{19}{32}P \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(24)$$

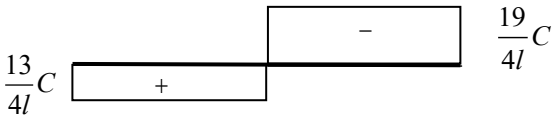
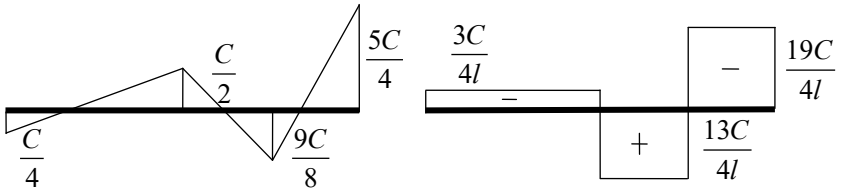


図 11 右部材内のせん断力分布

これまでに求めた各部材の応力をまとめると、骨組全体の曲げモーメント図及びせん断力図が図 12 に示される。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

図 12 構造物の曲げモーメント図とせん断力図

次に、支持点における反力を、部材の断面力との力の釣合より求めてみよう。図 13 と 14 に示す部材断面力と反力との力の釣合より、節点の

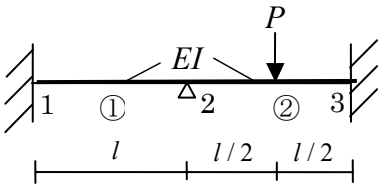
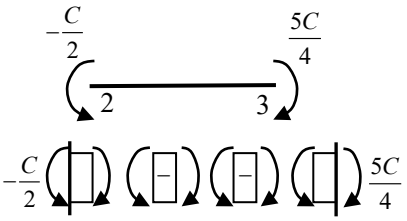


図 7 両端固定の連梁



(a) 材端モーメントと梁端部の曲げモーメントの釣合

(b) 曲げモーメント図

図 9　部材 2 の材端モーメントと部材内曲げモーメントの釣合

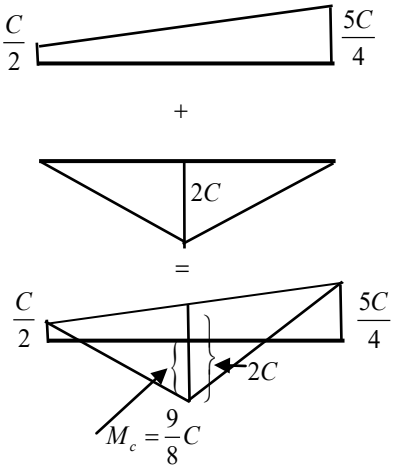


図 10 部材内の曲げモーメント分布

反力が図 14 のように求められる。

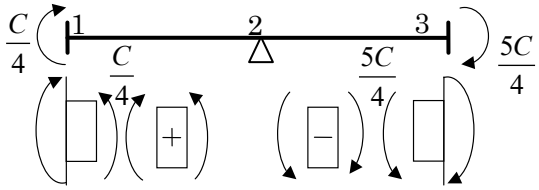


図 13 曲げモーメントと反力の釣合

得られた反力から図 14 を参考にして、外力と反力との釣合を確認する。まず、上下方向の力は、

$$\sum Y = P + \frac{3P}{32} - \frac{P}{2} - \frac{19P}{32} \to 0 \qquad \cdots\cdots(25)$$

となり、釣合っていることが理解できる。次に、モーメントの釣合であるが、ここでは、節点 1 に関するモーメントを考える。節点 1 におけるモーメントは、

$$M_1 = \frac{C}{4} + \frac{5C}{4} - \frac{Pl}{2} + \frac{3Pl}{2} - \frac{2\cdot 19Pl}{32} = \frac{3Pl}{16} - \frac{8Pl}{16} + \frac{24Pl}{16} - \frac{19Pl}{16} \to 0 \qquad \cdots\cdots(26)$$

となり、これも釣合っていることが分かる。

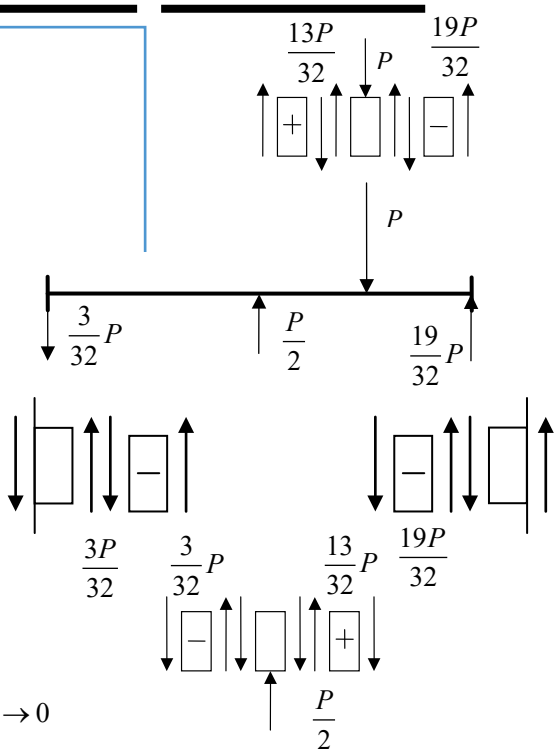


図 14 せん断力と反力の釣合

4）一端固定・他端ピン支持の連梁　　ex75_2

前のモデルとほぼ同じで、境界条件を変えて応力解析を行う。図 15(a)は節点 1 がピン支持となり、同図(b)では節点 3 もピン支持となる。まず、図 15(a)のモデルの応力解析を行う。

部材番号①の一端ピン・他端剛接合の材端モーメント、同じく②の一端固定支持のたわみ角法の基本式は次式で与えられる。

部材①　$M_{12} = 0;\quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2)$ $\cdots\cdots(27)$

部材②　$M_{23} = \frac{2EI}{l}(2\theta_2) - C;\quad M_{32} = \frac{2EI}{l}(\theta_2) + C$ $\cdots\cdots(28)$

上記の中央集中荷重の基本応力は、以下のようである。

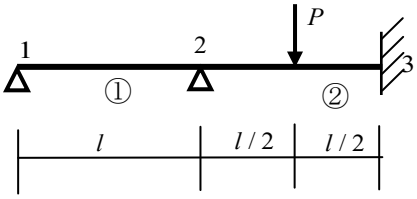
$$C = \frac{Pl}{8};\quad M_0 = \frac{Pl}{4} = 2C;\quad Q = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(29)$$

上で示した両部材の材端モーメントには、既に節点 1 のピン支持と節点 3 の固定支持の境界条件 $(\theta_3 = 0)$ が適用されている。節点 2 におけるモーメントの釣合より、回転角 θ_2 が次のように求められる。

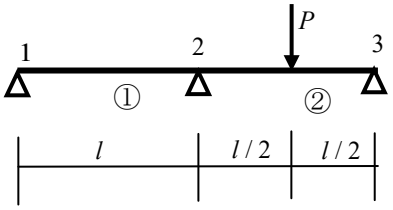
$$M_{21} + M_{23} = 0 \to \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2) + \frac{2EI}{l}(2\theta_2) - C = 0 \to \theta_2 = \frac{lC}{7EI} \qquad \cdots\cdots(30)$$

求めた回転角を式(27)と(28)に代入すると、次にように材端モーメントが得られる。以降は次回お話しする。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= 0;\quad M_{21} = \frac{2EI}{l}(1.5\frac{lC}{7EI}) = \frac{3C}{7} \\ M_{23} &= \frac{2EI}{l}(2\frac{lC}{7EI}) - C = -\frac{3C}{7};\quad M_{32} = \frac{2EI}{l}(\frac{lC}{7EI}) + C = \frac{9C}{7} \end{aligned}\right\} \cdots(31)$$



(a) 一端ピン・他端固定の連梁



(b) 両端ピン支持の連梁

図 15 境界を変化させた連梁の応力解析

基礎７６話 No.4 一端固定・他端ピン支持の連梁と両端ピン支持の連梁

付 17 話参照
ex75_3

前回の続きで、図 15 に示す連梁で境界条件を変化させたモデルに対し、たわみ角法を用いて応力解析を行う。図 15(a)は節点 1 がピン支持、同図(b)では節点 3 もピン支持とする。まず、図 15(a)のモデルの応力解析の続きを行う。

前回では、既に節点 2 におけるモーメントの釣合より、回転角の値を求めた。この回転角 θ_2 を、境界条件を考慮した材端モーメントに代入すると、次式が得られた。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{2EI}{l}(1.5\frac{lC}{7EI})=\frac{3C}{7} \\ &M_{23}=\frac{2EI}{l}(2\frac{lC}{7EI})-C=-\frac{3C}{7};\quad M_{32}=\frac{2EI}{l}(\frac{lC}{7EI})+C=\frac{9C}{7} \end{aligned}\right\}\cdots(31)$$

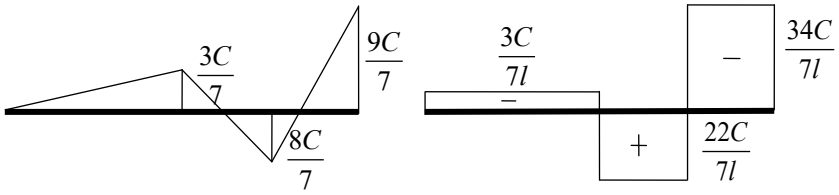
続いて、図 16 を参考にして、荷重の加わっている部材②の荷重直下の曲げモーメント M_c を求める。

$$M_c=M_0-(M_{32}-M_{23})/2=2C-(\frac{9}{7}C+\frac{3C}{7})/2=2C-\frac{6}{7}C=\frac{8}{7}C \quad\cdots(32)$$

次に、せん断力分布として、部材①の Q_1 及び部材②の中央より左 Q_{2L} と右 Q_{2R} は、次にようになる。

$$\left.\begin{aligned} &Q_1=(-\frac{3C}{7})/l=-\frac{3}{7l}C=-\frac{3}{56}P \quad\leftarrow C=\frac{Pl}{8} \\ &Q_{2L}=(\frac{8}{7}C+\frac{3C}{7})/0.5l=\frac{22}{7l}C=\frac{22}{56}P \\ &Q_{2R}=(-\frac{9}{7}C-\frac{8}{7}C)/0.5l=-\frac{34}{7l}C=-\frac{34}{56}P \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(33)$$

これまでに求めた各部材の応力をまとめると、骨組全体の曲げモーメント分布及びせん断力分布が図 17 として示される。

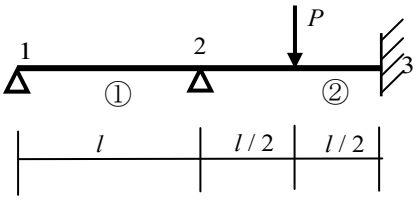


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

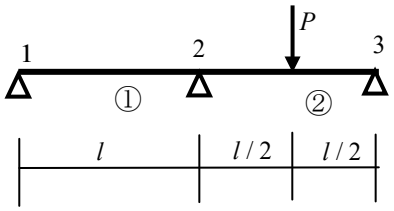
図 17 一端ピン・他端固定の連梁の断面力図

次に、支持点における反力及び荷重直下の釣合を、部材の断面力から求めてみよう。節点 1 と 3 の反力は、図 18 より

$$\left.\begin{aligned} &-V_1+Q_1=0\rightarrow\quad V_1=-\frac{3P}{56};\quad Q_R+V_3=0\rightarrow\quad V_3=\frac{34P}{56} \\ &M_3-M_{32}=0\rightarrow\quad M_3=\frac{9C}{7}=\frac{9Pl}{56} \end{aligned}\right\}\cdots(34)$$



(a) 一端ピン・他端固定の連梁



(b) 両端ピン支持の連梁

図 15 境界を変化させた連梁の応力解析

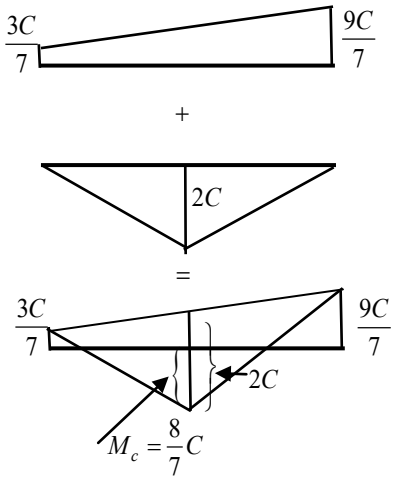


図 16 部材内の曲げモーメント分布

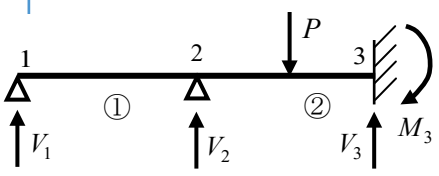


図 18　荷重と反力の仮定

となり、節点 2 及び荷重直下での釣合は、

$$\left.\begin{aligned} &-V_2-Q_1+Q_L=0\rightarrow\quad V_2=\frac{3P}{56}+\frac{22P}{56}=\frac{25P}{56}\\ &P-Q_{2L}+Q_{2R}=P-\frac{22P}{56}-\frac{34P}{56}\rightarrow 0 \end{aligned}\right\}\cdots(35)$$

となる。外力と反力の釣合及び節点 1 でのモーメント釣合は、

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y=-V_1-V_2-V_3+P=\frac{3P}{56}-\frac{25P}{56}-\frac{34P}{56}+P\rightarrow 0\\ &M_1=M_3-V_2l-2lV_3+1.5lP=\frac{9Pl}{56}-\frac{25Pl}{56}-\frac{68Pl}{56}+1.5Pl=-\frac{84Pl}{56}+1.5Pl\rightarrow 0 \end{aligned}\right\}\cdots(36)$$

となり、両者ともに釣合っている。

4）両端ピン支持の連梁　　ex75_3

続いて、図 15(b)のモデルの応力解析を行う。ここでは両部材の材端モーメントは一端ピン・他端剛接合の次式で与えられる。

部材①　$M_{12}=0;\quad M_{21}=\dfrac{2EI}{l}(1.5\theta_2)$　……(37)

部材②　$M_{23}=\dfrac{2EI}{l}(1.5\theta_2)-\bar{C};\quad M_{32}=0$　……(38)

一端ピン・他端固定梁の中央集中荷重の基本応力は、以下のようである。

$$C=\frac{Pl}{8};\quad \bar{C}=1.5C;\quad M_0=\frac{Pl}{4}=2C;\quad Q=\frac{P}{2};\quad \bar{Q}_L=Q-\frac{1.5C}{l};\quad \bar{Q}_R=-Q-\frac{1.5C}{l}\cdots\cdots(39)$$

節点 2 におけるモーメントの釣合より、回転角 θ_2 が次式で得られる。

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\ \frac{2EI}{l}(1.5\theta_2)+\frac{2EI}{l}(1.5\theta_2)-\bar{C}=0\rightarrow\theta_2=\frac{l\bar{C}}{6EI}\quad\cdots(40)$$

求めた回転角 θ_2 を式(37)と(38)に代入すると、材端モーメントが各々得られる。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{2EI}{l}(1.5\frac{l\bar{C}}{6EI})=\frac{\bar{C}}{2}=\frac{3C}{4}\\ &M_{23}=\frac{2EI}{l}(1.5\frac{l\bar{C}}{6EI})-\bar{C}=-\frac{\bar{C}}{2}=-\frac{3C}{4};\quad M_{32}=0 \end{aligned}\right\}\cdots(41)$$

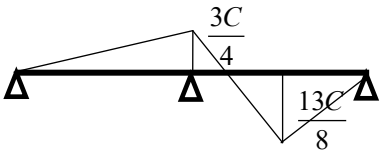
続いで、荷重の加わっている部材②の荷重直下の曲げモーメントを求める。

$$M_c=M_0-(-M_{23})/2=2C-(\frac{\bar{C}}{2})/2=2C-\frac{1.5}{4}C=\frac{13}{8}C\quad\cdots(42)$$

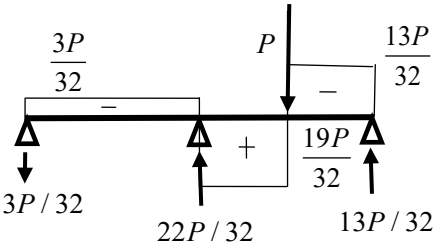
次に、せん断力分布として、部材①の Q_1 及び部材②の中央より左 Q_{2L} と右 Q_{2R} は、次にようになる。

$$\left.\begin{aligned} &Q_1=(-\frac{3C}{4})/l=-\frac{3C}{4l}=-\frac{3}{32}P\\ &Q_{2L}=(\frac{13}{8}C+\frac{3C}{4})/0.5l=\frac{19}{4l}C=\frac{19}{32}P\\ &Q_{2R}=(-\frac{13}{8}C)/0.5l=-\frac{13}{4l}C=-\frac{13}{32}P \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(43)$$

これまでに求めた各部材の応力をまとめると、骨組全体の曲げモーメント図及びせん断力図が図 19 に示される。



(a) 曲げモーメント図



$$M_1=-\frac{22P}{32}l-\frac{13}{32}2l+1.5Pl\rightarrow 0$$

(b) せん断力図と節点 1 でのモーメントの釣合

図 19 連梁の断面力図

基礎７７話 No.5 両端ピン支持の門型ラーメン＋梁中央集中荷重

付 16 話参照
ex68_1

今回は、図20に示す梁中央に集中荷重を受ける両端ピン支持門型ラーメンの応力解析を行う。

5）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重　ex68_1

この構造は既に梁の微分方程式を用いて応力解析し、断面力分布を求めた。結果を得る過程が複雑で、結構面倒であることに気付いたであろう。さらに複雑な構造では、とてもこの種の方法では解析できない。そこで、このたわみ角法が威力を発揮する。

この構造は、対称構造で対称荷重であるため、対称の応力状態・変形状態となる。このことを考慮して、たわみ角法により断面力分布を求めてみよう。対称変形では半分の骨組を解析すれば良い。まず、部材①と②の基本式を以下に示す。柱の材端はピン支持で、対称変形であるため部材角はない。さらに部材荷重もない。梁は部材荷重の中央集中荷重があり、また部材角は生じない。これらを考慮した材端モーメントは、

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{2EI_c}{h}(1.5\theta_2)\\ &M_{23}=\frac{2EI_b}{l}(2\theta_2+\theta_3)-C;\quad M_{32}=\frac{2EI_b}{l}(2\theta_3+\theta_2)+C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(44)$$

となる。このモデルは対称変形となるため $\theta_2=-\theta_3$ の条件が用いられる。この条件を梁の基本式に適用すると、次の材端モーメントが得られる。

$$M_{23}=\frac{2EI_b}{l}\theta_2-C;\quad M_{32}=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2+C=-M_{23}\qquad\cdots\cdots(45)$$

上記の材端モーメントでは、未知変数は回転角 θ_2 のみであり、節点 2 におけるモーメントの釣合を用いると、次の釣合式が得られる。

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\frac{2EI_c}{h}(1.5\theta_2)+\frac{2EI_b}{l}(\theta_2)-C=0\rightarrow\qquad\cdots\cdots(46)$$

$$(\frac{3EI_c}{h}+\frac{2EI_b}{l})\theta_2=C\qquad\cdots\cdots(47)$$

上式における基本応力は、中央集中荷重であることから、

$$C=\frac{Pl}{8};\quad M_0=\frac{Pl}{4}=2C;\quad Q=\frac{P}{2}\qquad\cdots\cdots(48)$$

であり、また、曲げ剛性を以下のように表すと、釣合式は、

$$\frac{2EI_c}{h}=K_c;\quad\frac{2EI_b}{l}=K_b\rightarrow(1.5K_c+K_b)\theta_2=C\qquad\cdots\cdots(49)$$

となる。上式を解くと、回転角 θ_2 が次のように得られる。

$$\theta_2=\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}\qquad\cdots\cdots(50)$$

次に、各部材の応力を求めよう。釣合式を解いて得た回転角 θ_2 を基本

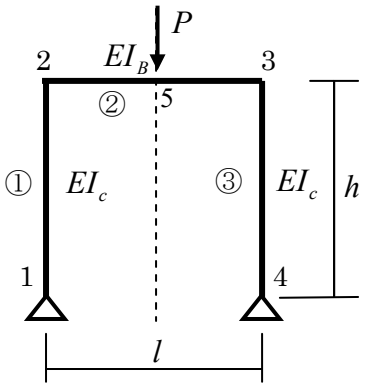
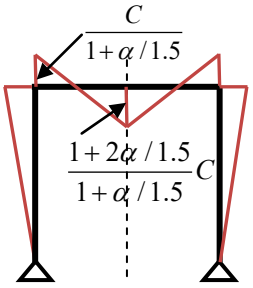
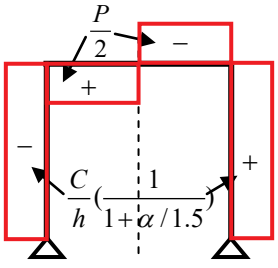


図 20 両端ピン支持＋梁中央集中荷重の門型ラーメン



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

式に代入すると、各部材の材端モーメントが以下のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12}=0;\quad M_{21}=K_c(1.5\frac{C}{(1.5K_c+K_b)})=\frac{C}{1+\alpha/1.5} \\ M_{23}=K_b\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}-C=\frac{K_bC}{(1.5K_c+K_b)}-\frac{1.5K_c+K_b}{(1.5K_c+K_b)}C=\frac{-C}{1+\alpha/1.5} \end{aligned}\right\}\cdots(51)$$

ただし、パラメータ α は梁と柱の曲げ剛性比を表す。

$$\alpha=\frac{K_b}{K_c}=\frac{EI_b/l}{EI_c/h} \qquad \cdots\cdots(52)$$

梁中央の曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$M_c=M_0-(M_{32}-M_{23})/2=2C-\frac{C}{1+\alpha/1.5}=\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C \qquad \cdots\cdots(53)$$

次に、曲げモーメント図を利用して、梁と柱のせん断力を求める。まず、梁のせん断力は、

$$Q_{bL}=2(M_c-M_{23})/l=\frac{2C}{l}(\frac{1+3\alpha}{1+\alpha/1.5}+\frac{1}{1+\alpha/1.5})=\frac{4}{l}\frac{Pl}{8}=\frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(54)$$

となり、柱のせん断力は次式となる。

$$Q_c=(-M_{21})/h=\frac{-C}{h}(\frac{1}{1+\alpha/1.5})=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5} \qquad \cdots\cdots(55)$$

図 22 を参考にすると、軸力は節点 2 におけるせん断力と軸力の釣合より、次のようになる。

$$N_c=\frac{-P}{2};\quad N_b=\frac{-C}{h}(\frac{1}{1+\alpha/1.5})=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5} \qquad \cdots\cdots(56)$$

得られた断面力より、各断面力図を図 21 のように描く。

梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に大きい場合、つまり $\alpha=K_b/K_c\to\infty$ の場合、各節点の断面力は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{C}{1+\alpha/1.5}\to 0 \\ M_{23}=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}\to 0;\quad M_c=\frac{1/\alpha+2/1.5}{1/\alpha+1/1.5}C=2C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(57)$$

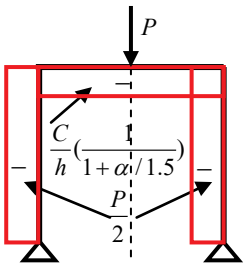
上記の場合、図 23(a)のように梁は両端ピン支持状態の断面力となり、柱のせん断力はゼロとなり、軸力のみ生じる。

逆に、梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に小さい場合(同図(b))、つまり $\alpha=K_b/K_c\to 0$ の場合、各節点の断面力は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{C}{1+\alpha/1.5}\to C \\ M_{23}=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}\to -C;\quad M_c=\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C\to C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(58)$$

ここでは、梁は両端固定支持状態の断面力となる。

両極端の状況より、梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に大きいと材端モーメントはゼロとなり、柱の曲げ剛性が大きくなるに従って、梁材端の拘束が徐々に向上し、梁の材端モーメントが吊り上がることが分かる。



(c) 軸力図

図 21 門型ラーメン断面力図

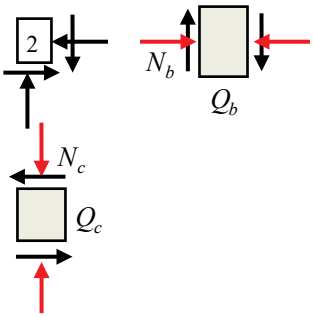
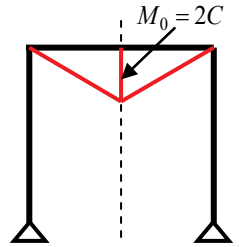
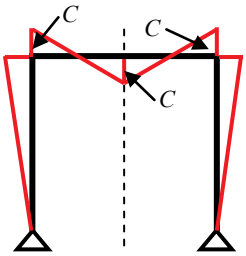


図 22 節点 2 での力の釣合



(a) $\alpha=K_b/K_c\to\infty$

(梁の曲げ剛性が柱に比べて極端に大きい)



(b) $\alpha=K_b/K_c\to 0$

(梁の曲げ剛性が柱に比べて極端に小さい)

図 23 極端な状態での曲げモーメント図

基礎７８話　たわみ角法の基本式まとめ

複雑な構造の応力解析を行う前に、境界条件や基本応力についてまとめる。また、たわみ角法の基本式を再度表示する。必ず覚えておこう。

基本式でも単位系に気を付けよう
基本式の左辺はモーメントの単位を持つことから、右辺の各項も同様である。θ,R は角度であり、無次元量である。従って、曲げ剛性を表す EI/l もモーメントの単位を持つ。例えば、C_{ij} が kNm の単位であれば、曲げ剛性も同じ単位でなければならない。

R39：たわみ角法の基本式

１：両端剛接合の場合

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji}$$

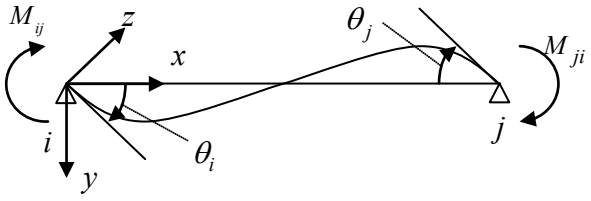


図１梁材端変位と材端モーメント

部材角と固定端モーメント

$$R=\frac{v_j-v_i}{l};\qquad C_{ij},C_{ji}$$

２：一端ピン・他端剛接合の場合

$$M_{ij}=0$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(1.5\theta_j-1.5R)+C_{ji}+\frac{1}{2}C_{ij}$$

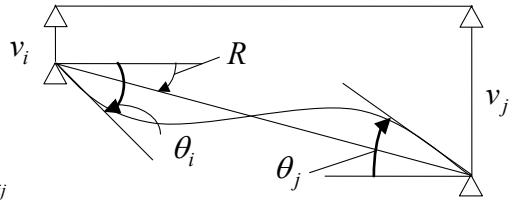


図２ 部材角と両端変位の関係

基本式その 2 でも同様で、単位系には気を付ける。係数の剛比 k は無次元量であるため、φ,ψ はモーメントの単位を持つ。固定端モーメントが kNm の単位であれば、解析結果の φ,ψ も kNm の単位を有する。これは特に注意が必要。

R40：たわみ角法の基本式その 2

標準剛度 $K_0=2EI_0/l_0$ を用いて、たわみ角法の基本式を変換する。パラメータ k は剛比という。

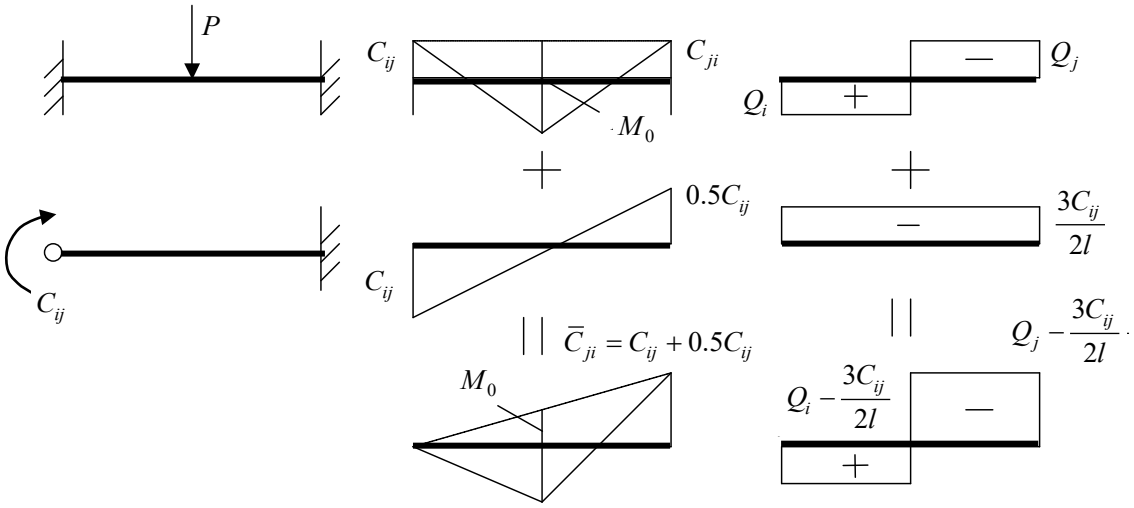
パラメータ変換	両端剛接合	一端ピン・他端剛接合
$k=\frac{K}{K_0};\quad K=\frac{2EI}{l}$	$M_{ij}=k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi)-C_{ij}$	$M_{ij}=0$
$\varphi_i=\theta_i K_0;\quad \psi=-3RK_0$	$M_{ji}=k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi)+C_{ji}$	$M_{ji}=k(1.5\varphi_j+0.5\psi)+C_{ji}+C_{ij}/2$

次に、基本応力についてまとめる。特に固定端モーメントで一端ピン支持となった場合は基本応力が次のように変化するので注意されたい。

R44：両端剛接合及び一端ピン＋他端剛接合の梁の基本応力

	両端剛接合	一端ピン・他端剛接合
中央集中荷重	$C=\frac{Pl}{8};\quad M_0=\frac{Pl}{4}=2C;\quad Q=\frac{P}{2}$	$\bar{C}=\frac{3Pl}{16};\quad M_0=\frac{Pl}{4};\quad Q_L=\frac{5P}{16};\quad Q_R=-\frac{11P}{16}$
等分布荷重	$C=\frac{p_w l^2}{12};\quad M_0=\frac{p_w l^2}{8}=\frac{3}{2}C;\quad Q=\frac{p_w l}{2}$	$\bar{C}=\frac{p_w l^2}{8};\quad M_0=\frac{p_w l^2}{4};\quad Q_L=\frac{3p_w l}{8};\quad Q_R=-\frac{5p_w l}{8}$

上記の一端がピン支持された部材に、中間荷重が加わる場合の基本応力について考えよう。この場合、図 3 で示される一端ピン支持の応力状態を基本応力にする。



曲げモーメント図　　せん断力図

図 3 両端固定から一端ピン支持への基本応力の変化

現在、実務でたわみ角法を用いることはまずない。しかし、同法を理解し、演習することで、重要な情報が多数得られる。コンピュータによる解析結果を分析する際、大いに役立つことになろう。

R45：対称構造＋対称荷重は対称応力、対称変形

１：梁の中央に対称軸がある場合、次の条件のもとに骨組の半分を解く

1. 部材角はなし
2. 対称軸に対し、対応する節点回転角には同じ値で逆符号となる

２：柱に対称軸がある場合

1. 部材角はなし
2. 対称軸上の柱と梁の接合部で、梁は固定境界とし、柱は消去する
   該当する柱には応力は生じない

R46：対称構造＋逆対称荷重は逆対称応力、逆対称変形

１：梁の中央に対称軸がある場合、次の条件のもとに骨組の半分を解く

1. 柱に部材角あり
2. 対称軸に対し、対応する節点回転角は同符号で同じ値となる

２：柱に対称軸がある場合

1. 柱に部材角あり、対称軸上の柱の曲げ剛性を半分にする
2. 対称軸に対し、対応する節点回転角は同符号で同じ値となる

基礎７９話 No.1　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重

付 18 話参照
ex79_1~ ex79_3

門型ラーメンに非対称荷重が加わると、骨組はスウェイし、節点移動を生じる。今回は、図 1 に示す骨組を用いて、節点移動のある場合の解析手順を学ぶ。

1) 両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　ex79_1

骨組は部材数 3、節点数 4 で構成され、節点 2 の柱頭に水平荷重 P が作用する。この骨組は、対称骨組で荷重が逆対称であるため、図中の中央線を軸に逆対称変形となる。従って、逆対称条件を用いて骨組の半分を応力解析すれば良い。まず、固定境界 $\theta_1=0$ と逆対称条件 $\theta_2=\theta_3$ を考慮して、部材①と②の基本式を以下に示す。

$$\left.\begin{aligned} M_{12}&=\frac{2EI_c}{h}(\theta_2-3R_{\mathrm{I}});\quad M_{21}=\frac{2EI_c}{h}(2\theta_2-3R_{\mathrm{I}})\\ M_{23}&=\frac{2EI_b}{l}(2\theta_2+\theta_3)=\frac{2EI_b}{l}3\theta_2;\quad M_{32}=M_{23}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

この骨組の自由度は、上式から分かるように、θ_2 と R_{I} の 2 つであり、従って、2 つの釣合式が必要となる。

まず、節点におけるモーメントの釣合を考えよう。節点 2 におけるモーメントの釣合式は

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\frac{2EI_c}{h}(2\theta_2-3R_{\mathrm{I}})+\frac{2EI_b}{l}3\theta_2=0\rightarrow$$
$$(2K_c+3K_b)\theta_2-3K_cR_{\mathrm{I}}=0\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h};K_b=\frac{2EI_b}{l}\qquad\cdots\cdots(2)$$

であり、次に、層モーメントの釣合は逆対称であることを考慮して、一本の柱のせん断力を使用すると

$$M_{12}+M_{21}=-\frac{Ph}{2}\rightarrow\frac{2EI_c}{h}(\theta_2-3R_{\mathrm{I}})+\frac{2EI_c}{h}(2\theta_2-3R_{\mathrm{I}})=-\frac{Ph}{2}\rightarrow$$
$$3K_c\theta_2-6K_cR_{\mathrm{I}}=-\frac{Ph}{2}\qquad\cdots\cdots(3)$$

上式の両辺に−1 をかけ、式(2)と共に行列表記すると

$$\begin{bmatrix}2K_c+3K_b & -3K_c\\ -3K_c & 6K_c\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_2\\ R_{\mathrm{I}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ Ph/2\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(4)$$

上記の全体釣合式が得られる。上式から分かるように、左辺の係数行列は対称であり、このようにたわみ角法の係数行列は、常に対称行列となる。この係数行列は一般に**剛性行列**と呼ばれる。

上の連立方程式を解くことによって回転角 θ_2 と部材角 R_{I} が、次のように得られる。

$$\theta_2=\frac{Ph}{2(K_c+6K_b)};\quad R_{\mathrm{I}}=\frac{2K_c+3K_b}{6K_c(K_c+6K_b)}Ph\qquad\cdots\cdots(5)$$

次に、各部材の応力を求めよう。釣合式を解いて得た回転角 θ_2 と部材角 R_{I} をたわみ角法の基本式(1)に代入すると、各部材の材端モーメント

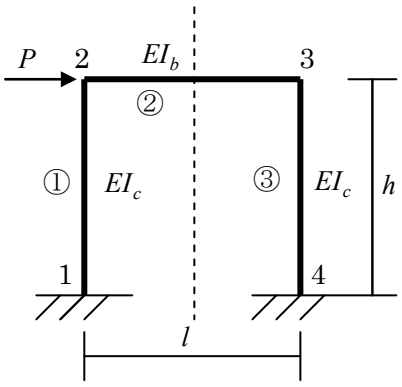


図 1 両端固定支持で柱頭に水平荷重が加わる門型ラーメン

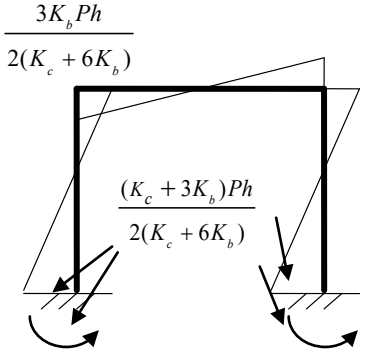


図 2 曲げモーメント図

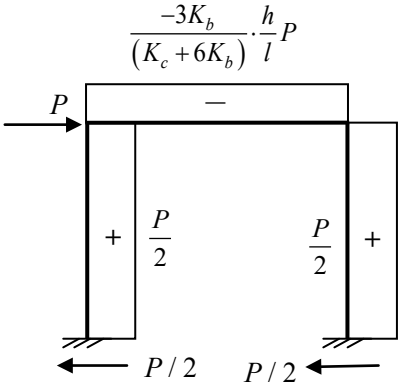


図 3 せん断力図

が以下のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= K_c\left(\frac{1}{2(K_c+6K_b)}-\frac{2K_c+3K_b}{2K_c(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{K_c-2K_c-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph \\ M_{21} &= K_c\left(\frac{2}{2(K_c+6K_b)}-\frac{2K_c+3K_b}{2K_c(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph \\ M_{23} &= K_b\left(\frac{3}{2(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

上記の材端モーメントを用いて、節点 2 のモーメントの釣合が得られていることを確認しよう。また、材端モーメントを用いて、各部材の応力を求め、その応力から曲げモーメント図を図 2 のように描く。さらに、曲げモーメント図を利用して各部材のせん断力を求める。その際、部材①のせん断力と外力との釣合を確認する。

$$\left.\begin{aligned} Q_c &= -\frac{(M_{12}+M_{21})}{h}=\frac{3K_b+(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)h}Ph=\frac{P}{2} \\ Q_b &= -\frac{2M_{23}}{l}=\frac{-3K_b}{(K_c+6K_b)}\cdot\frac{h}{l}P \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

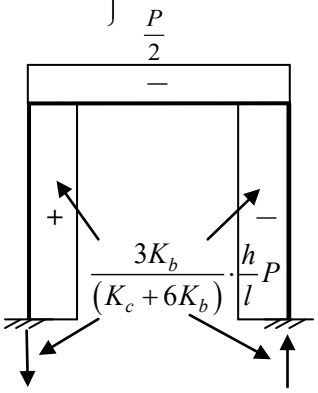


図 4 軸力図

各部材のせん断力から、骨組全体のせん断力図を図 3 に示す。次に、せん断力図を利用し、節点での力の釣合から各部材の軸力を求める。軸力図は図 4 に示される。

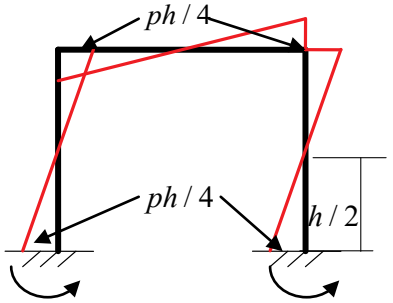


図 5 曲げモーメント図

$(\alpha = K_b / K_c \to \infty)$

曲げモーメント図、せん断力図及び軸力図から支持点の反力を求める。これらの断面力図には反力が示されており、同図より分かるように上下方向の釣合と水平方向の力の釣合が得られている。次に、モーメントの釣合を検討しよう。ここでは、節点 1 におけるモーメントが求められ、釣合が以下のように成立していることが分かる。

$$M_1 = Ph-2\frac{(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph-\frac{3K_b}{(K_c+6K_b)}\cdot\frac{h}{l}Pl\to 0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

最後に、荷重点の水平方向変位を求めてみよう。水平方向変位 δ は、柱の部材角と階高をかけることで以下のように得られる。

$$\delta = R_I h=\frac{2K_c+3K_b}{6K_c(K_c+6K_b)}\cdot Ph^2 \qquad \cdots\cdots(9)$$

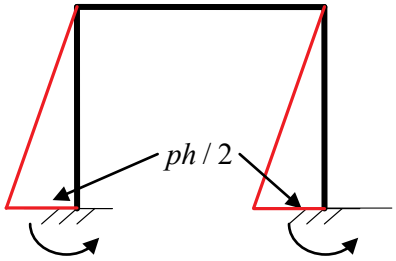


図 6 曲げモーメント図

$(\alpha = K_b / K_c \to 0)$

ここで、$\alpha = K_b / K_c$ とし、梁と柱の曲げ剛性比が極端な場合について考えてみよう。まず、$\alpha = K_b / K_c \to \infty$ の場合、梁の剛性が極端に大きい場合で、柱の両端は固定支持と同じとなり、反曲点は $h/2$ となる。

$$M_{12}=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(1/\alpha+3)}{2(1/\alpha+6)}Ph=\to -\frac{Ph}{4};\quad M_{21}=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-3Ph}{2(1/\alpha+6)}\to -\frac{Ph}{4} \qquad \cdots(10)$$

逆に、$\alpha = K_b / K_c \to 0$ の場合、梁の剛性が極端に小さい場合で、柱の上端はピン支持となる。

$$M_{12}=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(1+3\alpha)}{2(1+6\alpha)}Ph=\to -\frac{Ph}{2};\quad M_{21}=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-3\alpha Ph}{2(1+6\alpha)}\to 0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

基礎８０話 No.2　剛比を用いた両端固定支持門型ラーメンの解析

付 18 話参照
Ex80_1; ex80_2

今回は、変数変換した基本式を用いて、骨組の応力解析を行う。既に、変数変換についてはお話しした。以下にまとめを再度表示する。

R40：たわみ角法の基本式その 2

標準剛度 $K_0 = 2EI_0 / l_0$ を用いて、たわみ角法の基本式を変換する。パラメータ k は剛比という。

パラメータ変換	両端剛接合	一端ピン・他端剛接合
$k = \dfrac{K}{K_0};\quad K = \dfrac{2EI}{l}$	$M_{ij} = k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij}$	$M_{ij} = 0$
$\varphi_i = \theta_i K_0;\quad \psi = -3RK_0$	$M_{ji} = k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji}$	$M_{ji} = k(1.5\varphi_j + 0.5\psi) + C_{ji} + C_{ij}/2$

2) 両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　　ex80_1

新しく誘導したたわみ角法の基本式を用いて、前回お話した両端固定支持の門型ラーメンに、柱頭水平荷重が加わるモデルを応力解析する。図 7(a)には骨組モデルと部材の剛比が示されている。ここでは、標準部材を②部材として、標準剛度 K_0 を次式とする。

$$K_0 = \frac{2EI_b}{l} \qquad \cdots\cdots(12)$$

ここで、I_b, I_c は、各々梁と柱の断面二次モーメントであり、柱の剛比 k_c は 2 とする。すなわち、柱の断面二次モーメントは次式で与えられる。

$$k_c = \frac{2EI_c / h}{K_0} = 2;\quad I_c = 2\frac{h}{l}I_b \qquad \cdots\cdots(13)$$

逆対称条件及び固定支持の境界条件を考慮すると、たわみ角法の基本式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= 2(\varphi_2 + \psi);\quad M_{21} = 2(2\varphi_2 + \psi) \leftarrow \quad \varphi_1 = 0 \\ M_{23} &= 1(3\varphi_2);\quad M_{32} = M_{23} \leftarrow \quad \varphi_2 = \varphi_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(14)$$

節点 2 でのモーメントの釣合と、層モーメントの釣合は

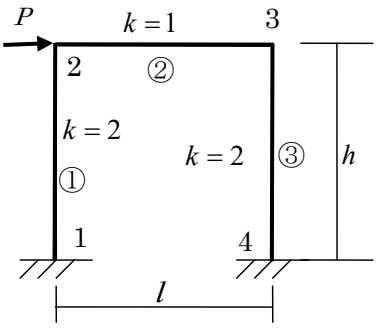
$$\left.\begin{aligned} M_{21} + M_{23} = 0 &\rightarrow \quad 2(2\varphi_2 + \psi) + 3\varphi_2 = 0 \\ (M_{12} + M_{21}) = -Ph/2 &\quad 2(\varphi_2 + \psi) + 2(2\varphi_2 + \psi) = -Ph/2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(15a)$$

として与えられる。上式下を 3 で割り整理すると、骨組全体の釣合式が得られる。

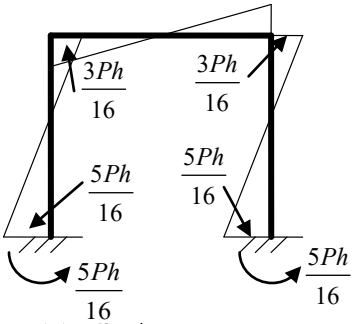
$$\left.\begin{aligned} &7\varphi_2 + 2\psi = 0 \\ &2\varphi_2 + \frac{4}{3}\psi = -\frac{Ph}{6} \end{aligned}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{Ph}{6} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(15b)$$

上の連立方程式を解くと、回転角と部材角は

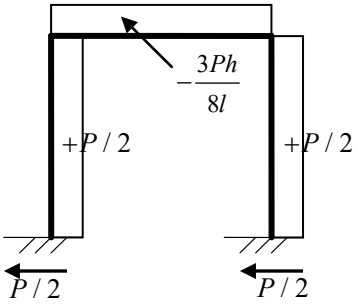
$$\varphi_2 = \frac{Ph}{16};\quad \psi = \frac{-7}{32}Ph \qquad \cdots\cdots(16)$$



(a) 柱頭水平荷重を受ける両端固定支持骨組



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

図 7 柱頭水平荷重の両端固定の骨組

となるが、実際の変位は標準剛度を用いると次式となる。

$$\theta_2=\frac{\varphi_2}{K_0}=\frac{Ph}{16}\cdot\frac{l}{2EI_b}=\frac{Phl}{32EI_b};R=-\frac{\psi}{3K_0}=\frac{7Ph}{3\cdot32}\cdot\frac{l}{2EI_b}=\frac{7Phl}{192EI_b}\quad\cdots(17)$$

次に、部材の材端モーメントは、変位の式(16)を式(14)に代入すると、次式となる。

$$\left.\begin{aligned}&M_{12}=2(\varphi_2+\psi)=2(\frac{1}{16}-\frac{7}{32})Ph=-\frac{5}{16}Ph;\quad M_{21}=2(2\varphi_2+\psi)\\&=2(\frac{2}{16}-\frac{7}{32})Ph=-\frac{3}{16}Ph;\quad M_{23}=3\frac{Ph}{16}=\frac{3}{16}Ph=M_{32}\end{aligned}\right\}\cdots(18)$$

得られた材端モーメントを利用して、曲げモーメント図を図 7(b)のように描く。また、曲げモーメント図より、せん断力図を、続いて軸力図と反力を求める。また、外力と反力の釣合を検証する。これらは読者の演習とする。

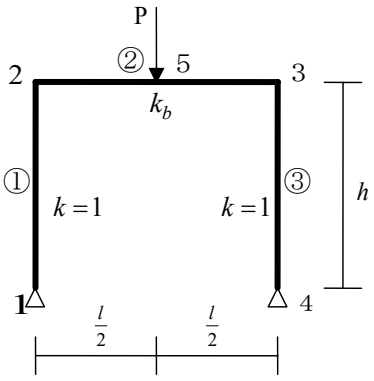


図 8 梁中央集中荷重の両端ピン支持の骨組

3）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央鉛直方向集中荷重　ex80_2

このモデルは対称形状で対称荷重であり、対称応力・対称変形状態となる。部材 2 の部材荷重による基本応力は次式で与えられる。

$$C=\frac{Pl}{8};\quad M_0=\frac{Pl}{4};\quad Q=\frac{P}{2}\quad\cdots\cdots(19)$$

ピン支持境界と対称条件を考慮して、部材の材端モーメントを求める。

$$\left.\begin{aligned}&M_{12}=0;M_{21}=1(1.5\varphi_2)\leftarrow\quad\psi=0\\&M_{23}=k_b(\varphi_2)-C;\quad M_{32}=-M_{23}\leftarrow\quad\varphi_2=-\varphi_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

ここで、固定端モーメントの符号は、中間荷重のある部材の反力で、モーメント方向の正負を決めれば良い。

釣合式は、節点 2 でのモーメントの釣合より、

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow1.5\varphi_2+k_b\varphi_2-C=0\rightarrow(1.5+k_b)\varphi_2=C\quad\cdots\cdots(21)$$

となり、上式を解くと、回転角 φ_2 が得られる。

$$\varphi_2=\frac{C}{(k_b+1.5)}\quad\cdots\cdots(22)$$

得られた回転角 φ_2 を式(20)の基本式に代入すると、次のように材端モーメントが得られる。

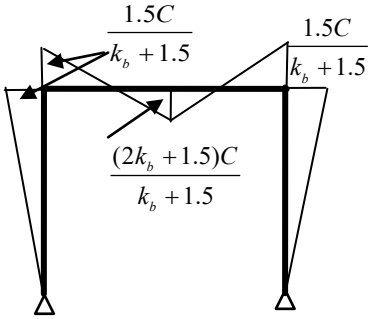
$$M_{21}=1.5\varphi_2=\frac{1.5C}{k_b+1.5};\quad M_{23}=k_b\varphi_2+C=k_b\left(\frac{C}{k_b+1.5}\right)-C=\frac{-1.5C}{k_b+1.5}$$

また、梁中央の曲げモーメントは、次のように求められる。　$\cdots\cdots(23)$

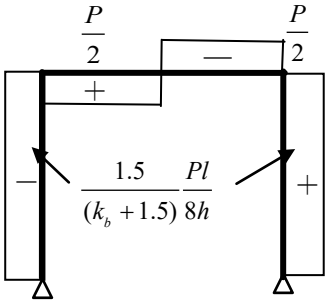
$$M_c=M_0-0.5(M_{32}-M_{23})=2C-\frac{1.5C}{k_b+1.5}=\frac{(2k_b+1.5)C}{k_b+1.5}\quad\cdots\cdots(24)$$

曲げモーメント図、せん断力図、軸力図が図 9 に示される。

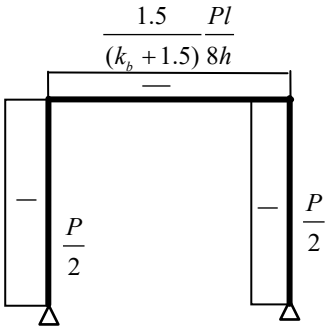
以上の解析手順から、変数変換したたわみ角法は、手計算では圧倒的に便利であることが分かる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 9 梁中央集中荷重の両端ピン支持骨組の断面力図

基礎８１話 No.3　柱に部材荷重が加わる場合の層モーメントの釣合

付 18 話参照
ex81_1

今回は、柱に中間荷重(部材荷重とも言う)が加わる場合で、層せん断力の釣合について学ぶ。ここでは、柱に加わる中間荷重をどのように扱うかが課題となる。梁の部材荷重と同様、まず図 10 のように両端固定とした場合の応力・反力を求める。次に、反力に釣合う節点外力を骨組に加え、たわみ角法を用いて応力解析を行う。後は、解析結果の部材応力に、先に求めておいた両端固定の応力状態を足すことで、実際の応力状態を求める。この手続きを行う際、理解し難いのは次の 2 点である。ひとつ目は、層せん断力に関する釣合式であり、二つ目は、最終的に求める柱のせん断力である。この 2 点についてさらに検討しよう。

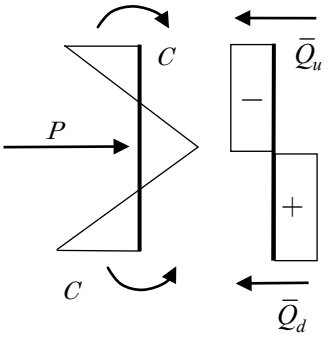


図 10 部材荷重による曲げモーメント､せん断力と反力

最初に、層せん断力と外力との釣合について考える。層せん断力と外力の釣合は、図 11 を参考にすると、柱頭において

$$-\Sigma Q_j - \Sigma \bar{Q}_j + \Sigma P_i = 0 \qquad \cdots\cdots(25)$$

となる。上式の左辺第 1 項は、切断面における全柱のせん断力の和であり、第 2 項は、柱部材荷重による基本応力のせん断力に対応する仮想の力を、切断面にある柱全てについて和を取った値である。第 3 項は切断面より上層の水平荷重の和である。ただし、上層の柱に中間荷重がある場合、それらの総和にこの中間水平荷重を加える。つまり、この切断面より上の水平外力の総和を表す。

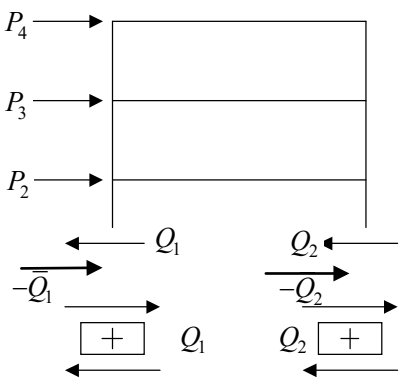


図 11 柱に部材荷重がある場合の層方程式

部材荷重のない場合のたわみ角法の基本式は、

$$\bar{M}_{ij} = k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi); \quad \bar{M}_{ji} = k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) \qquad \cdots\cdots(26)$$

であり、従って、式(25)の第 1 項の柱のせん断力は、

$$Q_j = -(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}) / h \qquad \cdots\cdots(27)$$

である。上式を式(25)に代入すると、層せん断力の釣合式が以下のように与えられる。

$$\Sigma \frac{(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})}{h} = \Sigma \bar{Q}_j - \Sigma P_i \qquad \cdots\cdots(28)$$

また、層モーメントの釣合は、両辺に当該層の高さ h をかけることで次式となる。

$$\Sigma(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}) = \Sigma \bar{Q}_j h - \Sigma P_i h \qquad \cdots\cdots(29)$$

部材の中間に荷重がある場合、両端固定の応力状態と節点荷重による部材の応力状態を重ね合わせることで断面力を求めることができる。ただし、次式で示す材端モーメントの基本式を用いれば、部材端部の応力は自動的に得られる。この場合、部材内部の応力は、基本式から得た応

力状態に単純梁の応力状態を重ねることで求められる。

$$M_{ij}=k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi)-C_{ij};\quad M_{ji}=k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi)+C_{ji} \qquad \cdots\cdots(30)$$

同様に、せん断力は、解析から得られた応力に両端固定として得た基本応力のせん断力を足すことで得られる。

$$Q=Q_j+\bar{Q}_j \qquad \cdots\cdots(31)$$

ここで、Q_j は骨組の解析で得た応力であることから、せん断力は式(26)の $\bar{M}_{ij},\bar{M}_{ji}$ を用いると

$$Q_j=-\frac{\bar{M}_{ji}+\bar{M}_{ij}}{h} \qquad \cdots\cdots(32)$$

として与えられる。また、$\bar{Q}_j$ は両端固定梁のせん断力である。

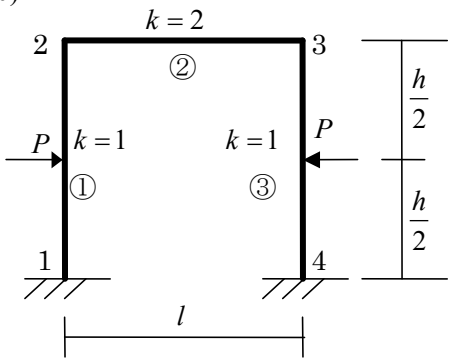


図 12 柱の中間に集中荷重を有する両端固定の骨組

4）両端固定支持門型ラーメン＋逆方向柱部材水平荷重　ex81_1

柱に中間荷重がある構造物の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。ここでは、図 12 に示す骨組の応力解析を行う。この骨組は対称形状で対称荷重が加わっていることから対称応力・対称変形状態となる。

境界条件と対称条件を考慮して、図 13 のように部材①と③に加わる水平荷重に対する基本応力を求める。

$$\left.\begin{array}{l}\text{①部材：}\ {}_1C=\dfrac{Ph}{8}=C;\ {}_1M_0=2C;\bar{Q}_1=\dfrac{P}{2}\\ \text{③部材：}\ {}_3C=-\dfrac{Ph}{8}=-C;\ {}_3M_0=-2C;\bar{Q}_3=-\dfrac{P}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots(33)$$

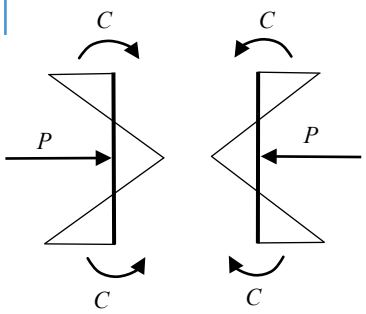


図 13 部材荷重の固定端モーメント

固定境界と対称条件を考慮して、たわみ角法の基本式を示す。

$$\left.\begin{array}{l}M_{12}=\varphi_2-C=-M_{43};\quad M_{21}=2\varphi_2+C=-M_{34}\\ M_{23}=2\varphi_2=-M_{32}\leftarrow\quad \varphi_2=-\varphi_3\end{array}\right\}\cdots\cdots(34)$$

上式から分かるように、未知数は φ_2 ひとつであり、方程式はひとつあれば良い。節点 2 でのモーメントの釣合を考えると、次式が得られる。この釣合式を解くと、回転角 φ_2 が次のように得られる。

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow 2\varphi_2+C+2\varphi_2=0\rightarrow\varphi_2=-C/4 \qquad \cdots(35)$$

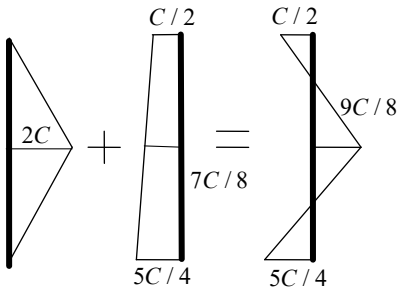


図 14 柱の曲げモーメント 1

求めた回転角 φ_2 を、材端モーメントに代入すると以下となる。

$$M_{12}=-\frac{C}{4}-C=-\frac{5}{4}C;\quad M_{21}=-\frac{C}{2}+C=\frac{C}{2};\quad M_{23}=-\frac{C}{2} \qquad \cdots(36)$$

部材①の中央位置(荷重点)の曲げモーメントは図 14 を参考にすると、

$$M_c=M_0-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{2}+\frac{5}{4}C\right)=2C-\frac{7}{8}C=\frac{9}{8}C \qquad \cdots\cdots(37)$$

となる。実際の柱内部の応力状態は、図 15 のように、両端固定の応力状態に解析結果による応力を重ね合わせた断面力分布となる。

以降は次回お話しする。

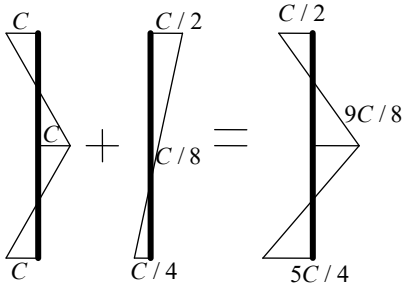


図 15 柱の曲げモーメント 2

基礎８２話 No.4　柱に部材荷重が加わる場合で逆方向水平荷重

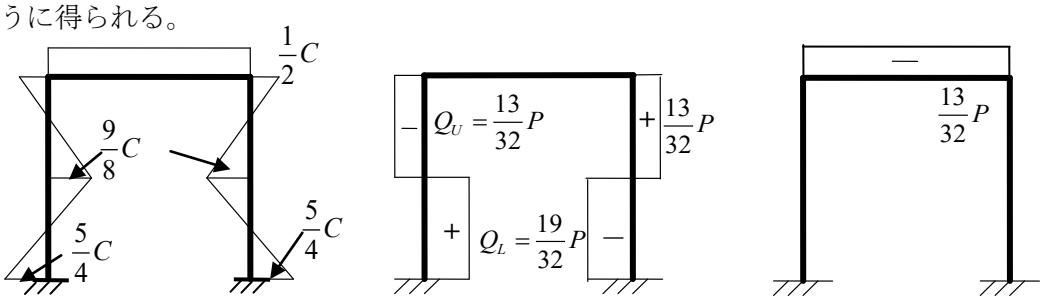
付 18 話参照
ex81_2

前回の続きで、求めた材端モーメントを用いて、骨組の曲げモーメント図を図 16(a)に示す。さらに、今回は門型ラーメンに非対称荷重が加わった場合についても応力解析を行う。

前回の続きで、柱のせん断力は次式より得られる。

$$Q_L=(\frac{9}{8}C+\frac{5}{4}C)/\frac{h}{2}=\frac{19}{8}\cdot\frac{2}{h}\cdot\frac{Ph}{8}=\frac{19}{32}P;\quad Q_U=(\frac{9}{8}C+\frac{C}{2})/\frac{h}{2}=\frac{13}{8}\cdot\frac{2}{h}\cdot\frac{Ph}{8}=\frac{13}{32}P \qquad \cdots\cdots(38)$$

せん断力図を元に、節点での力の釣合を利用すると、軸力図が同図(c)のように得られる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 16 柱の中間に集中荷重を有する両端固定の骨組の断面力図

5）両端固定支持門型ラーメン＋同方向柱部材水平荷重　ex81_2

次に、図 17 に示す骨組の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。このモデルは対称形状で逆対称荷重、従って逆対称応力・変形状態となる。ここでは、逆対称条件を用いて骨組の半分で応力解析を行う。中間荷重のある部材①と③の基本応力を以下に示す。特に部材③の固定端モーメントが前のモデルと逆になっていることに注意されたい。

$$C_1=\frac{Ph}{8}=C;\quad M_0=2C;\quad \bar{Q}_1=\frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(39)$$

固定境界及び逆対称条件を考慮して、部材の基本式を示す。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=\varphi_2+\psi-C;\quad M_{21}=2\varphi_2+\psi+C=M_{34}\\ &M_{23}=6\varphi_2=M_{32}\leftarrow\quad \varphi_2=\varphi_3 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

上記の材端モーメントには、未知変数が φ_2 と ψ の 2 つある。従って、釣合式は 2 つ、節点 2 のモーメントの釣合と、層モーメントの釣合が必要となる。まず、節点 2 のモーメントの釣合を以下に示す。

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\quad 8\varphi_2+\psi+C=0 \qquad \cdots\cdots(41)$$

次に、層モーメントの釣合であるが、まず、柱頭で切断し、その上の

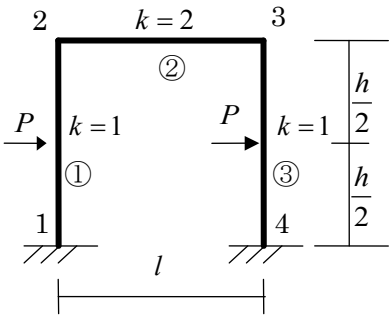
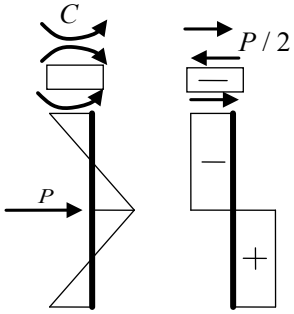


図 17 柱に逆対称集中荷重を受ける両端固定支持の骨組



M 図　　Q 図

図 18 柱の基本応力

外力と切断した柱のせん断力との水平方向の力の釣合を考える。ここでは、上階の水平外力はゼロであり、図 19 のように、柱のせん断力と柱に加わる水平方向集中荷重による外力の釣合となる。

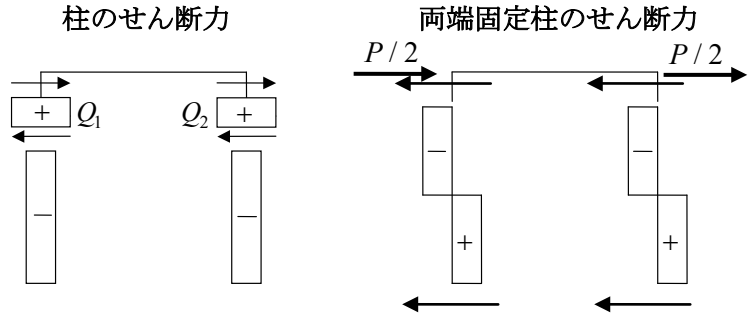


図 19 層せん断力の釣合

つまり、層せん断力の釣合は、図 19 を参考にすると $-(Q_1+\bar{Q}_1)=0$ となり、式(39)と(40)より層モーメントの釣合は次式となる。

$$\frac{M_{12}+M_{21}}{h}+\frac{P}{2}=0\rightarrow M_{12}+M_{21}=-\frac{P}{2}h\rightarrow\quad \varphi_2+\psi+2\varphi_2+\psi=-\frac{Ph}{2}\quad\cdots(42)$$

再度、上式と式(41)を整理すると、次の連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}8\varphi_2+\psi=-C\\ \varphi_2+\dfrac{2}{3}\psi=-\dfrac{Ph}{6}=-\dfrac{4}{3}C\end{array}\right\}\rightarrow\begin{bmatrix}8 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \psi\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}C\\ 4C/3\end{Bmatrix}\quad\cdots(43)$$

上式を解くと、骨組の変位が次のように得られる。

$$\varphi_2=\frac{2}{13}C;\quad \psi=-\frac{29}{13}C\qquad\cdots\cdots(44)$$

得られた回転角 φ_2 と部材角 ψ を式(40)に代入すると、各部材の材端モーメントが以下のように求められる。

$$\left.\begin{array}{l}M_{12}=\dfrac{2}{13}C-\dfrac{29}{13}C-C=-\dfrac{40}{13}C;\quad M_{21}=\dfrac{4}{13}C-\dfrac{29}{13}C+C=-\dfrac{12}{13}C\\ M_{23}=\dfrac{12}{13}C\end{array}\right\}\cdots(45)$$

部材①の中央の曲げモーメントは次のようになり、

$${}_1M_C=M_0-\frac{1}{2}(-\frac{12}{13}C+\frac{40}{13}C)=\frac{12}{13}C\qquad\cdots\cdots(46)$$

また、部材のせん断力は、次式となる。

$${}_cQ_L=(\frac{40}{13}+\frac{12}{13})\frac{2C}{h}=\frac{8}{h}\frac{Ph}{8}=P;\quad {}_cQ_U=0\qquad\cdots\cdots(47)$$

$${}_bQ=(\frac{12}{13}+\frac{12}{13})\frac{C}{l}=\frac{3}{13}\frac{Ph}{l}\qquad\cdots\cdots(48)$$

以上をまとめ、図 21 に曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を示す。読者は、この断面力図より反力を求め、外力と反力の釣合を確認されたい。

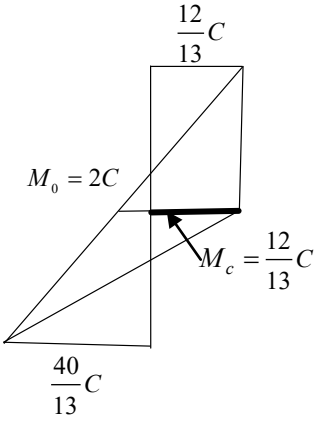
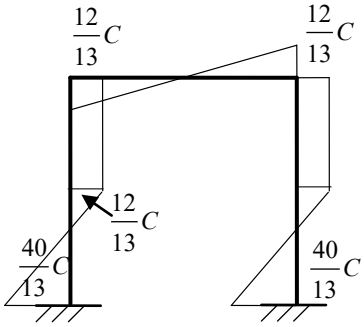
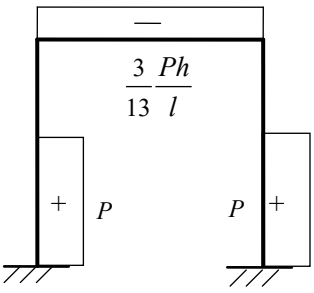


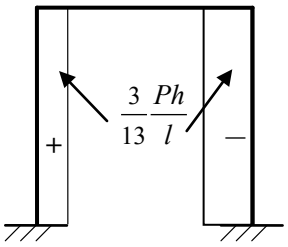
図 20 求めた応力と基本応力を重ね合わせる



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 21 柱に逆対称集中荷重を受ける両端固定支持骨組の断面力図

基礎８３話 No.5　柱に部材荷重が加わる場合で同方向水平荷重

付 18 話参照
ex81_3

今回は、図 22 に示すピン支持型の門型ラーメンに非対称荷重が加わる場合の応力解析である。この門型骨組は対称構造・逆対称荷重であり、従って、変形や曲げモーメント分布は逆対称となる。ここでは、骨組半分を用いて応力解析を行う。

6）両端ピン支持門型ラーメン＋同方向柱部材水平荷重　ex81_3

まず、部材①の基本応力を求める。ここでは、一端ピン支持であることに注意されたい。

$$\left.\begin{aligned} &C_{12}=0;\quad C_{21}=C+0.5C=1.5C;\quad {}_1M_0=2C\leftarrow\quad C=\frac{Ph}{8}\\ &Q_{12}=\frac{P}{2}-\frac{1.5C}{h}=\frac{P}{2}-\frac{1.5}{h}\cdot\frac{Ph}{8}=\frac{5P}{16};\quad Q_{21}=-(\frac{P}{2}+\frac{1.5C}{h})=-\frac{11}{16}P=-\frac{11C}{2h}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(49)$$

一端ピン支持である部材①と逆対称条件を考慮し、各部材に対して、たわみ角法の基本式を適用する。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=(1.5\varphi_2+0.5\psi)+1.5C\\ &M_{23}=2(2\varphi_2+\varphi_3)=6\varphi_2\leftarrow\quad \varphi_2=\varphi_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(50)$$

次に、釣合式を求める。節点 2 でのモーメントの釣合は、

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\quad 7.5\varphi_2+0.5\psi=-1.5C\qquad\cdots\cdots(51)$$

となる。また図 23 に示すように、柱頭での層せん断力の釣合は、

$$-Q_{21}-\bar{Q}_{21}=0\rightarrow\quad\frac{11C}{2h}+\frac{\bar{M}_{21}}{h}=0\qquad\cdots\cdots(52)$$

となり、層モーメントの釣合は、上式の両辺に h を掛け、式(50)を考慮することで、次式となる。

$$\bar{M}_{21}=-\frac{11}{16}Ph\rightarrow\quad 1.5\varphi_2+0.5\psi=-\frac{11}{16}Ph=-\frac{11}{2}C\qquad\cdots(53)$$

上記の $\bar{M}_{21}$ は外力である固定端モーメントを含まない。式(51)と(53)より、2 つの方程式が得られ、整理すると釣合式は

$$\begin{aligned}&15\varphi_2+\psi=-3C\\&3\varphi_2+\psi=-11C\end{aligned}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}15&1\\1&1/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\\psi\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}3C\\11C/3\end{Bmatrix}\qquad\cdots(54)$$

となる。上式を解くと次の解が得られる。

$$\varphi_2=\frac{2}{3}C;\quad\psi=-13C\qquad\cdots\cdots(55)$$

上の解を材端モーメントに代入すると、次式が得られる。

$$M_{21}=\bar{M}_{21}+1.5C=1.5\cdot\frac{2}{3}C-\frac{13}{2}C+1.5C=-4C;\quad M_{23}=6\cdot\frac{2}{3}C=4C\quad\cdots(56)$$

梁中央の曲げモーメントは、材端モーメントの式(50)を用いると、次のように求められる。

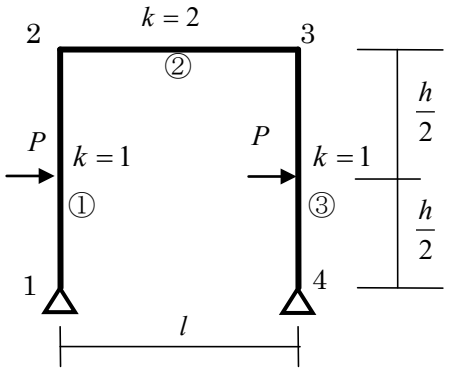


図 22 柱中央に同方向集中荷重を受ける両端ピン支持骨組

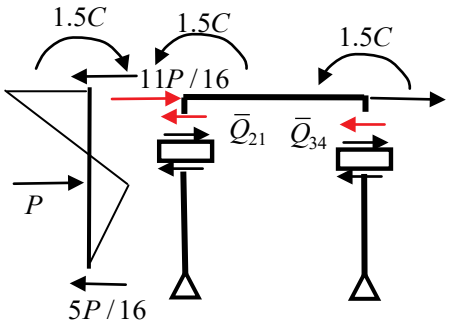


図 23 中間荷重による柱頭水平荷重

$$M_C = M_0 - \frac{1}{2}(M_{21} - M_{12}) = 2C + 0.5 \cdot 4C = 4C \qquad \cdots\cdots(57)$$

ここでは、梁中央の曲げモーメントを基本応力と節点荷重による応力の和から求めてみよう。図 23 を参考にすると、中央の曲げモーメントは、

$$M_C = C + \frac{1}{2}(C - 0.5C) + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} C = \frac{16}{4} C = 4C \qquad \cdots\cdots(58)$$

となる。上式の第 1 項と第 2 項が基本応力の曲げモーメントを表し、第 3 項が節点荷重を解いて得た応力である（式(53)の $\bar{M}_{21}$ を参照）。

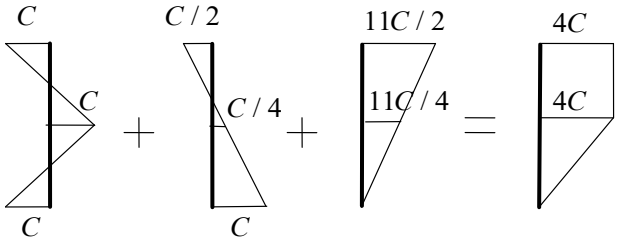
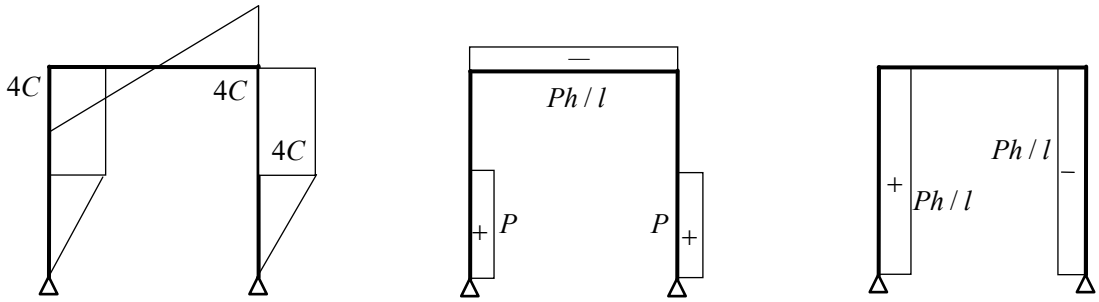


図 24 一端ピン梁の曲げモーメント

柱と梁のせん断力は、曲げモーメントの傾きより次式となる。

$$\left.\begin{aligned} Q_{cL} &= (4C)/(h/2) = 8C/h = P; \quad Q_{cU} = 0 \\ Q_b &= -(4C + 4C)/l = -8C/l = -Ph/l \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(59)$$

以上をまとめると、骨組全体の曲げモーメント図、せん断力図、軸力図が次のように得られる。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**　　**(c) 軸力図**

図 25 柱中央に集中荷重を受ける両端ピン支持の骨組の断面力図

せん断力図と軸力図より反力が求められ、図 26 に示す。同図を利用して、外力と反力の釣合を確認する。上下方向と水平方向の釣合が満たされていることは容易に理解できる。また、節点 1 における外力と反力によるモーメントの釣合は

$$M_1 = P \cdot \frac{h}{2} + P \cdot \frac{h}{2} - \frac{Ph}{l} \cdot l \to 0 \qquad \cdots\cdots(60)$$

となり、釣合が得られていることが分かる。

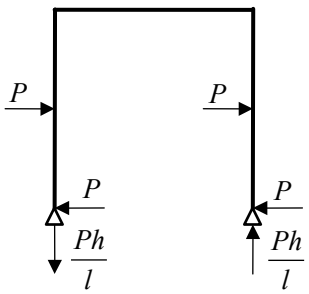


図 26 外力と反力

実はこの構造は、たわみ角法を使用しなくても、力の釣合から断面力分布は求められる。両端ピン支持であるため、4 つの反力があり、3 つの外力と反力の釣合と逆対称条件を使用すれば、反力は決定する。

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0 : 2P - H_1 - H_4 = 0; \quad \sum Y = 0 : V_1 + V_4 = 0 \\ &M_1 = 0 : 2Ph/2 - V_4 l = 0; \quad H_1 = H_4 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(61)$$

上式上左と下右より、$H_1 = H_4 = P$ となり、同式下左より、$V_4 = Ph/l$ となる。また上右より、$V_1 = -V_4 = -Ph/l$ となる。曲げモーメント図は、この反力を用いれば、これまでの知識で容易に求められる。

基礎８４話 No.1　2 層固定支持骨組＋梁等分布荷重

付 19 話参照
ex84_1

今回から、整形の多層骨組の応力解析を行う。ここでは、層せん断力の釣合あるいは層モーメント釣合が層の数だけ必要となる。

1）2 層固定支持骨組＋鉛直方向等分布荷重　ex84_1

まず、2 層の骨組の梁に等分布荷重が加わっている場合について、応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を描く。図 1 に示される 2 層の骨組は、対称構造に対称荷重が加わっていることから、変形・応力は対称となる。固定境界と対称条件を以下に示す。ここで、ψ_{I} と ψ_{II} は第 1 層と 2 層の部材角を表し、各柱はその層の部材角を有する。ただし、対称変形であることから柱の部材角はゼロである。当然、梁にも部材角は生じない。

$$\varphi_1=\varphi_4=0;$$

$$\varphi_2=-\varphi_5;\quad \varphi_3=-\varphi_6;\quad \psi_{\mathrm{I}}=\psi_{\mathrm{II}}=0$$

解析は次の順序で行う。解析順序を良く覚えておこう。

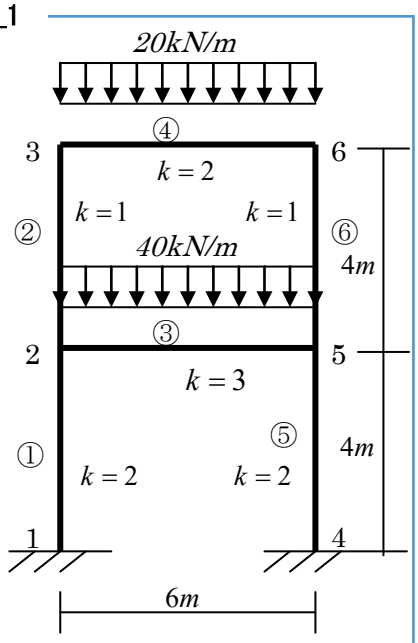


図 1 鉛直等分布荷重を受ける 2 層骨組

Ⅰ：基本応力の計算

③部材

$$C=\frac{p_w l^2}{12}=\frac{40\times 6^2}{12}=120kNm;M_0=\frac{p_w l}{8}=180kNm;Q=\frac{p_w l}{2}=120kN$$

④部材

$$C=\frac{20\times 6^2}{12}=60kNm;M_0=\frac{20\times 6^2}{8}=90kNm;Q=\frac{20\times 6}{2}=60kN$$

Ⅱ：基本式（境界条件と対称条件を考慮：$\varphi_1=\varphi_4=0;\varphi_2=-\varphi_5;\varphi_3=-\varphi_6$）

①部材（柱）　②部材（柱）　③部材（梁）

$M_{12}=2\varphi_2$　$M_{23}=2\varphi_2+\varphi_3$　$M_{25}=3(2\varphi_2+\varphi_5)-120=3\varphi_2-120$

$M_{21}=4\varphi_2$　$M_{32}=2\varphi_3+\varphi_2$　$M_{52}=3(2\varphi_5+\varphi_2)+120=-3\varphi_2+120$

④部材（梁）

$M_{36}=2(2\varphi_3+\varphi_6)-60=2\varphi_3-60$

$M_{63}=2(2\varphi_6+\varphi_3)+60=-2\varphi_3+60$

Ⅲ：釣合式

節点 2 でのモーメントの釣合：

$M_{21}+M_{23}+M_{25}=0\rightarrow$

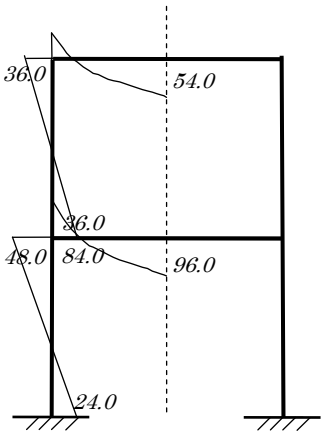
$4\varphi_2+2\varphi_2+\varphi_3+3\varphi_2-120=0\ \rightarrow\ 9\varphi_2+\varphi_3=120$

節点 3 でのモーメントの釣合：

$M_{32}+M_{36}=0\rightarrow$

$2\varphi_3+\varphi_2+2\varphi_3-60=0\ \rightarrow\ \varphi_2+4\varphi_3=60$

釣合式をまとめ、行列表示すると、次の連立方程式が得られる。



(a)曲げモーメント図

Ⅳ：釣合式を解く

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 60 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Ⅴ：得られた解を材端モーメントに代入する

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= 2\varphi_1 = 2\times 12 = 24kNm \\ M_{21} &= 2(2\varphi_2) = 4\times 12 = 48kNm \end{aligned}\right\};\left.\begin{aligned} M_{23} &= 1(2\varphi_2 + \varphi_3) = 24 + 12 = 36kNm \\ M_{32} &= 1(2\varphi_3 + \varphi_2) = 36kNm \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{25} &= 3\varphi_2 - 120 = 3\times 12 - 120 = -84kNm \\ M_{52} &= -3\varphi_2 + 120 = 84kNm \end{aligned}\right\};\left.\begin{aligned} M_{36} &= 2\varphi_3 - 60 = 24 - 60 = 36kNm \\ M_{63} &= -2\varphi_3 + 60 = -36kNm \end{aligned}\right\}$$

Ⅵ：基本応力を考慮して、部材荷重が加わっている梁中央の曲げモーメントを求める

部材 3 と 4 の部材中央の曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M_{3C} = M_0 - \frac{1}{2}(-M_{25} + M_{52}) = 180 - \frac{1}{2}(84 + 84) = 96kNm$$

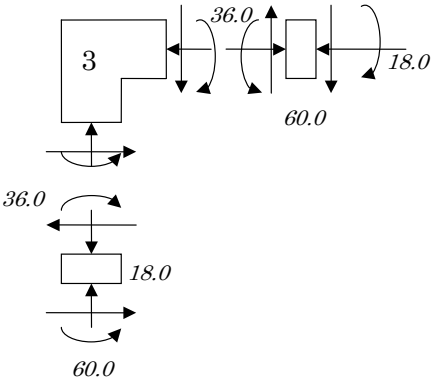
$$M_{4C} = 90 - \frac{1}{2}(36 + 36) = 54kNm$$

Ⅶ：変形や断面力分布が対称であることを考慮し、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を図 2 に示す

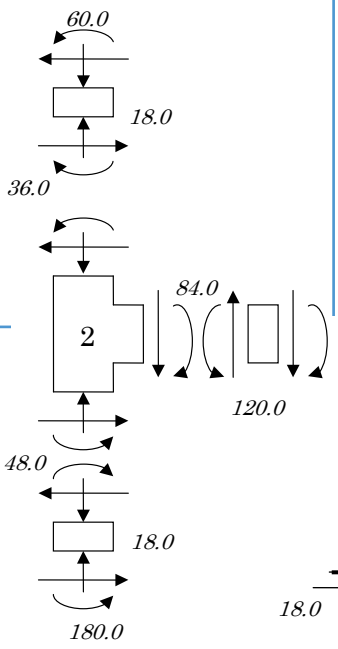
図 2 を利用して反力を求め、外力と反力を図 3 に示す。同図より、上下方向と水平方向の力の釣合がとれていることは容易に理解できる。また、節点 1 での外力と反力とのモーメントは次式で表される。

$$M_1 = 2\times 6\cdot\frac{6}{2} + 4\times 6\cdot\frac{6}{2} - 2.4 + 2.4 - 18\times 6 = 36 + 72 - 108 \rightarrow 0$$

図 4 には、節点における断面力の釣合が表されている。節点 3 では、同図(a)のように梁と柱による曲げモーメントの釣合、また、梁のせん断力と柱の軸力による力の釣合、梁の軸力と柱のせん断力による力の釣合が認められる。同様に、節点 2 においても同図(b)よりモーメントの釣合、x 方向・y 方向の力の釣合が得られていることが分かる。

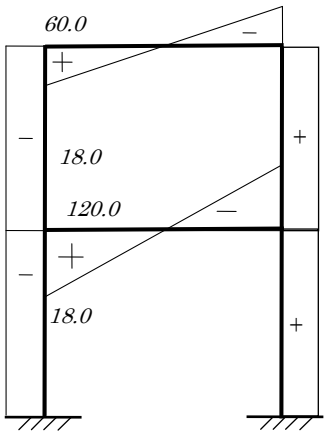


(a) 節点 3 での力の釣合

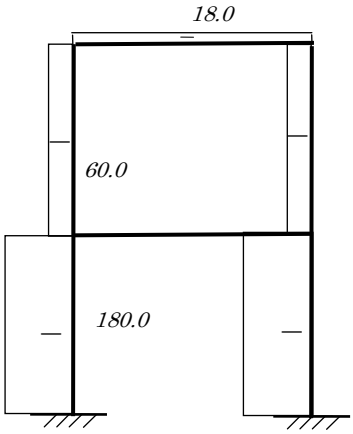


(b) 節点 2 での力の釣合

図 4 節点での力の釣合



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 2　2 層骨組の断面力図

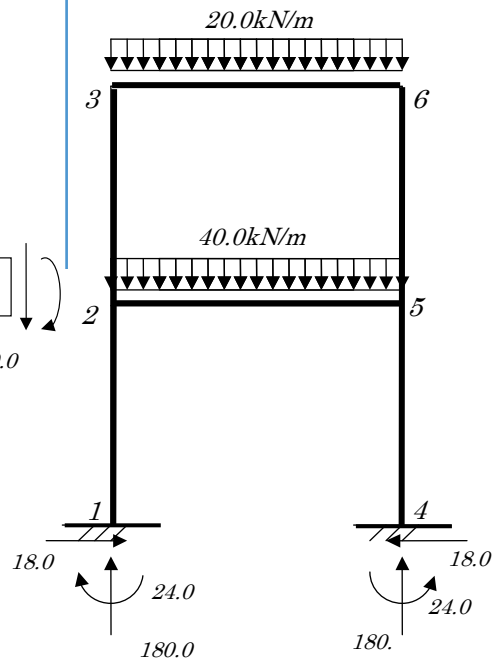


図 3 反力と外力

基礎８５話 No.2　2 層固定支持骨組＋柱頭水平荷重

付 19 話参照
ex84_2

2）2 層固定支持骨組＋柱頭水平荷重　　ex84_2

今回は、2 層骨組に水平外力が加わる場合について、応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。前回で用いた 2 層の対称構造物に水平力が加わった場合の応力解析である。

ここでは、節点移動のある場合で、多層の層モーメントの釣合について学ぶ。なお、このモデルでは変形状態・応力状態共に逆対称となる。

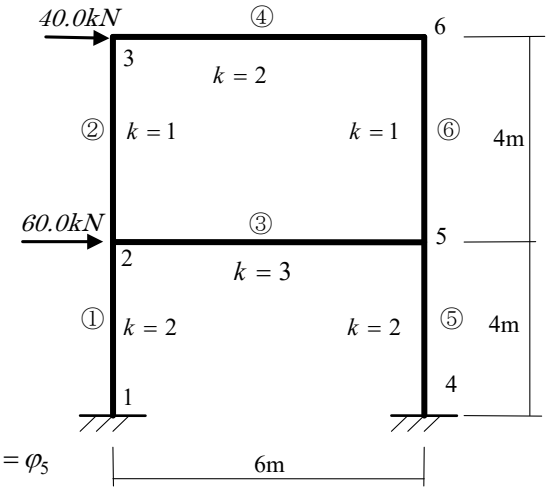


図 5 水平外力を受ける 2 層の骨組

Ⅰ：固定境界と逆対称条件

$$\varphi_1=\varphi_4=0;\quad \varphi_2=\varphi_5;\quad \varphi_3=\varphi_6$$

Ⅱ：基本式

上の境界条件を用いて、各部材の基本式を示す。

$$M_{12}=2(\varphi_2+\psi_{\mathrm{I}});M_{21}=2(2\varphi_2+\psi_{\mathrm{I}})\leftarrow\varphi_1=0$$
$$M_{23}=1(2\varphi_2+\varphi_3+\psi_{\mathrm{II}});M_{32}=1(2\varphi_3+\varphi_2+\psi_{\mathrm{II}})$$
$$M_{25}=3(2\varphi_2+\varphi_5)=9\varphi_2;M_{36}=2(2\varphi_3+\varphi_6)=6\varphi_3\leftarrow\varphi_3=\varphi_6;\varphi_2=\varphi_5$$

Ⅲ：釣合式を求め、行列表示する

1:節点 2 でのモーメントの釣合

$$M_{21}+M_{23}+M_{25}=0\rightarrow 4\varphi_2+2\psi_{\mathrm{I}}+2\varphi_2+\varphi_3+\psi_{\mathrm{II}}+9\varphi_2=0\quad\rightarrow\quad 15\varphi_2+\varphi_3+2\psi_{\mathrm{I}}+\psi_{\mathrm{II}}=0$$

2:節点 3 でのモーメントの釣合

$$M_{32}+M_{36}=0\rightarrow 2\varphi_3+\varphi_2+\psi_{\mathrm{II}}+6\varphi_3=0\rightarrow\quad \varphi_2+8\varphi_3+\psi_{\mathrm{II}}=0$$

3:1 層での層モーメントの釣合

$$M_{12}+M_{21}=-\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 4\rightarrow 6\varphi_2+4\psi_{\mathrm{I}}=-200\rightarrow\quad 2\varphi_2+\frac{4}{3}\psi_{\mathrm{I}}=-\frac{200}{3}$$

4:2 層での層モーメントの釣合

$$M_{23}+M_{32}=-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 4\rightarrow 2\varphi_2+\varphi_3+\psi_{\mathrm{II}}+2\varphi_3+\varphi_2+\psi_{\mathrm{II}}=-80\rightarrow\quad \varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}\psi_{\mathrm{II}}=-\frac{80}{3}$$

以上の釣合式をまとめ、行列形式で表すと以下となる。係数行列である剛性行列は対称であることが分かる。

$$\begin{bmatrix}15 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 8 & 0 & 1\\ 2 & 0 & \frac{4}{3} & 0\\ 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \psi_{\mathrm{I}}\\ \psi_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{200}{3}\\ -\frac{80}{3}\end{Bmatrix}$$

たわみ角法では、釣合式は上のように線形の連立方程式となる。未知数が多くなると、手計算で解を求めるのは難しい。

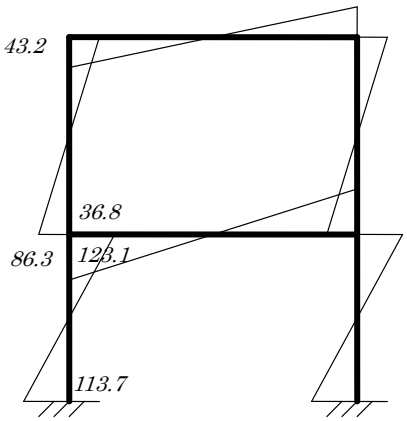
Ⅳ：連立方程式を解く(EXCEL の連立方程式解法ソフトを用いる)

$$\varphi_2 = 13.676; \quad \varphi_3 = 7.206$$
$$\psi_{\mathrm{I}} = -70.515; \quad \psi_{\mathrm{II}} = -71.324$$

Ⅴ：材端モーメントを求め、各断面力図を求める

得られた回転角と部材角を材端モーメントに代入すると

$$M_{12} = 2(13.676 - 70.515) = -113.68$$
$$M_{21} = 2(2\cdot 13.676 - 70.515) = -86.33$$
$$M_{23} = 1(2\cdot 13.676 + 7.206 - 71.324) = -36.77$$
$$M_{32} = 1(2\cdot 7.206 + 13.676 - 71.324) = -43.23$$
$$M_{25} = 9\cdot 13.676 = 123.08; \quad M_{36} = 6\cdot 7.206 = 43.24$$



(a) 曲げモーメント図

となり、計算した材端モーメントから骨組の曲げモーメント図を図 6(a)のように描く。 曲げモーメント図より各部材のせん断力を求める。

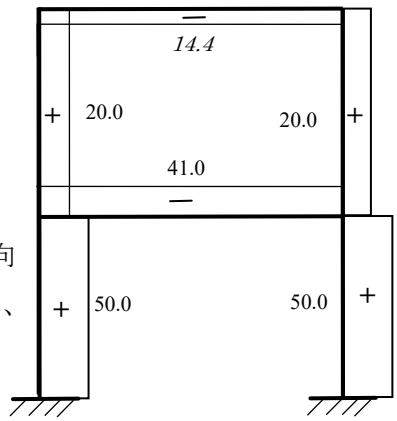
$$Q_1 = -\frac{1}{4}(-113.68 - 86.33) = 50.0; \quad Q_2 = -\frac{1}{4}(-36.77 - 43.23) = 20.0$$
$$Q_3 = \frac{1}{6}(123.08 + 123.08) = 41.03; \quad Q_4 = \frac{1}{6}(43.23 + 43.23) = 14.41$$

各節点での力の釣合より、部材の軸力を求める。

Ⅵ：外力と反力の釣合確認、柱頭の水平変位を求める

各断面力図より、以下のように反力が求められる。右図より、水平方向と鉛直方向の力の釣合が得られていることは容易に理解できる。また、モーメントの釣合は、節点 1 におけるモーメントを計算すると、

$$M_1 = 40\cdot 8 + 60\cdot 4 - 113.68 - 113.68 - 55.44\cdot 6$$
$$= 320.0 + 240.0 - 227.36 - 332.64 \rightarrow 0$$



(b) せん断力図

となり、釣合がとれている。

次に柱頭の水平変位を求めてみよう。まず、各層の水平変位は、標準剛度を $K_0 : kNcm$ とすると、各階の部材角に階高を掛けることで柱頭の水平変位が次のように得られる。

$$\delta_1 = R_{\mathrm{I}} h_1 = -h_1\psi_1 / 3K_0$$
$$= 70.515\cdot 100\cdot 400 / (3K_0) = 940200 / K_0$$
$$\delta_2 = R_{\mathrm{II}} h_2 = -h_2\psi_{\mathrm{II}} / 3K_0$$
$$= 71.324\cdot 100\cdot 400 / (3K_0)$$
$$= 950987 / K_0$$

従って、骨組の最上階の水平変位 δ は以下となる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 1890700 / K_0$$

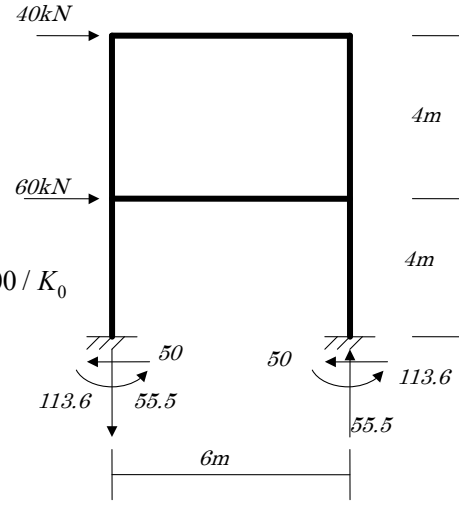
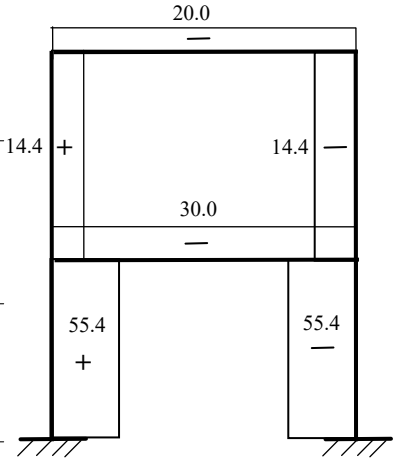


図 7 外力と反力



(c) 軸力図

図 6 水平外力を受ける 2 層骨組の断面力図

基礎８６話 No.1　釣合式の機械的作表法

これまで、節点でのモーメントの釣合、及び各層における層モーメントの釣合より、整形骨組の全体釣合式を求める方法を学んだ。しかしながら、骨組が高層あるいは多スパンになると全体釣合式を作成するまでに、多くの手続きが必要となり、間違いが生じ易くなる。そこで、今回は、効率的に全体釣合式を作成する方法を紹介する。この方法では、整形骨組に対し、表を用いて自動的に釣合式を作成することができる。

たわみ角法では、整形骨組の節点番号を順序良く並べ、全体釣合式を行列表示すると、剛性行列内に部材剛性が規則的に配置される。その規則性を利用して、剛性行列や荷重項に、たわみ角法の係数や荷重を挿入する。全部材に対し同様の方法で全体釣合式を求めることができる。この手法を**機械的作表法**と呼ぶ。たわみ角法の基本式は変数変換後の式を用いる。以下に例を用いて説明しよう。

図 1 に示す整形骨組を考える。節点番号の付け方は、上から付けても、下から付けても良い。ここでは、図のように下から上に、また左より右に順序良く付ける事にする。さらに剛比も図のように、柱には k_{c*} として、梁は k_{b*} として記号化する。この骨組の境界は、節点番号 1, 2, 3 で固定支持である。

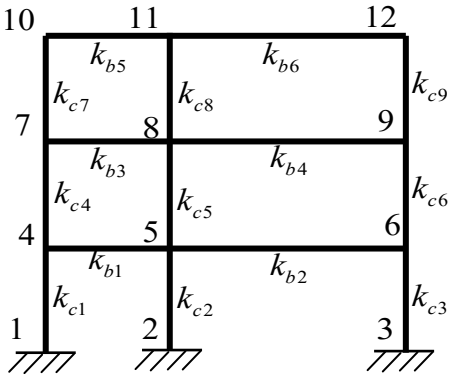


図 1 整形骨組に関する節点番号と剛比の設定法

整形骨組の釣合式は各節点におけるモーメントの釣合と、層モーメントの釣合がある。まず、節点 i におけるモーメントの釣合を一般形式で表す。モーメントの釣合が次式となることを、これまでの例題を振り返ることで理解しよう。

$$J_i\varphi_i + \sum(k_k\varphi_j) + \sum(k_k\psi_k) = \sum C_i + \sum M_i \leftarrow \quad J_i = 2\sum k_k \quad \cdots\cdots(1)$$

上式左辺の第 1 項 J_i は、節点 i に繋がる部材剛比の総和の 2 倍であり、第 2 項は、同部材の剛比と他端節点 j の回転角の積である。また第 3 項は、節点 i に繋がる柱の剛比と部材角の積を表す。右辺項は、節点 i に連結する部材の固定端モーメントの総和と直接節点 i に加わるモーメント荷重の総和を表す。ただし、たわみ角法の基本式から分かるように、固定端モーメントには、正負があることに注意しよう。図 1 の骨組で鉛直方向の部材荷重が梁に加わる場合、例えば、節点 4 及び 5 におけるモーメントの釣合方程式は次のようになる。

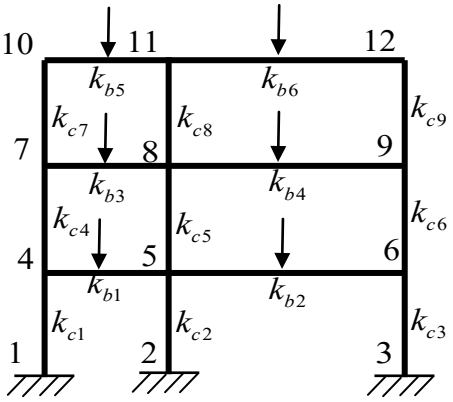


図 2 鉛直集中荷重を受ける骨組

$$\left.\begin{aligned} &2(k_{c1}+k_{c4}+k_{b1})\varphi_4 + k_{b1}\varphi_5 + k_{c4}\varphi_7 + k_{c1}\psi_1 + k_{c4}\psi_2 = C_{45} \\ &k_{b1}\varphi_4 + 2(k_{c2}+k_{c5}+k_{b1}+k_{b2})\varphi_5 + k_{b2}\varphi_6 + k_{c5}\varphi_8 \\ &\quad + k_{c2}\psi_1 + k_{c5}\psi_2 = -C_{54} + C_{56} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

次に、ある層 l の層モーメントの釣合を次式で表す。

$$\Sigma(\bar{M}_{ij}+\bar{M}_{ji})=(\Sigma\bar{Q}_j-\Sigma P_k)h_l \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、$\bar{M}_{ij}$ などは、境界条件を考慮したたわみ角法の基本式で、固定端モーメントを除いた材端モーメントであり、$\sum$ は当該層の柱の材端モーメントについて和をとることを意味する。また、h はその層の階高であり、$\bar{Q}_i$ は柱の基本応力のせん断力である。これらを上式に代入すると、層モーメント釣合式の一般形が得られ、さらに剛性行列を対称とするために、両辺を 3 で割ると次式が得られる。

$$\sum k_k\varphi_i+\sum k_k\varphi_j+N_l\psi_l=\frac{1}{3}(\Sigma\bar{Q}_j-\Sigma P_k)h_l \leftarrow \quad N_l=\sum\frac{2}{3}k_k \qquad \cdots(4)$$

例えば、図 2 の骨組における 1，2 層の層モーメントの釣合は、次式で与えられる。ここでは、水平方向の荷重が無いことから、層モーメントの釣合では、右辺項はゼロとなる。

$$\left.\begin{aligned} &k_{c1}\varphi_4+k_{c2}\varphi_5+k_{c3}\varphi_6+\frac{2}{3}(k_{c1}+k_{c2}+k_{c3})\psi_1=0\\ &k_{c4}\varphi_4+k_{c5}\varphi_5+k_{c6}\varphi_6+k_{c4}\varphi_7+k_{c5}\varphi_8+k_{c6}\varphi_9+\frac{2}{3}(k_{c4}+k_{c5}+k_{c6})\psi_2=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

上で求めた釣合式を参考にして、次の表中に剛比と固定端モーメントを代入し、全体釣合式を作成してみよう。未知数は、節点数+層数であり、ここでは、境界条件によって、$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ が零であることから、未知数は 12 となる。下記の表を良く観察し、その規則性を理解してほしい。

表 1　機械的作表法で作った解析用骨組の釣合式

	節点	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	ψ_1	ψ_2	ψ_3	右辺項
節点方程式	4	J_4	k_{b1}		k_{c4}						k_{c1}	k_{c4}		C_{45}
	5	k_{b1}	J_5	k_{b2}		k_{c5}					k_{c2}	k_{c5}		$-C_{54}+C_{56}$
	6		k_{b2}	J_6			k_{c6}				k_{c3}	k_{c6}		$-C_{65}$
	7	k_{c4}			J_7	k_{b3}		k_{c7}				k_{c4}	k_{c7}	C_{78}
	8		k_{c5}		k_{b3}	J_8	k_{b4}		k_{c8}			k_{c5}	k_{c8}	$-C_{87}+C_{89}$
	9			k_{c6}		k_{b4}	J_9			k_{c9}		k_{c6}	k_{c9}	$-C_{9,8}$
	10				k_{c7}			J_{10}	k_{b5}				k_{c7}	$C_{10,11}$
	11					k_{c8}		k_{b5}	J_{11}	k_{b6}			k_{c8}	$-C_{11,10}+C_{11,12}$
	12						k_{c9}		k_{b6}	J_{12}			k_{c9}	$-C_{12,11}$
層方程式	1 層	k_{c1}	k_{c2}	k_{c3}							N_1			0
	2 層	k_{c4}	k_{c5}	k_{c6}	k_{c4}	k_{c5}	k_{c6}					N_2		0
	3 層				k_{c7}	k_{c8}	k_{c9}	k_{c7}	k_{c8}	k_{c9}			N_3	0

表の説明は次回行うことにする。

基礎８７話 No.2　剛性行列と荷重項の作成

今回は、前回の続きで機械的作表法の説明を行う。表 2 を参考に、その特徴を理解しておこう。前回示した表で、節点方程式に関する剛性行列の対角項は、当該節点に連結する部材剛比の総和の 2 倍であり、これを J_i で表す。また、層方程式では、その層 k にある柱剛比の総和の 2/3 であり、これを N_k で表す。

表 1 を参考にして、たわみ角法による係数行列、つまり全体剛性行列の特徴を説明する。この剛性は対称行列であり、規則的に各部材の剛比が並んでいる。節点方程式の対角項は、当該節点に連結している部材剛比の総和の 2 倍あり、対角項の両隣には、骨組と同じで両隣の梁の剛比が入る。骨組の左右端には梁がないので、係数に飛びが生じるので注意、また上下の柱の剛比は、上階及び下階の未知番号部分に入る。

層方程式の対角項は、その層に存在する柱剛比の総和の 2/3 となる。非対角項では、各柱部材が所属する層で、上下の未知番号(節点番号)の位置に挿入される。この配置も順序良く配置される。また、剛性行列が対称であることから、節点方程式から係数を決めても良い。剛性行列の特徴を再度まとめて、次の表で示す。

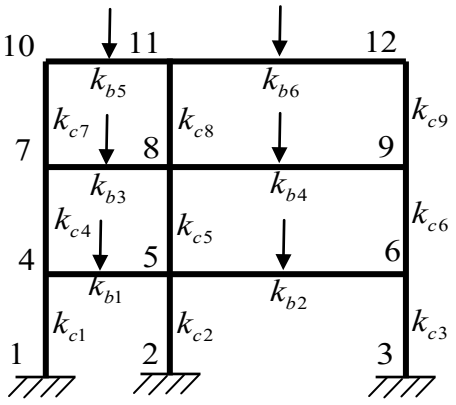


図 2 鉛直集中荷重を受ける骨組

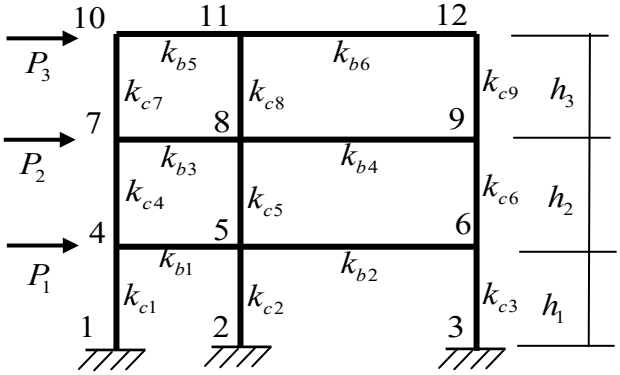


図 3 水平荷重を受ける骨組

表 2 たわみ角法による剛性行列の特徴

	２階節点	３階節点	R階節点	各層
節点方程式	節点に繋がる部材剛比総和の２倍 右梁 左梁 下柱	上柱	第１層柱 第２層柱 第３層柱	
層方程式	第１層柱	第２層柱	第３層柱	当該層柱剛比の総和の 2/3

機械的作表法でも、有効剛比を使用することができる。例えば、支持点がピンの場合、第 1 層の柱の剛比を有効剛比に替え、また対称条件や逆対称条件も同様に有効剛比を使用する。

節点方程式における荷重項は、柱・梁に部材荷重がある場合に生じる。部材の基本応力を計算し、固定端モーメントを連結した節点で和をとることで、荷重項が得られる。その際、部材両端で固定端モーメントの正負が異なるので注意しなければならない。

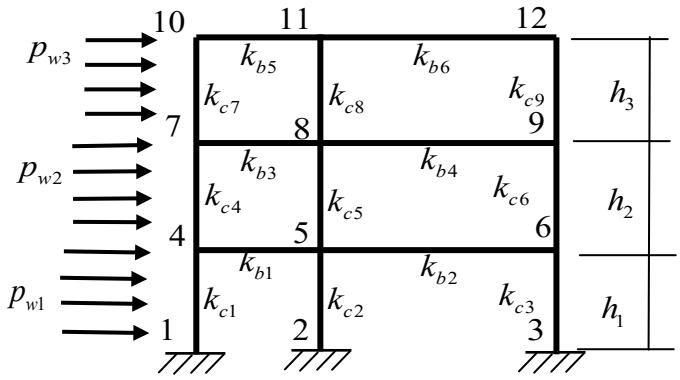


図 4 水平分布荷重を受ける骨組

層方程式における荷重項は、荷重の加わり方で異なる。ここでは、次のように分類して説明する。

1）水平方向荷重が各床の節点に加わる場合
2）柱に部材荷重が加わり、水平荷重となる場合

図 3 のように、水平荷重が各床レベルの節点に加わる場合、比較的容易に層方程式の荷重項を作成することができる。各層方程式の荷重項はその層より上の水平荷重の和をとり、当該層の階高をかける事で得られる。例えば図3の水平荷重を受ける骨組の層方程式の荷重項は表3のように得られる。

表 3 荷重項 1

	層	荷重項
層方程式	1	$-(P_1+P_2+P_3)h_1/3$
	2	$-(P_2+P_3)h_2/3$
	3	$-(P_3)h_3/3$

表 4(a) 荷重項 2

	層	荷重項
層方程式	1	$-(p_{w3}h_3+p_{w2}h_2+p_{w1}h_1/2)h_1/3$
	2	$-(p_{w3}h_3+p_{w2}h_2/2)h_2/3$
	3	$-(p_{w3}h_3/2)h_3/3$

次に、図 4 のように柱に部材荷重が加わる場合について考えよう。ここでは、骨組の左側より、等分布荷重が加わっているものとする。まず、柱の基本応力 C, M_0, Q を計算し、せん断力に釣合う固定端外力を梁の両端の節点に割り振る。図 4 では、等分布荷重であるため、図 5 のように節点水平外力と等価となる。後は、前記の節点荷重と同様に、層方程式の荷重項は、当該層より上の荷重の総和にその層の高さを掛けて求めることになる。図 4 の骨組と荷重では、表 4(a)のような層方程式の荷重項となる。

表 4(b) 節点方程式の荷重項

	節点番号	荷重項
節点方程式	4	$-\frac{p_{w1}h_1}{12}+\frac{p_{w2}h_2}{12}$
	5	0
	6	0
	7	$-\frac{p_{w2}h_2}{12}+\frac{p_{w3}h_3}{12}$
	8	0
	9	0
	10	$-\frac{p_{w3}h_3}{12}$
	11	0
	12	0

上記のように、柱に部材荷重がある場合、節点方程式の荷重項にも柱の固定端モーメントが加わることに注意されたい。例えば、図 4 の例では、表 4(b)の荷重項となる。

次回では、例題を通して、機械的作表法を学ぶことにしよう。

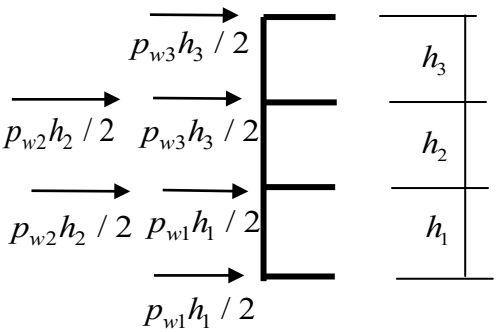


図 5 分布水平荷重を等価な節点荷重に変換

基礎８８話 No.3　２スパン・２層骨組＋梁中央集中荷重と柱頭水平荷重

付 19 話参照
ex88_1

今回は、例題を通して機械的作表法を学ぶことにする。

3）2 層 2 スパン固定支持骨組　　ex88_1

例題の骨組は図 6 に示す 2 層 2 スパンの骨組で、境界条件は固定支持である。節点番号の振り方、及び部材の剛比は図に示されている。荷重や剛比は、現実の骨組とは異なり、計算し易いように設定されている。

最初に、鉛直荷重による基本応力を求める。基本応力は、部材長さが異なる 2 種の梁について、以下のように計算される。

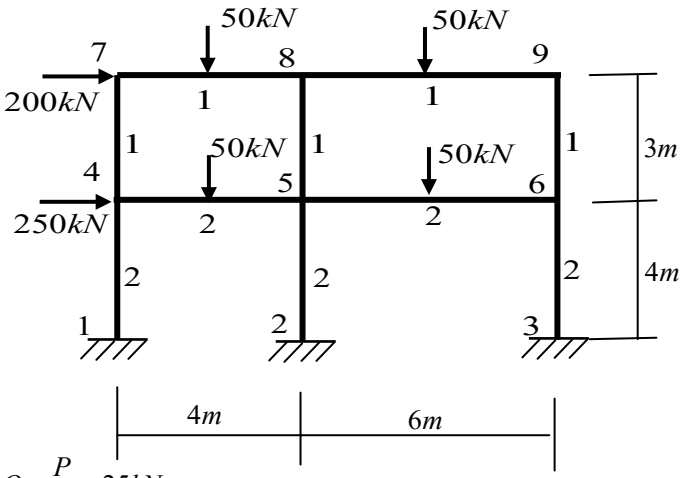


図 6 例題の骨組と荷重

1）部材長さ 4mの梁の基本応力：

$$C_4=\frac{Pl}{8}=\frac{50\cdot 4}{8}=25kNm;\quad M_0=\frac{Pl}{4}=50kNm;\quad Q=\frac{P}{2}=25kN$$

2）部材長さ 6mの梁の基本応力：

$$C_6=\frac{Pl}{8}=\frac{50\cdot 6}{8}=37.5kNm;\quad M_0=\frac{Pl}{4}=75kNm;\quad Q=\frac{P}{2}=25kN$$

単位系が重要、C,M_0,Q が kNm,kN の単位を持つと、解析結果の φ,ψ も同じ単位である kNm を持つ。

骨組の自由度は、節点 1, 2, 3 は固定支持であるため、回転角が 6、また層の部材角が 2 自由度で計 8 自由度である。また、荷重項には鉛直方向の部材荷重と節点水平荷重があり、節点方程式にも層方程式にも値が入ることになる。以下に、表 2 を参照して、全体釣合式を構築する。

表 5 例題の骨組の全体釣合式

		φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	ψ_1	ψ_2	荷重項
節点方程式	4	10	2		1			2	1	25
	5	2	14	2		1		2	1	12.5
	6		2	10			1	2	1	-37.5
	7	1			4	1			1	25
	8		1		1	6	1		1	12.5
	9			1		1	4		1	-37.5
層方程式	1 層	2	2	2				4		-600
	2 層	1	1	1	1	1	1		2	-200

後は、上の 8 元の連立方程式を解いて、骨組節点の回転角と柱の部材角を求める。この変位をたわみ角法の基本式に代入し、部材両端の材端

力を求める。骨組全体の釣合式は、一般には手で解くことは困難であり、ここでは添付ファイルの Excel VBA による連立方程式を解くプログラムを用いる。その結果が右欄外に示される。

$$\begin{Bmatrix}\varphi_4\\ \varphi_5\\ \varphi_6\\ \varphi_7\\ \varphi_8\\ \varphi_9\\ \psi_1\\ \psi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}58.05\\ 30.28\\ 53.24\\ 39.86\\ 21.88\\ 25.44\\ -220.79\\ -214.38\end{Bmatrix}$$

上の変位を各部材のたわみ角法の基本式に代入し、部材の材端モーメントを求める。まず、柱の材端モーメントは、

$$M_{14}=2(\varphi_4+\psi_1)=2(58.05-220.79)=-325.48kNm$$
$$M_{41}=2(2\varphi_4+\psi_1)=2(2\cdot 58.05-220.79)=-209.38kNm$$
$$M_{25}=2(\varphi_5+\psi_1)=2(30.28-220.79)=-381.02kNm$$
$$M_{52}=2(2\varphi_5+\psi_1)=2(2\cdot 30.28-220.79)=-320.46kNm$$
$$M_{36}=2(\varphi_6+\psi_1)=2(53.24-220.79)=-335.10kNm$$
$$M_{63}=2(2\varphi_6+\psi_1)=2(2\cdot 53.24-220.79)=-228.62kNm$$

他の柱の材端モーメント及び梁の材端モーメント、及び部材荷重の加わる材の中央の曲げモーメント、せん断力などは、長くなるので読者の演習とする。部材の軸力であるが、先に述べたように、たわみ角法では軸方向の変位を無視しているため、自動的には決定できない。そこで、各節点で、外力とせん断力及び軸力との力の釣合より求めることになる。ここでは左上の節点より順次計算すれば良い。これも読者の演習とする。

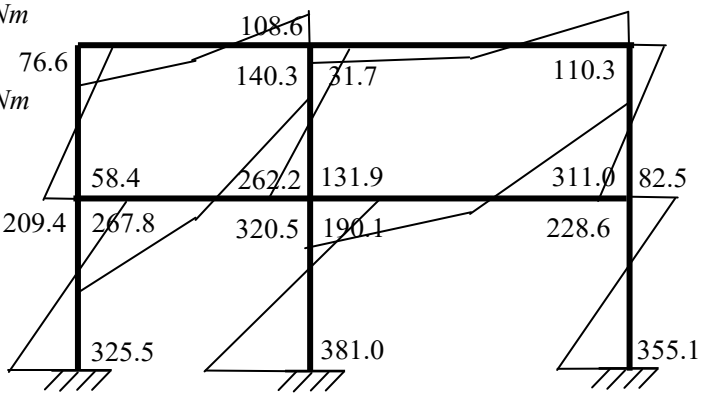


図 7 曲げモーメント図

以上の計算で求めた曲げモーメント、せん断力、軸力より、骨組の曲げモーメント図、及びせん断力図、軸力図を右欄に示す。

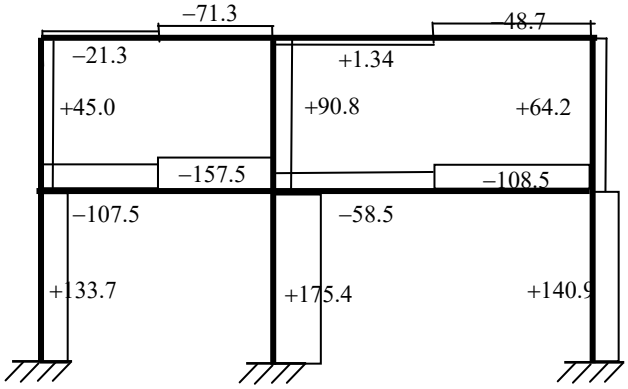


図 8 せん断力図

各層の床位置における水平変位は、部材角を用いて次のように求められる。ここでは、標準剛度とする部材の断面二次モーメントは12800 cm^4、ヤング係数は 20500kN/cm^2 とする。まず、断面二次モーメントとヤング係数を用いて、標準剛度の値を求める。

$$K_0=\frac{2EI}{h_2}=\frac{2\cdot 20500\cdot 12800}{300}=1.7493\cdot 10^6$$

次に、以下に各階の水平変位を求める。ここでは、ψ の単位が $kNcm$ に変換されていることに注意されたい。

$$\delta_1=R_1h_1=\frac{-\psi_1h_1}{-3K_0}=\frac{220.79\cdot 100\cdot 400}{3\cdot 1.7493\cdot 10^6}=\frac{8.832\cdot 10^6}{5.2479\cdot 10^6}=1.683cm$$

$$\delta_2=\delta_1+R_2h_2=1.683+\frac{-\psi_2h_2}{-3K_0}$$

$$=1.683+\frac{214.38\cdot 100\cdot 300}{3\cdot 1.7493\cdot 10^6}=1.683+\frac{6.431\cdot 10^6}{5.2479\cdot 10^6}=2.908cm$$

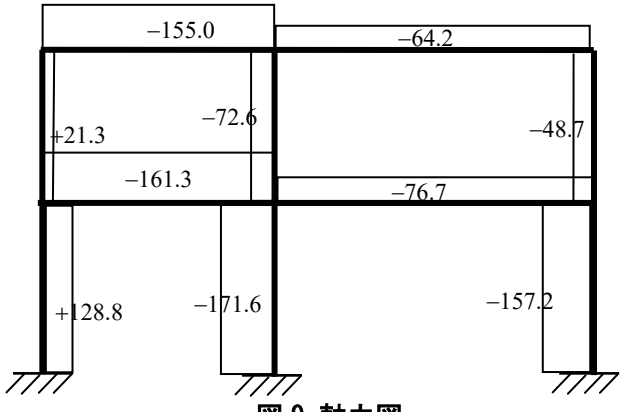


図 9 軸力図

基礎８９話 No.1　部材角の独立部材と従属部材

これまで、たわみ角法を用いて平面骨組の応力解析を行ってきたが、全て整形ラーメンについてである。たわみ角法では、部材の伸縮を無視し、節点の移動を部材角で表す。そこには利点と欠点がある。利点としては、未知数が少なく、手計算では圧倒的に有利である。また、節点における力の釣合や変位の適合では、座標変換を行う必要もない。座標変換は多くの計算を必要とし、手計算では間違う要因となる。

一方、欠点は、部材の伸縮が無視されるため、解析結果から軸力分布が決定できず、各節点においてせん断力との力の釣合から求め直す必要が生じる。さらに大きな短所として、部材の伸縮を考慮しないため、全部材の部材角は独立に回転することができず、節点が移動するためには部材角間に依存関係が生じる。整形ラーメンでは、この依存関係を表す独立部材角と従属部材角との関係は明解で、解析は容易であった。独立部材角は各層の層間変形角で表され、しかも、梁には部材角が生じない。この特徴を有しない骨組は、異形ラーメンとして分類され、これまで学んだ方法以外の手法を用いなければならない。そこで、今回から、異形ラーメンの解析方法を学ぶ。

最初に、部材角間の依存関係を求める。次に、これまでの層せん断力あるいは層モーメントの釣合に替えて、仮想仕事の原理により独立部材角に関するモーメントの釣合式を誘導する。さらに、例題を通して、独立部材角の数に対応する釣合式の構築手法を学ぶ。

図 1 の骨組では、部材数が 4 であり、各々部材角は R_1, R_2, R_3, R_4 となる。この骨組では、全ての部材が自由に剛体回転できるわけではない。ここには 2 つの制限があり、そのため独立部材角は 2 つとなり、従属部材角は残りの 2 つとなる。このような骨組では、各部材の依存関係は簡単に決められず、一般的には**直角変位図**を利用して求める。ただし、ここでは以下のように異なった手法を用いる。

任意に部材を回転させるとき、図 1 のループ(閉曲線)上を時計回りに、各部材の部材角によって生じる節点変位を x 方向と y 方向に分けて順次和をとると、最後にはゼロとなる。つまり、2 つの制約条件が生じる。

部材角は微小変形で、部材先端の変位は、図 2 に示す微小な正方向(時計回り)の回転角 R によって、変位 du, dv が各々次のように得られる。

$$du = -Rl_y; \quad dv = Rl_x \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、変位 du, dv はベクトルであり、方向を持つ。また、部材角も時

たわみ角法による異形ラーメンの解析は、構造力学初心者にとって少し難しいかもしれない。この部分は飛ばしてもかまわないが、可能ならば学習して欲しい。既に、多くのことを学んできたので、時間をかけてゆっくりと読めば、理解できると思う。今後、基礎から少し難しい領域に足を踏み入れるためにも、頑張ってみよう。

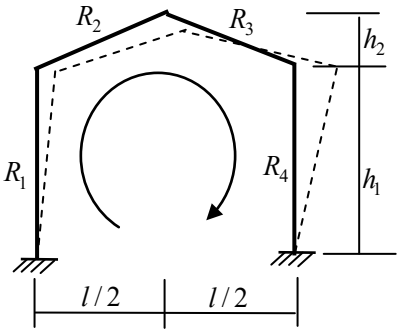


図 1 異形ラーメンの部材角間の依存関係

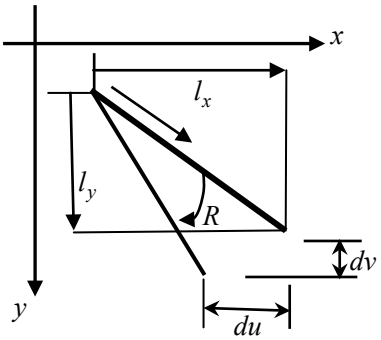


図 2 部材角による x と y 方向の微小変位

計回りが正方向であり、部材の方向成分 l_x, l_y も始点から終点に向かうベクトルとする。

例として、先の 2 つの制約条件を求めてみよう。図 1 に示す骨組を用いて、部材回転角による x, y 方向の変位の条件は、

1） x 方向の変位:　$h_1R_1 + h_2R_2 - h_2R_3 - h_1R_4 = 0$

2） y 方向の変位:　$R_2 l/2 + R_3 l/2 = 0$

$\Big\}\cdots\cdots(2)$

上式から分かるように、部材の始点から終点に向かって、部材の y 方向成分が正の場合、 x 方向変位 du は負となり、成分が負の場合、変位は正となる。同じく部材の x 方向成分が正の場合、y 方向変位 dv は正となり、成分が負の場合、変位は負となる。式(2)を行列を用いて表現すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & -h_2 & -h_1 \\ 0 & l/2 & l/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式の制限条件式で、独立部材角として両柱のそれを選択する。両柱の部材角を右辺項に移項し、整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4)$$

次に、独立部材角を各々 1 とした際の従属部材角の値を求める。例えば、R_1, R_4 を $1,0$ とした場合、従属部材角は以下のようになる(図 3(a))。

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5)$$

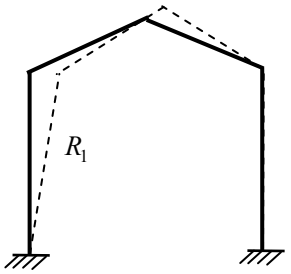
また、 R_1, R_4 を $0,1$ とした場合は、同様の計算で、図 3(b)のように

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{h_1}{2h_2} \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(6)$$

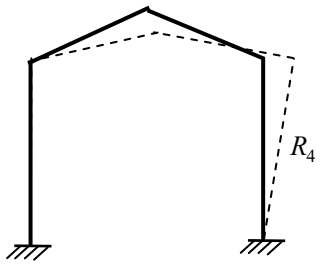
となる。式(5)と(6)をまとめると、部材角間の依存関係が確立する。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_4' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで、 R_1', R_2' は独立部材角を意味する。以降は、次回お話しする。



(a) 独立部材角 $R_1 = 1$ の場合



(b) 独立部材角 $R_4 = 1$ の場合

図 3 独立部材角と従属部材角の関係

基礎９０話 No.2　従属関係を表す依存関係式

今回は、前回の続きで、部材角間の関係についてお話しする。先に、独立部材角として 2 つの柱を選択したが、他の部材を指定することもできる。式(3)で独立部材角を R_1, R_2 とし、他の部材との依存関係を調べてみよう。式(4)と同様に独立部材角を右辺に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -h_2 & -h_1 \\ l/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(8)$$

同様の操作を行い、独立部材角に対する部材角の関係を求めると、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \dfrac{2h_2}{h_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(9)$$

以上のように、独立部材角の選択を変えても、式(7)のように部材角間の依存関係が求められることになる。

一方、独立部材角として、2 つの梁を選択する場合について考えてみよう。独立部材角を右辺項に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(10)$$

上式で、左辺の係数行列における行列式の値はゼロとなり、従属部材に関する部材角の値が求められない。このように独立部材角の選択は、従属部材による係数行列が特異行列にならず、逆行列が得られるようにしなければならない。

独立部材角と部材角の関係は、行列を用いて表すと次式となる。ここで、H_{ij} は依存関係を表す係数行列であり、all は全部材数を表す。

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} R_j' \qquad (i = 1 \sim all) \qquad \cdots\cdots(11)$$

ここで、R_j' は独立部材角であり、n はその数である。さらに上式をこの独立部材角で微分すると下式が得られ、後で使用することになる。

$$\frac{\partial R_i}{\partial R_j'} = H_{ij} \qquad \cdots\cdots(12)$$

他の例題を用いて、依存関係に関する知識を深めることにしよう。図 4 の異形ラーメンを用いて部材角依存関係を求める。図中には 2 つのループが見られ、従って、4 つの制限条件があることを示す。部材数は計

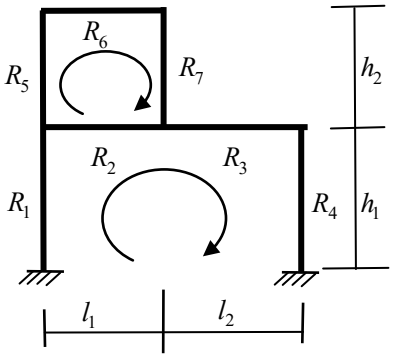


図 4 2 層の異形ラーメン

7 であり、制限条件が 4 であることから、独立部材角は 3 となる。

第 1 層の制限条件を以下に示す。

1）x 方向の変位　　y 方向の変位

$$h_1R_1 - h_1R_4 = 0 \qquad l_1R_2 + l_2R_3 = 0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

次に、第 2 層では、

2）x 方向の変位　　y 方向の変位

$$h_2R_5 - h_2R_7 = 0 \qquad l_1R_6 - l_1R_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(14)$$

式(13)と(14)を行列を用いて表し、独立部材角として R_1, R_2, R_5 を選択する。さらに独立部材角の項を右辺に移項し、整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & -h_2 \\ 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \qquad \cdots(15)$$

独立部材角を各々1 として、従属部材角の値を求める。4 元の連立方程式で一見難しそうであるが、行を入れ替えると次のように係数行列は対角行列となっており、解は容易に求められる。

$$\begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(16)$$

各独立部材角に対し、1) $R_1 = 1$ の場合；2) $R_2 = 1$ の場合；3) $R_5 = 1$ の場合

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} R_1' \ ; \ \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1 / l_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} R_2' \ ; \ \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} R_5' \qquad \cdots\cdots(17)$$

上の結果をまとめると、依存関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1 / l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ R_5' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(18)$$

以上で、各部材の依存関係が得られた。この関係を用いて、層方程式に替わる釣合式を求める。以降は、次回お話しする。

基礎９１話 No.3　仮想仕事の原理による釣合式

今回は、たわみ角法により骨組全体の釣合式を誘導する。釣合式の数は境界節点を除いた節点数と独立部材角の数の和に等しい。整形骨組では、各層で独立部材角(層間変形角)がひとつあり、そのため、各層で層せん断力の釣合、あるいは層モーメントの釣合より、独立部材角と同じ数の釣合式が得られた。しかしながら、異形ラーメンでは、梁にも部材角が生じ、層数より多くの独立部材角が存在する。そこで、層モーメントの釣合式に替えて、独立部材角の数だけ釣合式を求める必要がある。ここでは、**仮想仕事の原理**を用いて釣合式を求める。仮想仕事の原理とは、「釣合状態の骨組に、境界条件を満たす仮想の変位を与えたとき、その仮想の変位による内力仕事と外力仕事は等しい」である。次に、この仮想仕事の原理を用いて異形ラーメンの釣合式を求めてみよう。

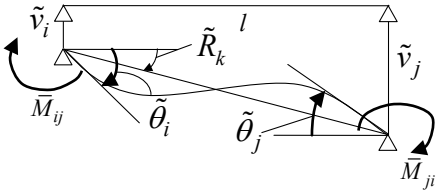


図 5 材端モーメントが加わっている両端ピン部材に仮想の回転角 $\tilde{\theta}_i$ と部材角 $\tilde{R}_k$ を与える

材端力と外力が加わっている部材に仮想の回転角 $\tilde{\theta}_i - \tilde{R}_k$ を与えたとき、内力仕事 U は材端モーメントを用いると次式で与えられる。ここでは、部材は剛体変位を生じており、内部応力は仕事をしないとしている。

$$U = \sum_{k=1}^{all} \{\bar{M}_{ij}(\tilde{\theta}_i - \tilde{R}_k) + \bar{M}_{ji}(\tilde{\theta}_j - \tilde{R}_k)\} = \sum_{k=1}^{all} \{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\tilde{R}_k\} \quad \cdots\cdots(19)$$

上式の *all* は全部材数を意味し、$\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{ji}$ は部材荷重による固定端モーメントを除いた材端モーメントである。また、$\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j$ は仮想の部材両端の微小回転角であり、$\tilde{R}_k$ は同じく仮想微小部材角を意味する。次に、外力仕事 V は節点荷重 P_k と節点変位 $\tilde{u}_k$、及び節点モーメント荷重 m_k と部材荷重による固定端モーメント C_{kj} を考慮すると、次式となる。

$$V = \sum_{k=1}^{b} P_k \tilde{u}_k + \sum_{k=1}^{c} (m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k \quad \cdots\cdots(20)$$

ここで、節点変位 $\tilde{u}_k$ は仮想微小部材角の関数であり、また b は節点に集中荷重が加わっている全節点数を、c は節点にモーメント荷重 m_k と部材荷重による固定端モーメント C_{ij} が加わっている全節点数を表す。

仮想仕事の原理より、仮想変位による内力仕事と外力仕事は等しくなり、次式を得る。

$$U = V \rightarrow \quad W = U - V = 0 \quad \cdots\cdots(21)$$

式(19)と(20)で求めた内力仕事と外力仕事及び式(11)を上式に代入すると次式を得る。

$$W = \sum_{k=1}^{all} \{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\tilde{R}_k\} - \sum_{k=1}^{b} P_k\tilde{u}_k - \sum_{k=1}^{c} (m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k \rightarrow$$

$$= \sum_{k=1}^{all} \{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\sum_{l=1}^{n} H_{kl}\tilde{R}_l'\} - \sum_{k=1}^{b} P_k\tilde{u}_k - \sum_{k=1}^{c} (m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k = 0 \quad \cdots\cdots(22)$$

任意の仮想変位を与えても、上式が常に成立するためには、各仮想変位の係数はゼロでなくてはならない。そのため、式(12)を考慮すると、次式が成立する。ここで、n' は自由節点数、n は独立部材角数を表す。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{\theta}_i}=0 \quad (i=1\sim n');\quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{R}'_l}=-\sum_{k=1}^{all}(\bar{M}_{ij}+\bar{M}_{ji})H_{kl}-\sum_{k=1}^{b}P_k\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}'_l}=0 \quad (l=1\sim n) \quad \cdots\cdots\cdots(23)$$

まず、式(22)及びたわみ角の基本式を用いると、上式左は次式となる。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{\theta}_i}=\sum_{k=1}^{m}\bar{M}_{ij}-m_i-\sum_{k=1}^{m}C_{ij}=0\rightarrow\sum_{k=1}^{m}\frac{EI_k}{l_k}(2\theta_i+\theta_j-3R_k)-C_{ij}-m_i=0 \quad \cdots\cdots\cdots(24)$$

さらに、部材角 R_k は式(11)の独立部材角で表されることから、

$$\sum_{k=1}^{m}\{\frac{EI_k}{l_k}(2\theta_i+\theta_j-3\sum_{l}^{n}H_{kl}R'_l)-C_{ij}\}-m_i=0 \quad (i=1\sim n') \quad \cdots\cdots\cdots(25)$$

として、各節点におけるモーメントの釣合式が得られる。ここで m は当該節点に結合する部材数である。

次に、式(23)右にたわみ角の基本式を用い、さらに-3 で割ると、独立部材角に関するモーメントの釣合式が得られる。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{R}'_l}=-\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k}{l_k}(3\theta_i+3\theta_j-6R_k)H_{kl}-\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}\frac{d\tilde{R}_j}{d\tilde{R}'_l}=0\rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k}{l_k}(\theta_i+\theta_j-2R_k)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \quad (l=1\sim n) \quad \cdots\cdots(26)$$

上記の方程式は、整形ラーメンのたわみ角法では層モーメントの釣合に対応する。ここで、両辺を-3 で割る理由は全体釣合式の剛性行列を対称にするためである。

上式の左辺に標準剛度 K_0 を分母・分子に掛けると次式となり、釣合式が変数変換されることになる。

$$\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k/l_k}{K_0}(\theta_iK_0+\theta_jK_0-2R_kK_0)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl}\rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{all}k_k(\varphi_i+\varphi_j+\frac{2}{3}\sum_{o=1}^{n}H_{ko}\psi'_o)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \quad (l=1\sim n)} \quad \cdots(27)$$

ここで、変数変換に使用した変換式は次式である。

$$k=\frac{K}{K_0};\quad K=\frac{2EI}{l};\quad K_0=\frac{2EI_0}{l_0};\quad \varphi_i=\theta_iK_0;\quad \psi=-3RK_0 \quad \cdots\cdots\cdots(28)$$

同様に、釣合式(25)を変数変換すると次式を得る。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}\{k_k(2\varphi_i+\varphi_j+\sum_{l=1}^{n}H_{kl}\psi'_l)-C_{ij}\}-m_i=0 \quad (i=1\sim n')} \quad \cdots\cdots\cdots(29)$$

得られた式(27)と(29)の釣合式が異形ラーメンの基本釣合式となる。特に式(27)が整形ラーメンにおける層モーメントの釣合に対応する。次回から演習を行うことで理解を深めよう。

基礎９２話 No.4　山形ラーメンの節点モーメントの釣合式

これまで、たわみ角法によって異形ラーメンの釣合式全体を誘導した。今回から、演習を通して異形ラーメンの応力解析法を学ぶことにする。

まず、図 6 に示す切妻屋根を有する骨組を用いて、骨組全体の釣合式を求めてみよう。まず、独立部材角を R_1, R_4 とすると、部材角の関係は、式(7)に見られるように次式で与えられる。

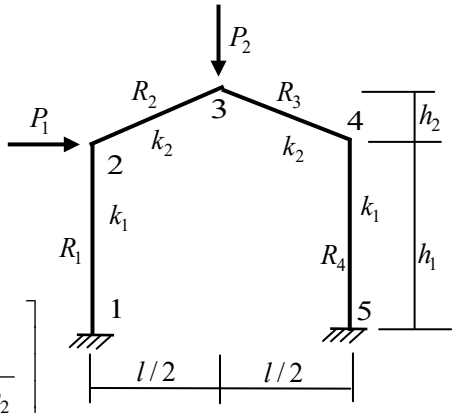


図 6 異形ラーメンの解析モデル

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} H_{ij} R'_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_4 \end{Bmatrix} \rightarrow [H] = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \\ H_{3,1} & H_{3,2} \\ H_{4,1} & H_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(30)$$

ここでは、独立部材角として両柱の部材角を選択している。

次に、仮想仕事の原理を用いたモーメントの釣合を求める。釣合式は、式(29)より求められ、具体的に境界条件を考慮して節点でのモーメントの釣合を求めてみよう。各節点でのモーメントの釣合を以下に再記する。

$$\sum_{k=1}^{m} \{k_k (2\varphi_i + \varphi_j + \sum_{l}^{n} H_{kl} \psi'_l) - C_{ij}\} - m_i = 0 \quad (i = 1 \sim n') \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

以下に各節点で、モーメントの釣合を具体的に求める。

第 2 節点：$M_{21} + M_{23} = 0 \rightarrow$

$$k_1(2\varphi_2 + \psi_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \psi_2) = 0 \rightarrow$$

$$k_1(2\varphi_2 + \sum_{l=1}^{2} H_{1l}\psi'_l) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \sum_{l=1}^{2} H_{2l}\psi'_l) = 0 \rightarrow$$

$$k_1(2\varphi_2 + \psi'_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

第 3 節点：$M_{32} + M_{34} = 0 \rightarrow$

$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \psi_2) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi_3) = 0 \rightarrow$$

$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \sum_{l=1}^{2} H_{2l}\psi'_l) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \sum_{l=1}^{2} H_{3l}\psi'_l) = 0 \rightarrow$$

$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) = 0 \rightarrow$$

$$k_2(\varphi_2 + 4\varphi_3 + \varphi_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(32)$$

第 4 節点：$M_{43} + M_{45} = 0 \rightarrow$

$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \psi_3) + k_1(2\varphi_4 + \psi_4) = 0 \rightarrow$$

$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \sum_{l=1}^{2} H_{3l}\psi'_l) + k_1(2\varphi_4 + \sum_{l=1}^{2} H_{4l}\psi'_l) = 0 \rightarrow$$

$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) + k_1(2\varphi_4 + \psi'_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(33)$$

このモデルでは、自由節点 n' は、支持点 1,5 を除いた 2,3,4 の 3 節点である。また、独立部材角数 n は、R_1, R_4 の 2 つである。

このモデルでは、部材荷重並びに節点モーメント荷重がないため、C_{ij}, m_i はゼロとなり、従って、モーメント釣合式には定数項である右辺ベクトルはゼロとなる。

以上をまとめ、行列表示すると、次の節点方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1-\frac{h_1}{2h_2}k_2 & \frac{h_1}{2h_2}k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & \frac{h_1}{2h_2}k_2 & k_1-\frac{h_1}{2h_2}k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1' \\ \psi_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdots(34)$$

次に、式(27)を用いて層モーメントの釣合に対応する釣合式を求める。

$$\sum_{k=1}^{all} k_k(\varphi_i+\varphi_j+\frac{2}{3}\sum_{o=1}^{n} H_{ko}\psi_o')H_{kl} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b} P_k \sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \quad (l=1\sim n) \cdots(27)$$

このモデルでは、上式の独立部材角は両柱の部材角 R_1, R_4 であり、独立部材角と従属部材角の関係 H_{ij} は式(30)で与えられている。

以下に、式(27)の各部材の左辺項を求める。

1）第 1 部材：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial R_1'} &= k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{1j}\psi_j')H_{11} = k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\psi_1')(1) = k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\psi_1') \\ \frac{\partial U_1}{\partial R_4'} &= k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{1j}\psi_j')H_{12} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(35)$$

2）第 2 部材：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial R_1'} &= k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{2j}\psi_j'\}H_{21} = k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')\}(-\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2+(-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3+\frac{1}{6}((\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \\ \frac{\partial U_2}{\partial R_4'} &= k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{2j}\psi_j')\}H_{22} = k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')\}(\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2+(\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3+\frac{1}{6}(-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'+(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(36)$$

3）第 3 部材:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial R_1'} &= k_2\{\varphi_3+\varphi_4+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{3j}\psi_j'\}H_{31} = k_2\{\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3+\frac{h_1}{2h_2}\varphi_4+\frac{1}{6}((\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \leftarrow H_{31}=\frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial R_4'} &= k_2\{\varphi_3+\varphi_4+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{3j}\psi_j'\}H_{32} = k_2\{-\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3-\frac{h_1}{2h_2}\varphi_4+\frac{1}{6}(-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'+(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \leftarrow H_{32}=-\frac{h_1}{2h_2} \end{aligned}\right\} \cdots(37)$$

4）第 4 部材：　$\frac{dU_4}{dR_1'}=0;\quad \frac{dU_4}{dR_4'} = k_1(\varphi_4+\frac{2}{3}\psi_4)H_{42} = k_1(\varphi_4+\frac{2}{3}\psi_4') \leftarrow H_{41}=0; H_{42}=1$　　……(38)

次に、外力仕事を求める。外力に対応する 2 節点及び 3 節点の仮想変位 $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_3)$ は、部材角によって、$\tilde{u}_2 = h_1\tilde{R}_1;\quad \tilde{v}_3 = l\tilde{R}_2/2$ として表される。

次に、式(27)右辺の節点仮想変位と独立部材角の関係を求めておく。

$$\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_4} \\ \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_4} \end{bmatrix} [H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{h_1}{2h_2} & \frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ -\frac{l}{2}\frac{h_1}{2h_2} & \frac{l}{2}\frac{h_1}{2h_2} \end{bmatrix} \cdots\cdots(39)$$

基礎９３話 No.5　独立部材角による モーメントの釣合式

今回は、前回の異形ラーメンに関する応力解析の続きである。式(39)を利用して、式(27)の右辺項を計算する。

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2}P_k\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial\tilde{R}_j}H_{jl}\rightarrow\frac{-1}{3}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial R_1'}\\[2ex]\dfrac{\partial V}{\partial R_4'}\end{Bmatrix}=\frac{-1}{3}\left(\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1 & 0\\ -\dfrac{l}{2}\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{l}{2}\dfrac{h_1}{2h_2}\end{bmatrix}\right)^T=\frac{-1}{3}\begin{bmatrix}P_1h_1-P_2\dfrac{h_1l}{4h_2}\\[2ex]P_2\dfrac{h_1l}{4h_2}\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots(40)$$

これで、2 つの独立部材角に関する項は全て求められた。これらをまとめると、独立部材角に関するモーメントの釣合式は、行列表示を用いると、次のように表される。

$$\begin{bmatrix}k_1-k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & 0 & k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2) & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2\\ k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & 0 & k_1-(\dfrac{h_1}{2h_2})k_2 & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{h_1}{3}P_1+\dfrac{l}{12}\dfrac{h_1}{h_2}P_2\\ -\dfrac{l}{12}\dfrac{h_1}{h_2}P_2\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(41)$$

節点方程式(35)と層モーメントの釣合に対応する釣合式(41)をまとめると、全体の釣合式が得られる。以上のように得られた 5 元の連立方程式は次式となり、剛性行列は対称となっている。

$$\begin{bmatrix}2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2\\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2\\ k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & 0 & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2) & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2\\ \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & 0 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -\dfrac{h_1}{3}P_1+\dfrac{lh_1}{12h_2}P_2\\ -\dfrac{lh_1}{12h_2}P_2\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(42)$$

上の 5 元の連立方程式を解き、その解を材端モーメントに代入して、曲げモーメント図を描く。後の処理は整形の骨組の解析と全く同じである。ただし、上の記号の入った連立方程式を解くことはかなり難しい。後で、剛比や荷重の値、骨組形状を決めて数値計算することで、解を検証する。

次に、図 7 に示す例題を用いて、骨組の釣合式を求める。この骨組では、梁に部材角が生じるため、異形ラーメンとなる。部材角間の依存関係は既に求められており、式(18)より次式で与えられる。

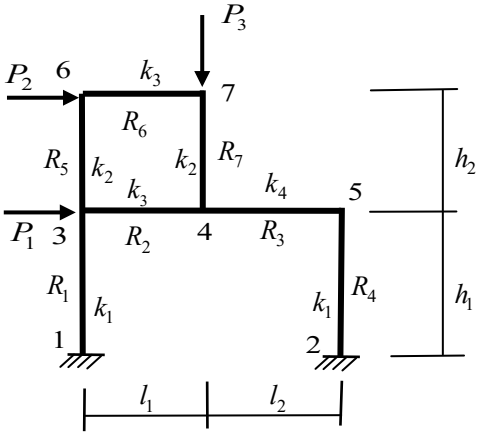


図 7 2 層の異形ラーメン

$$\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\\R_5\\R_6\\R_7\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_1/l_2&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}R_1'\\R_2'\\R_5'\end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{3}H_{ij}R_{jl}'\rightarrow[H]=\begin{bmatrix}H_{1,1}&H_{1,2}&H_{1,3}\\H_{2,1}&H_{2,2}&H_{2,3}\\H_{3,1}&H_{3,2}&H_{3,3}\\H_{4,1}&H_{4,2}&H_{4,3}\\H_{5,1}&H_{5,2}&H_{5,3}\\H_{6,1}&H_{6,2}&H_{6,3}\\H_{7,1}&H_{7,2}&H_{7,3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_1/l_2&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\cdots(43)$$

ここで、独立部材角は、柱の R_1,R_5 と梁の R_2 の 3 つである。

節点数は 7 で、固定支持の 2 を除くと、節点回転角は 5 自由度となる。独立部材角は 3 であり、従って、全自由度は 8 となる。最初に、式(43)を参照して、節点方程式を作る。これは読者の演習とする。ただ、部材荷重及び節点モーメント荷重はないので、右辺項はゼロとなる。

$$\begin{bmatrix}2(k_1+k_2+k_3)&k_3&0&k_2&0&k_1&k_3&k_2\\k_3&2(k_2+k_3+k_4)&k_4&0&k_2&0&k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4&k_2\\0&k_4&2(k_1+k_4)&0&0&k_1&-\frac{l_1}{l_2}k_4&0\\k_2&0&0&2(k_2+k_3)&k_3&0&k_3&k_2\\0&k_2&0&k_3&2(k_2+k_3)&0&k_3&k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_3\\\varphi_4\\\varphi_5\\\varphi_6\\\varphi_7\\\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_5'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\quad\cdots(44)$$

次に、式(27)より、各独立部材角に関するモーメントの釣合を求める。独立部材角は両柱の部材角 R_1,R_5 と梁の R_2 である。最初に、仮想変位として独立部材角 $\overline{R}_1',\overline{R}_2',\overline{R}_5'$ を与えたときの内力仕事から式(27)の左辺項を求める。なお、式(43)より部材角の独立部材角による微分は式(43)の H_{ij} である。以下に、各部材の式(27)の左辺項を求める。

1）第 1 部材：$\dfrac{dU_1}{dR_1'}=k_1(\varphi_3+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{1j}\psi_j')H_{11}=k_1(\varphi_3+\dfrac{2}{3}\psi_1');\quad\dfrac{dU_1}{dR_2'}=0;\quad\dfrac{dU_1}{dR_5'}=0$　……(45)

2）第 2 部材：$\dfrac{dU_2}{dR_1'}=0;\quad\dfrac{dU_2}{dR_5'}=0;\quad\dfrac{dU_2}{dR_2'}=k_3(\varphi_3+\varphi_4+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{2j}\psi_j')H_{22}=k_3(\varphi_3+\varphi_4+\dfrac{2}{3}\psi_2')$　…(46)

3）第 3 部材：$\dfrac{\partial U_3}{\partial R_1'}=0;\quad\dfrac{\partial U_3}{\partial R_5'}=0;$

$\dfrac{\partial U_3}{\partial R_2'}=k_4(\varphi_4+\varphi_5+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{3j}\psi_j')H_{32}=k_4(\varphi_4+\varphi_5-\dfrac{2}{3}\dfrac{l_1}{l_2}\psi_2')(-\dfrac{l_1}{l_2})=k_4(-\dfrac{l_1}{l_2}\varphi_4-\dfrac{l_1}{l_2}\varphi_5+\dfrac{2}{3}(\dfrac{l_1}{l_2})^2\psi_2')$　……(47)

4）第 4 部材：$\dfrac{\partial U_4}{\partial R_1'}=k_1(\varphi_5+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{4j}\psi_j')H_{41}=k_1\varphi_5+\dfrac{2}{3}k_1\psi_1';\quad\dfrac{\partial U_4}{\partial R_2'}=0;\quad\dfrac{\partial U_4}{\partial R_5'}=0$　……(48)

5）第 5 部材：$\dfrac{\partial U_5}{\partial R_1'}=0;\quad\dfrac{\partial U_5}{\partial R_2'}=0;\quad\dfrac{\partial U_5}{\partial R_5'}=k_2(\varphi_3+\varphi_6+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{5j}\psi_j')H_{53}=k_2(\varphi_3+\varphi_6+\dfrac{2}{3}\psi_5')$　……(49)

5）第 6 部材：$\dfrac{\partial U_6}{\partial R_1'}=0;\quad\dfrac{\partial U_6}{\partial R_5'}=0;\quad\dfrac{\partial U_6}{\partial R_2'}=k_3(\varphi_6+\varphi_7+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{6j}\psi_j')H_{62}=k_3(\varphi_6+\varphi_7+\dfrac{2}{3}\psi_2')$　……(50)

7）第 7 部材：$\dfrac{\partial U_7}{\partial R_1'}=0;\quad\dfrac{\partial U_7}{\partial R_2'}=0;\quad\dfrac{\partial U_7}{\partial R_5'}=k_2(\varphi_4+\varphi_7+\dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}H_{7j}\psi_j')H_{73}=k_2(\varphi_4+\varphi_7+\dfrac{2}{3}\psi_5')$　……(51)

基礎９４話 No.6　２層柱抜け骨組の節点モーメントの釣合式

付 20 話参照
ex94_1

今回も、異形ラーメンに関する応力解析の続きである。仮想変位によって生じる外力仕事を求め、式(27)の右辺項を計算する。外力に対応する変位及び外力仕事は、図 7 より部材角によって次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix}\tilde{u}_3\\ \tilde{u}_6\\ \tilde{v}_7\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}h_1\tilde{R}_1\\ h_1\tilde{R}_1+h_2\tilde{R}_5\\ l_1\tilde{R}_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}h_1\tilde{R}'_1\\ h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5\\ l_1\tilde{R}'_2\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}V_3\\ V_6\\ V_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\tilde{u}_3\\ P_2\tilde{u}_6\\ P_3\tilde{v}_7\end{bmatrix};\quad V=V_3+V_6+V_7 \qquad \cdots\cdots(52)$$

次に、式(27)右辺の荷重に対応する変位項を求めておく。

$$\sum_{j=1}^{7}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial\tilde{R}_j}H_{jl}\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_1}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_2}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_3}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_4}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_5}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_6}&\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\tilde{R}_7}\\ \frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_1}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_2}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_3}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_4}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_5}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_6}&\frac{\partial\tilde{u}_6}{\partial\tilde{R}_7}\\ \frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_1}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_2}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_3}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_4}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_5}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_6}&\frac{\partial\tilde{v}_7}{\partial\tilde{R}_7}\end{bmatrix}[H]=\begin{bmatrix}h_1&0&0&0&0&0&0\\ h_1&0&0&0&h_2&0&0\\ 0&0&0&0&0&l_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&-l_1/l_2&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}h_1&0&0\\ h_1&0&h_2\\ 0&l_1&0\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(53)$$

上式を利用して、式(27)の右辺項を計算する。

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}P_k\sum_{j=1}^{7}\frac{\partial u_k}{\partial R_j}H_{jl}\rightarrow\frac{-1}{3}\begin{Bmatrix}\frac{\partial V}{\partial R'_1}\\ \frac{\partial V}{\partial R'_2}\\ \frac{\partial V}{\partial R'_5}\end{Bmatrix}=\frac{-1}{3}\left(\begin{bmatrix}P_1&P_2&P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1&0&0\\ h_1&0&h_2\\ 0&l_1&0\end{bmatrix}\right)^T=\frac{-1}{3}\begin{bmatrix}h_1(P_1+P_2)\\ l_1P_3\\ h_2P_2\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(54)$$

上記のように行列を用いて、独立部材角に関する釣合式の右辺項を求めたが、この値を検証するため、式(52)右の各節点における外力仕事から右辺項を求めてみよう。

1）節点 3：　$\frac{\partial V_3}{\partial\tilde{R}'_1}=P_1\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1)}{\partial\tilde{R}'}P_1h_1;\quad\frac{\partial V_3}{\partial\tilde{R}'_2}=0;\quad\frac{\partial V_3}{\partial\tilde{R}'_5}=0$ 　……(55)

2）節点 6：　$\frac{\partial V_6}{\partial\tilde{R}'_1}=P_2\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5)}{\partial\tilde{R}'_1}=P_2h_1;\quad\frac{\partial V_6}{\partial R'_2}=0;\quad\frac{\partial V_6}{\partial R'_5}=P_2\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5)}{\partial\tilde{R}'_5}=P_2h_2$ 　……(56)

3）節点 7：　$\frac{\partial V_7}{\partial\tilde{R}'_1}=0;\quad\frac{\partial V_7}{\partial\tilde{R}'_2}=P_3\frac{\partial(l_1\tilde{R}'_2)}{\partial\tilde{R}'_2}=P_3l_1;\quad\frac{\partial V_7}{\partial R'_5}=0$ 　……(57)

右辺項は、各独立材角の微分項の和を取り、-1/3 を掛けることで得られる。得られた結果は、式(54)に一致する。

以上をまとめ、全体釣合式を行列形式で示す。各断面力図を求める手

順はこれまでと同じであり、次の連立方程式を解き、その解を材端モーメントに代入して求める。

$$\begin{bmatrix}
2(k_1+k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\
k_3 & 2(k_2+k_3+k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_2 \\
0 & k_4 & 2(k_1+k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & 0 \\
k_2 & 0 & 0 & 2(k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\
0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2+k_3) & 0 & k_3 & k_2 \\
k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_1) & 0 & 0 \\
k_3 & k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_3 & k_3 & 0 & \frac{2}{3}(2k_3+(\frac{l_1}{l_2})^2k_4) & 0 \\
k_2 & k_2 & 0 & k_2 & k_2 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_2)
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\\ \varphi_5\\ \varphi_6\\ \varphi_7\\ \psi_1'\\ \psi_2'\\ \psi_5'\end{Bmatrix}
=-\frac{1}{3}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\h_1(P_1+P_2)\\l_1P_3\\h_2P_2\end{Bmatrix}
\quad\cdots\cdots(58)$$

これまで、2 つの例題を用いて、異形ラーメンに関する全体釣合式の求め方を学んだ。記号を用いたため、全体釣合式である連立方程式を解くことが難しく、実際の断面力図を求めることができなかった。そこで、各パラメータに値を設定して、最後まで応力解析を行い、断面力図を求めてみよう。

1）両端固定の山形ラーメン　　ex94_1

梁、柱共に以下の同じ H 型断面を使用する。材質は SS400、H400x200x8x13 であり、断面二次モーメントは 23500cm^4、ヤング係数は 20500kN/cm^2 とする。柱の剛比 k_1 を 1 とすると、梁の剛比は次式となる。

$$\left.\begin{aligned}
&K_0=\frac{2EI}{h_1};\quad K_2=\frac{2EI}{l_2};\quad l_2=\sqrt{3^2+1^2}=3.162;\\
&\frac{h_2}{h_1}=0.333;\quad k_2=\frac{2EI/l_2}{2EI/h_1}=\frac{300}{316.2}=0.9487
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(59)$$

ここで、l_2 は梁 1 本の長さであり、l は骨組のスパン長の 6m、h_1 は 3m、h_2 は 1m である。

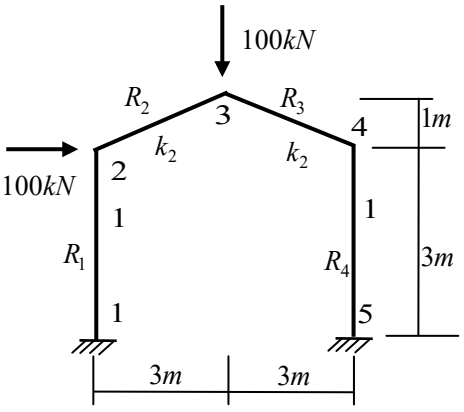


図 8 課題 1 の異形ラーメン

独立部材角を R_1, R_4 とすると、釣合式は式(42)より次式となる。

$$\begin{bmatrix}
3.8974 & 0.9487 & 0 & -0.4231 & 1.4231 \\
0.9487 & 3.7948 & 0.9487 & 0 & 0 \\
0 & 0.9487 & 3.8974 & 1.4231 & -0.4231 \\
-0.4231 & 0 & 1.4231 & 3.5128 & -2.8461 \\
1.4231 & 0 & -0.4231 & -2.8461 & 3.5128
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\50\\-150\end{Bmatrix}
\quad\cdots\cdots(60)$$

$$\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix}47.63\\-19.49\\30.36\\-115.25\\-151.72\end{Bmatrix}
\quad\cdots\cdots(61)$$

上の 5 元の連立方程式の解を求めることは、かなり難しいので、ここでは添付した Excel VBA の連立方程式を解くプログラムで解を求める。

得られた方程式の解を右欄に示す。以降は次回お話しする。

基礎９５話 No.7　山形ラーメンの数値解析例

付 20 話参照
ex94_1

今回は、前回の異形ラーメンに関する応力解析の続きであり、2 つの課題について数値計算して、断面力図と各節点変位を求める。

全体釣合式を解いて得た回転角と独立部材角を用いて、各部材の断面力を計算する。

$$
\begin{aligned}
&M_{12}=k_1(\varphi_2+\psi_1')=(47.63-115.25)=-67.62\\
&M_{21}=k_1(2\varphi_2+\psi_1')=(2\cdot 47.63-115.25)=-19.99\\
&M_{23}=k_2(2\varphi_2+\varphi_3-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')=0.9487(2\cdot 47.63-19.49-1.5\cdot(-115.25+151.72))=19.97\\
&M_{32}=k_2(2\varphi_3+\varphi_2-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')=0.9487(-2\cdot 19.49+47.63-1.5\cdot(-115.25+151.72))=-43.69\\
&M_{34}=k_2(2\varphi_3+\varphi_4+\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'-\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')=0.9487(-2\cdot 19.49+30.36+1.5\cdot(-115.25+151.72))=43.72\\
&M_{43}=k_2(2\varphi_4+\varphi_3+\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'-\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')=0.9487(2\cdot 30.36-19.49+1.5\cdot(-115.25+151.72))=91.01\\
&M_{45}=k_1(2\varphi_4+\psi_4')=(2\cdot 30.36-151.72)=-91.00\\
&M_{54}=k_1(\varphi_4+\psi_4')=(30.36-151.72)=-121.36
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(62)
$$

この材端モーメントを用いて曲げモーメント図、及びせん断力図を以下に示す。

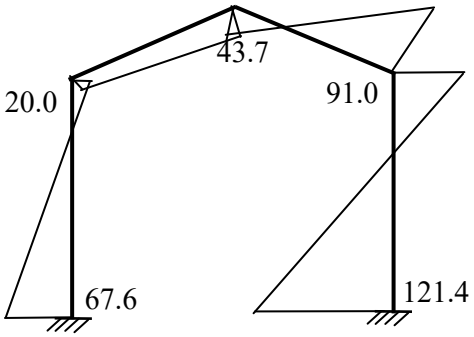


図 9(a) 課題１の異形ラーメンの曲げモーメント図

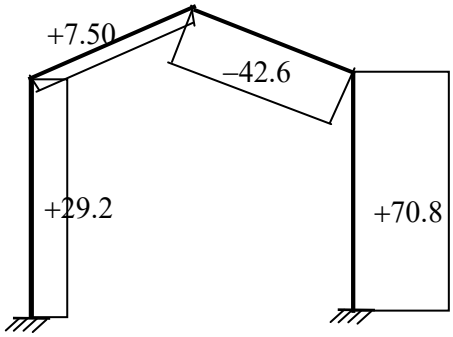


図 9(b) 課題１の異形ラーメンのせん断力図

次に、節点 2 の水平方向変位と節点 3 の鉛直方向変位を求めてみよう。

まず、標準剛度は式(59)より、次式で与えられる。

$$K_0=\frac{2EI}{h_1}=\frac{2\cdot 20500\cdot 23500}{300}=3.212\cdot 10^6 \qquad \cdots\cdots\cdots(63)$$

従って、節点 2 の水平方向変位は、

$$\delta_2=R_1h_1=\frac{\psi_1'h_1}{-3K_0}=\frac{-115.25\cdot 100\cdot 300}{-3\cdot 3.212\cdot 10^6}=0.358cm \qquad \cdots\cdots\cdots(64)$$

となり、同様に、節点 3 の鉛直方向変位は次のように計算される。

$$\delta_3=R_2\frac{l}{2}=(-\frac{h_1}{2h_2}R_1'+\frac{h_1}{2h_2}R_4')\frac{l}{2}=\frac{-\psi_1'+\psi_4'}{-3K_0}\frac{h_1}{2h_2}\frac{l}{2}=\frac{(115.25-151.72)\cdot 100}{-3\cdot 3.212\cdot 10^6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{600}{2}=0.170cm \qquad \cdots\cdots(65)$$

$$\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}47.63\\ -19.49\\ 30.36\\ -115.25\\ -151.72\end{Bmatrix}$$

ここでは、部材角 ψ_1,ψ_4 はモーメントと同じ単位 kNm であり、単位を $kNcm$ に変換するため 100 倍している。

同じ課題で、独立部材角を $R_1.R_2$ に変更した釣合式は次式で表される。同式の誘導は読者の演習とするので、前例を参考に下式を求められたい。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & k_1 & \frac{2h_2}{h_1}k_1-k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 & \frac{4}{3}k_1 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 \\ k_2 & 0 & \frac{2h_2}{h_1}k_1-k_2 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 & \frac{4}{3}(k_2+2(\frac{h_2}{h_1})^2k_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1' \\ \psi_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P_1h_1}{3} \\ -\frac{P_2l}{6} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(66)$$

ここで、l,h_1 は骨組のスパン長 6m と高さ $3m$ であり、従って、荷重項は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} -\frac{P_1h_1}{3} \\ -\frac{P_2l}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{100\cdot3}{3} \\ -\frac{100\cdot6}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -100 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(67)$$

式(59)のパラメータを代入すると、骨組全体の釣合式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} 3.8974 & 0.9487 & 0 & 1 & 0.9487 \\ 0.9487 & 3.7948 & 0.9487 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 3.8974 & 1 & -0.282 \\ 1 & 0 & 1 & 1.3333 & 0.4444 \\ 0.9487 & 0 & -0.282 & 0.4444 & 1.5611 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1' \\ \psi_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(68)$$

上式を、添付した EXCEL VBA の連立方程式を解くプログラムで使用して解を求めると、次の結果が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1' \\ \psi_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47.63 \\ -19.49 \\ 30.35 \\ -115.25 \\ -54.75 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(69)$$

従属部材角 ψ_4 は、式(9)を参考にすると、$\psi_4=\psi_1'+2h_2\psi_2'/h_1$ で求められる。具体的に $\psi_4=-115.25-2\cdot1\cdot54.75/3=-151.75$、式(61)と同一となる。

境界条件を考慮したたわみ角法の基本式に、上の変位を代入すると、各部材の材端モーメントが得られる。これ以降については次回お話しする。また、次回では課題 2 についても演習を行う予定である。上の釣合式の誘導を行い、異形ラーメンの解析法を深く理解されたい。

基礎９６話 No.8　2 層柱抜け骨組の数値解析例

付 20 話参照
ex95_1

今回も、前回の異形ラーメンに関する応力解析の続きであり、2 つの課題の数値計算を行う。

前回求めた回転角と独立部材角を、境界を考慮した基本式に代入し、部材の材端モーメントを求める。

$$
\left.\begin{aligned}
M_{12} &= k_1(\varphi_2+\psi_1') = (47.63-115.25) = -67.62\\
M_{21} &= k_1(2\varphi_2+\psi_1') = (2\cdot 47.63-115.25) = -19.99\\
M_{23} &= k_2(2\varphi_2+\varphi_3+\psi_2') = 0.9487(2\cdot 47.63-19.49-54.75) = 19.94\\
M_{32} &= k_2(2\varphi_3+\varphi_2+\psi_2') = 0.9487(-2\cdot 19.49+47.63-54.75) = -43.74\\
M_{34} &= k_2(2\varphi_3+\varphi_4-\psi_2') = 0.9487(-2\cdot 19.49+30.35+54.75) = 43.75\\
M_{43} &= k_2(2\varphi_4+\varphi_3-\psi_2') = 0.9487(2\cdot 30.35-19.49+54.75) = 91.03\\
M_{45} &= k_1(2\varphi_4+\psi_1'+\frac{2h_2}{h_1}\psi_2') = (2\cdot 30.35-115.25-54.75\cdot 2/3) = -91.05\\
M_{54} &= k_1(\varphi_4+\psi_1'+\frac{2h_2}{h_1}\psi_2') = (30.35-115.25-54.75\cdot 2/3) = -121.40
\end{aligned}\right\}\cdot\cdot(70)
\qquad
\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_2'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}47.63\\ -19.49\\ 30.35\\ -115.25\\ -54.75\end{Bmatrix}
$$

節点 2 の水平方向変位と節点 3 の鉛直方向変位は、

$$\delta_2 = R_1 h_1 = \frac{\psi_1' h_1}{-3K_0} = \frac{-115.25\cdot 100\cdot 300}{-3\cdot 3.212\cdot 10^6} = 0.358cm$$

$$\delta_3 = R_2\frac{l}{2} = \frac{\psi_2'}{-3K_0}\frac{l}{2} = \frac{-54.75\cdot 100}{-3\cdot 3.212\cdot 10^6}\cdot\frac{600}{2} = 0.170cm$$

となる。上記の結果は前例の材端モーメントと節点変位と同じであり、独立部材角を交換しても正確な解が得られることが分かる。ただし、以前述べたように、独立部材角の選択には特に注意する必要がある。

2）柱抜けのある骨組　　ex95_1

次に、課題 2 として図 10 の骨組を、たわみ角法を用いて応力解析を行い、断面力図を求める。部材は全て同じ H 型断面を使用する。材質は SS400、断面は H400x200x8x13 とする。使用する独立部材角は R_1, R_2, R_5 である。ここでは、1 階柱の剛比 k_1 を 1 とすると梁及び他の部材の剛比は以下のようである。

$$
\left.\begin{aligned}
&l_1 = 3m;\ l_2 = 4m;\ h_1 = h_2 = 3m\\
&K_0 = \frac{2EI}{h_1};\quad K_4 = \frac{2EI}{l_2};\quad k_1 = k_2 = k_3 = 1\\
&k_4 = \frac{K_4}{K_0} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{300}{400} = 0.75;\ \frac{l_1}{l_2} = 0.75;\quad (\frac{l_1}{l_2})^2 = 0.5625
\end{aligned}\right\}\cdot(71)
$$

上の値を用いて、式(49)の骨組全体の釣合式を作成し、Excel VBA の連立方程式を解くプログラムを用いて解を求める。

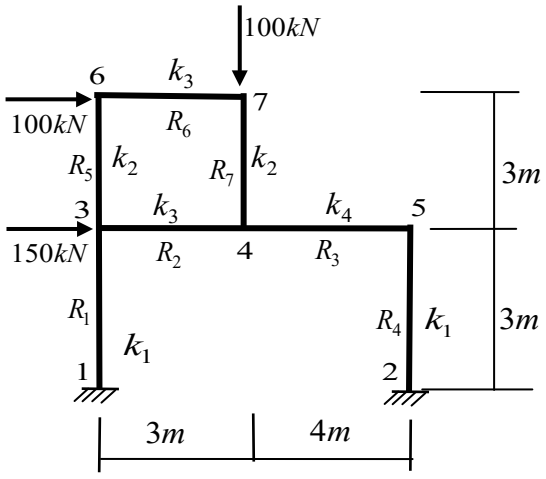
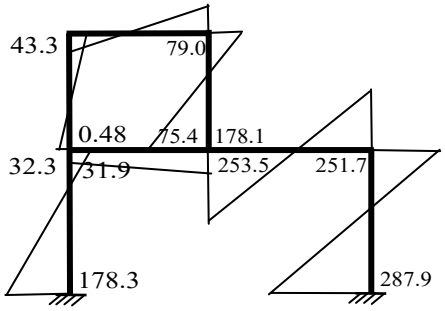


図 10 課題 2 の 2 層の異形ラーメン

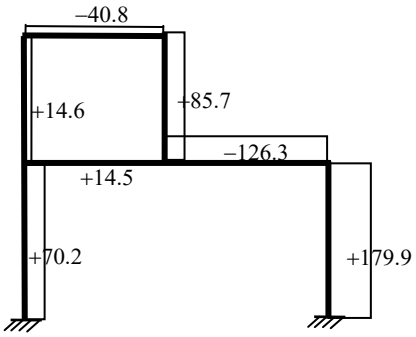
$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5.5 & 0.75 & 0 & 1 & 0 & 0.4375 & 1 \\ 0 & 0.75 & 3.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5625 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ 1 & 0.4375 & -0.5625 & 1 & 1 & 0 & 1.6146 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_5' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ -100 \\ -100 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_5' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 145.95 \\ 38.78 \\ 36.28 \\ 102.15 \\ 137.87 \\ -324.18 \\ -298.85 \\ -393.57 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(72)$$

以下の材端曲げモーメントを用いて、図 11 に曲げモーメント図とせん断力図及び軸力図を示す。

$$\left.\begin{aligned}
M_{13} &= k_1(\varphi_3 + \psi_1') = (145.95 - 324.18) = -178.30 \\
M_{31} &= k_1(2\varphi_3 + \psi_1') = (2 \cdot 145.95 - 324.18) = -32.28 \\
M_{34} &= k_3(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi_2') = (2 \cdot 145.95 + 38.78 - 298.85) = -31.85 \\
M_{43} &= k_3(2\varphi_4 + \varphi_3 + \psi_2') = (2 \cdot 38.78 + 145.95 - 298.85) = -75.36 \\
M_{45} &= k_4(2\varphi_4 + \varphi_5 - \frac{l_1}{l_2}\psi_2') = 0.75(2 \cdot 38.78 + 36.28 + 0.75 \cdot 298.85) = 253.48 \\
M_{54} &= k_4(2\varphi_5 + \varphi_4 - \frac{l_1}{l_2}\psi_2') = 0.75(2 \cdot 36.28 + 38.78 + 0.75 \cdot 298.85) = 251.61 \\
M_{51} &= k_1(2\varphi_5 + \psi_1') = (2 \cdot 36.28 - 324.18) = -251.68 \\
M_{15} &= k_1(\varphi_5 + \psi_1') = (36.28 - 324.18) = -287.90 \\
M_{36} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_6 + \psi_5') = (2 \cdot 145.95 + 102.15 - 393.57) = 0.48 \\
M_{63} &= k_2(2\varphi_6 + \varphi_3 + \psi_5') = (2 \cdot 102.15 + 145.95 - 393.57) = -43.32 \\
M_{67} &= k_3(2\varphi_6 + \varphi_7 + \psi_2') = (2 \cdot 102.15 + 137.87 - 298.85) = 43.32 \\
M_{76} &= k_3(2\varphi_7 + \varphi_6 + \psi_2') = (2 \cdot 137.87 + 102.15 - 298.85) = 79.04 \\
M_{74} &= k_2(2\varphi_7 + \varphi_4 + \psi_5') = (2 \cdot 137.87 + 38.78 - 393.57) = -79.05 \\
M_{47} &= k_2(2\varphi_4 + \varphi_7 + \psi_5') = (2 \cdot 38.78 + 137.87 - 393.57) = -178.14
\end{aligned}\right\} \cdots(73)$$



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

次に、各層床レベルの水平方向変位と第 2 層床中央柱の鉛直方向変位を求めておこう。まず、基準剛度は次の値となる。

$$K_0 = \frac{2EI}{h_1} = \frac{2 \cdot 20500 \cdot 23500}{300} = 3.212 \cdot 10^6 \quad \cdots\cdots\cdots(74)$$

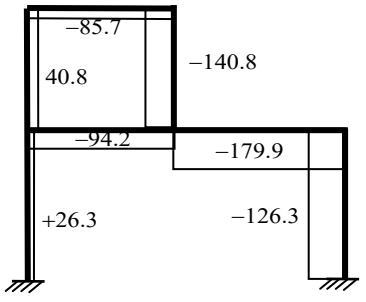
従って、第 1 層柱頭及び第 2 層柱頭の水平方向変位は、

$$\left.\begin{aligned}
\delta_2 &= R_1 h_1 = \frac{\psi_1' h_1}{-3K_0} = \frac{-324.18 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 1.01cm \\
\delta_2 &= \delta_1 + R_5 h_2 = \frac{\psi_1' h_1}{-3K_0} + \frac{\psi_5' h_2}{-3K_0} = 1.01 + \frac{-393.57 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 2.24cm
\end{aligned}\right\} \cdots(75)$$

同じく、第 2 層床中央柱の鉛直方向変位は次式のように計算される。

$$\delta_5 = R_2 l_1 = \frac{\psi_2' l_1}{-3K_0} = \frac{-298.85 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 0.93cm \quad \cdots\cdots\cdots(76)$$

ここで、独立部材角 $\psi_1', \psi_2', \psi_5'$ はモーメント同様の単位で kNm を使用しているため、単位変換のため 100 倍する。



(c) 軸力図

図 11 課題 2 の断面力図

基礎９７話 No.1　固定法の考え方 不釣合モーメントの解放

今回から固定法についてお話しする。ここでは、たわみ角法の基本式を用いて固定法の解析手法を導く。たわみ角法では、釣合式は連立方程式で表わされ、大きな構造物ではコンピュータを用いないと方程式の解を得ることは難しい。一方、固定法の利点は、釣合式を連立方程式で表わさず、反復解法によって材端モーメントが直接求められることにある。しかも表形式で反復解法が行われ、間違うことが少ない。そのため、手計算でも実構造物の応力解析が可能となる。これが固定法の大きな利点であり、特徴でもある。

固定法の基本的な仮定は、たわみ角法と全て同じであり、軸方向の伸縮は無視されている。また、節点移動のある場合とない場合とでは解析方法が異なり、節点移動のある場合、整形骨組と異型骨組においても解析方法が異なる。特に、異型骨組では収束も悪く、固定法では解析し難い。ここでは、異形骨組の固定法については触れないことにする。

最初に、節点移動のない場合の固定法について学ぶ。まずは、たわみ角法の基本を以下のように復習しよう。このテキストで使用する座標系は、右手・右ネジの法則に従った座標系を用い、各々の部材では部材の左端の i 点を原点とする。部材は、長さが l で、一様なヤング係数 E と断面二次モーメント I を有するものとする。また、これらのパラメータによる剛比 k を用いて固定法の解析を行う。なおここでも、解析対象は平面骨組とする。

まず、たわみ角法の基本式を示し、変数変換による方法を復習しよう。

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij};\quad M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji} \qquad \cdots\cdots(1)$$

骨組の中で代表的な部材を一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次の $K_0=2EI_0/l_0$ で定義し、このパラメータ K_0 を**標準剛度**と呼ぶ。ただし、I_0 と l_0 はその部材の断面二次モーメントと部材長さである。 この標準剛度を用いて、たわみ角法の基本式を次にように変換する。

$$M_{ij}=k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi)-C_{ij};\quad M_{ji}=k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi)+C_{ji} \qquad \cdots\cdots(2)$$

上式では、パラメータと新しい変数を次のように定義している。

$$k=\frac{K}{K_0};\quad K=\frac{2EI}{l};\quad \varphi_i=\theta_iK_0;\quad \psi=-3RK_0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

新しいパラメータとして定義した k は**剛比**と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対する当該部材の曲げ剛性の倍率を表す。

本文で固定法の計算手順を説明するが、手続きの意味や収束過程が、今ひとつ理解し難いと思う。そこでここでは、固定法の考え方あるいは反復解析手法について概説する。

骨組が外力と釣合う状態とは如何なることか。例えば、支持点以外に拘束なしで骨組がこれ以上動かないこと、つまり節点回転角と部材角がさらに変化しないことである。固定法は、まず変位全てを拘束し、断面力分布を求めた後、一つの節点の拘束を解いて断面力分布を変化させ、この操作を全節点に行い、反復しながら釣合状態に近づける手法である。如何なる方法で、上記の操作を行うのか、具体的に説明しよう。

１：まず、変位ゼロの状態で、全ての節点回転角と部材角を拘束し、部材荷重による固定端モーメントと水平荷重による層モーメントを部材両端の節点に、外力項として加える。この状態で拘束を解けば、当然、節点でのモーメントの釣合と層モーメントの釣合は得られておらず、不釣合状態となる。

２：不釣合状態を解消するため、次の反復処理を行う。多数の不釣合モーメントを同時に解放することは難しいので、まず一つの節点のみ拘束を解き、他の変位は拘束のままとする。この状態の解析解は得られており、分割モーメントと到達モーメントで容易に得られる。その後その節点を再度拘束する。到達モーメントは隣接する節点に新たな不釣合モーメントを生じさせるが、その値は分割モーメントより小さい。

３：次に、次々と上記の操作を行う節点を移動させ、同じ操作を繰り返す。この操作を全節点について行うが、先に記した到達モーメントによって不釣合モーメントは残ることになる。

固定法の原理を図 1 に示す骨組を用いて説明する。この骨組は、節点 i で剛接し、他の節点は全て固定支持とする。まず、式(2)より、境界条件を考慮した 3 つの部材に関するたわみ角法の基本式を以下に示す。ここでは、節点移動がないため部材角はゼロである。

$$\left.\begin{aligned} M_{i1} &= k_1(2\varphi_i); \quad M_{1i} = k_1(\varphi_i) \\ M_{i2} &= k_2(2\varphi_i); \quad M_{2i} = k_2(\varphi_i) \\ M_{i3} &= k_3(2\varphi_i); \quad M_{3i} = k_3(\varphi_i) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

次に、この節点 i におけるモーメントの釣合を考える。この節点には、荷重として、モーメント $\bar{M}_i$ が加わっている。図 2 を参考にすると、モーメントの釣合は次式で与えられることが分かる。

$$M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} = \bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(5)$$

上式に、式(4)の材端モーメントを代入し、整理すると、

$$2(k_1 + k_2 + k_3)\varphi_i = \bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(6)$$

となり、節点 i の回転角 φ_i は、次式で与えられる。

$$\varphi_i = \frac{\bar{M}_i}{2(k_1 + k_2 + k_3)} = \frac{\bar{M}_i}{2\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで、$\sum k_i$ は節点 i に集まる部材の剛比の和を表す。得られた回転角を材端モーメントの式(4)に代入すると、

$$\left.\begin{aligned} M_{i1} &= \frac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i; \quad M_{1i} = \frac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i1} \\ M_{i2} &= \frac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i; \quad M_{2i} = \frac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i2} \\ M_{i3} &= \frac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i; \quad M_{3i} = \frac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i3} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

として、材端モーメントが得られる。この骨組の曲げモーメント分布が式(8)の材端モーメントから図 3 のように得られる。

少し、見方を変えて解析経過を分析しよう。$\bar{M}_i$ は節点 i に加わるモーメント荷重であるが、これを不釣合モーメントであるとする。つまり、この骨組には、ある曲げモーメント分布が存在するが、この時点では各節点モーメントの釣合が取れていない。そこで、節点 i に着目し、この不釣合モーメントを解消するために、まず全節点を拘束し、当該節点のみ自由とする。この操作で新たな回転角が発生し、節点 i におけるモーメントの不釣合状態が解消される。他端にもモーメントが発生し、その節点に新たな不釣合モーメントを加えられる。ただし、この到達モーメントは節点 i の不釣合モーメントより小さい。これら一連の処理を**不釣合モーメントの解放**と呼ぶ。以降の説明は次回行う。

4：この一連の操作を数回反復することで、各節点の不釣合モーメントを徐々に小さくし、収束閾値以下にする。
5：反復が終了すると節点でのモーメントの釣合が得られる。ただし、この状態では層モーメントの釣合は得られていない。

層モーメントの釣合を得る手法として 2 つの方法を紹介するが、節点移動のある場合の項とカーニー法の項で解説する。

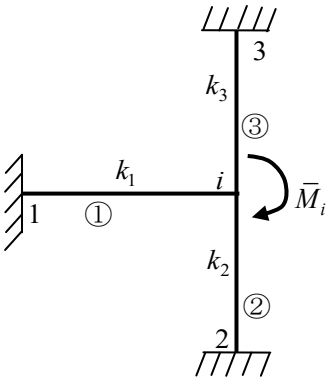


図 1 固定法の原理を説明するモデル

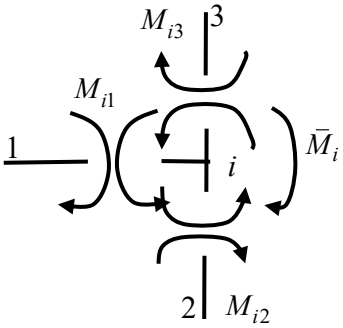


図 2 荷重と材端モーメント

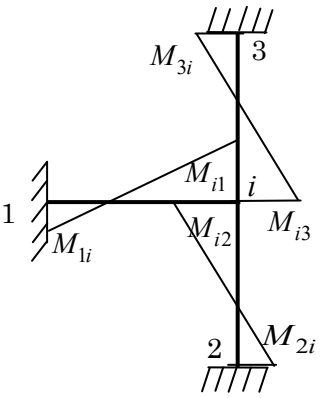


図 3 曲げモーメント図

基礎９８話 No.2　分割率による分割モーメントと到達モーメント

今回も固定法についてお話しする。前回不釣合モーメントの解放に関連する手順を、たわみ角法と単純なモデルで説明した。そこで用いた方法を拡張し、不釣合モーメントの解放処理の手順をまとめる。

R47：固定法の解析手順

１）　節点 *i* に集まる部材の曲げ剛性の比を求める。これを固定法では、分割率 DF と呼ぶ。

２）　不釣合モーメントと値が同じで逆のモーメントを、その節点に加わるモーメント荷重とみなす。

３）　上で求めたモーメント荷重に、節点 *i* に集まる部材の分割率を掛け、各部材が負担する曲げモーメントを求める。これを分割モーメントと呼び、存在する曲げモーメントに足しこむ。

４）　各部材の他端には、*i* 端で分割された曲げモーメントの 0.5 倍の曲げモーメントが発生する。この他端に生じる曲げモーメントを到達モーメントと呼び、値 0.5 を到達率と呼ぶ。後は、この到達モーメントを存在する曲げモーメントに足しこむ。

解析対象の骨組で他端が全て固定支持であると、1 回の不釣合モーメントの解放で、節点におけるモーメントの釣合が得られる。骨組の変形状態に節点移動がない場合は、これで全ての釣合が得られ、応力解析は終了する。一方、他端が固定でなく剛接合で、しかも、その節点も節点 *i* と同様に他の部材が結合している場合、ここでも不釣合モーメントの解放が必要となる。この不釣合モーメントは、一般に到達率が 0.5 であるため、先の不釣合モーメントに比較して、小さくなることが予想される。すなわち、この解放手順を繰り返すことで、徐々に不釣合モーメントは小さくなり、ほとんど無視し得る程度、つまり誤差の範囲となる。

このような手順を反復することで、節点移動がない場合の応力解析が実行できることになる。これが固定法の解法原理である。この手順は表を用いて行うと、間違いなく実行できる。次に固定法で用いられる表を示し、その処理手順の詳細な説明を行うことにしよう。

基本的な表が、右外欄に示される。この表は、梁、柱の両端に各一つ設定し、この中に計算した値を記入しながら上記の手順を繰り返し行うためのものである。表の第 1 項である DF の欄には、節点 *i* に集まる部材の曲げ剛性を用いて、それら剛比の割合を計算して記入する。これを**分割率**と呼ぶ。当然、節点 *i* におけるこの欄の和は 1 でなくてはならな

表 1 固定法の基本的な表

	梁
DF	
FEM	
D1	
C1	
D2	
C2	
D3	
C3	
D4	
計	

い。節点iに集まる部材jの分割率は、以下の式で与えられる。

$$DF_j = \frac{k_j}{\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(9)$$

次の欄の FEM は固定端モーメントであり、部材荷重がある場合は、この欄に値が入る。この値はたわみ角法における固定端モーメントCであり、値の正負は反力の方向と同じである。固定端モーメントが、不釣合力を計算する初期値となり、部材に存在する応力の初期値ともなる。

第 3 項の欄である D1 は、分割モーメントの第 1 番目を表し、後尾の数値は反復回数を示す。分割モーメントは、その節点における不釣合モーメントに上位欄の分割率を掛けて求める。次に、第 4 項の C1 は、到達モーメントを入れる欄であり、後尾の数値も反復回数を示す。この到達モーメントは、他端の分割モーメント D1 の値に 0.5 を掛けて求められる。この 0.5 は**到達率**と呼ばれ、一般には到達率はこの値となる。

上記の処理を数回繰り返すと、不釣合モーメントは非常に小さくなり反復処理を終了することになる。反復処理終了の判断は、この不釣合モーメントが設定した閾値より小さくなったときである。反復を終了する場合、一般に分割モーメントを記入した時点で終了する。これは、この時点で反復処理を終了すると、節点でのモーメントの釣合が満たされた状態となるからである。

最後に、各部材の材端モーメントを求める。材端モーメントは、表の中の応力全てを足し算して求める。つまり、固定端モーメント FEM の欄から最後に分割した分割モーメントの欄まで、全ての値の総和をとり、この値を計の欄に記入する。これが材端モーメントの値となる。なお、これらの処理は、全て同一の有効桁で計算する。ほとんどの場合 3 から 4 桁の有効桁で計算すれば十分である。

表 2 節点に十字型に結合する部材の固定法の表

節点 i

	左梁	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.2	0.3	0.3	0.2	
FEM	50			−100	50
D1	10	15	15	10	
C1	5	2.5	2.5	5	−15
D2					
C2					
D3					
C3					
D4					
計					

次に、上記の表が一般の骨組にどのように適用されるかについて検討しよう。まず、節点iでは、梁と柱により十字形になっている場合を考える。この場合、柱・梁の並びは表 2 のように配置される。骨組の境界部分で、十字形になっていない場合、存在しない部材の該当する欄に斜線を引いておけば良い。あるいは、最初からその部分を取り除くこともできる。解析を間違えずに実行するためにも、この順番で表 2 のように設定すべきである。

以降の説明は次回行う。

基礎９９話 No.3　固定法の表と反復計算

付 21 話参照
ex75_1

今回も固定法の説明の続きである。前回では表 2 を用いて、表内の各欄の役割について説明した。今回は不釣合モーメントの解放を行う反復法についてお話しする。

骨組の形状を描き、その中に表を配置するわけであるが、表 2 に見られるように、節点 i に対し、左より、左側の梁、下の柱、また右より、上の柱、右の梁となっている。最後には、この節点に働く外力もしくは不釣合モーメントを記入する欄がある。骨組の全ての節点で、この配置で表が描かれると反復計算に都合が良い。

表 2 節点に十字型に結合する部材の固定法の表

節点 i

	左梁	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.2	0.3	0.3	0.2	
FEM	50			−100	50
D1	10	15	15	10	
C1	5	2.5	2.5	5	−15
D2					
C2					
D3					
C3					
D4					
計					

表 3 到達モーメント

節点 i　　節点 j

	左梁	下柱	上柱	右梁	外力	左梁	下柱	上柱	右梁
DF									
FEM									
D1									
C1									
D2									
計									

節点 m　　節点 n

	左梁	下柱	上柱	右梁	外力	左梁	下柱	上柱	右梁
DF									
FEM									
D1									
C1									
D2									
計									

表 2 を使用して、先に説明した解析手順を復習し、且つ注意点を述べる。分割率は、有効桁で四捨五入を行って設定するが、その際、節点で分割率の和が、1 となるように設定すべきである。なぜなら、分割モーメントは分割率と不釣合モーメントを掛けて求めるため、分割率の和が 1 でないと得られた結果に増減が生じ、計算を繰り返すと誤差が集積するからである。

最初の不釣合モーメントは、FEM 欄の基本応力の和で表される。この時、節点でのモーメントが釣合っていないと不釣合モーメントが発生する。この不釣合モーメントを打ち消すために、逆のモーメントを外力

として、表 2 の網掛けの欄に記入する。無論、節点にモーメント外力が加わっている場合は、この欄に足し込むことになる。

次に、この不釣合モーメントを解放するために、この外力を分割モーメントとして分配する。分割モーメントは、この外力モーメントに各部材の分割率を掛け、所定の D1 の欄に記入する。次に、各部材の分割モーメントに到達率の 0.5 を掛け、到達モーメントを計算する。その到達モーメントの値を他端の C1 欄に記入する。

各材端モーメントを表 3 のように配置すると、規則的に到達モーメントを記入できる。例えば、節点 i と j 間の梁では、互いの分割モーメントから矢印のように到達モーメントを、同じく、節点 m と n 間の梁でも、同様の方法で到達モーメントを表に記入できる。また、節点 m と i 間の柱では、矢印のように到達モーメントを記入でき、分かり易い。

到達モーメントが設定されると、各節点では、またもや不釣合状態となる。ここでは、不釣合モーメントは、各部材の材端モーメントの和で与えられ、表 2 では、FEM から C1 欄までの全ての値の和をとることによって与えられる。ただし不釣合モーメントの分割で D1 までの値の総和はゼロとなり、従って、到達モーメント C1 の欄を足すことで不釣合モーメントが得られる。表 2 では、C1 の欄の和が 15.0 となり、外力の項には、逆方向の外力モーメントとして、-15.0 がセットされる。後は、この値を D2 の項に分割モーメントとして分配することになる。この一連の処理を反復して、不釣合モーメントが小さくなるまで実行する。不釣り合いモーメントが収束した後、FEM の欄から最終欄まで和を取り、計に記入する。部材荷重がある場合、単純梁の基本応力状態を重ね合わせることで、実際の応力状態が決定されることになる。

反復計算は次の順序で行う。

１：初期設定

1.骨組の形状に合わせて表の作成、特に青色欄を作成する
2. 節点毎に分割率を記入
3. 符号に注意して、部材荷重固定端モーメントを FEM 欄に記入
4. 各節点の FEM 欄の和をとり、符号を替えて FEM 欄外力項に記入(不釣合節点モーメントの初期値となる)

２：不釣合節点モーメントの解放処理

1. 前回の C*欄外力項の不釣合節点モーメントに分割率を掛け、分割モーメントを D*に記入
2. 各部材の他端 C*欄に 0.5×分割モーメントの値を記入

３：不釣合節点モーメントの計算

各節点で C*欄の和をとり、符号を変えて不釣合節点モーメントとして、C*欄の外力項に記入

４：収束判定

外力項の不釣合節点モーメントが収束閾値を下回ると反復終了。収束しない場合は 2 へ戻り、収束するまで反復処理を行う。

５：最後の不釣合節点モーメントの解放

前回の、C*欄の外力項の節点不釣合モーメントに分割率を掛け、分割モーメントを D*に記入

６：収束後処理

各項で FEM 欄から最後の D*欄まで和をとり、計に記入。この値が材端モーメントとなる。

1）両端固定支持の連梁　　ex75_1

簡単な例題を用いて、固定法の解析手順を演習する。次に示す端部が固定支持された連梁の応力解析を、固定法を用いて実行し、曲げモーメント図、せん断力図を描く。同図から分かるように、未知変数として節点 2 の回転角のみであり、固定法では一回の不釣合モーメントの解放で解が得られる。

標準剛度を $K_0 = 2EI_b / l$ とし、2 部材の剛比は部材①、②共に 1 となる。次に、部材②における基本応力を求める。基本応力は梁中央に集中荷重を受ける場合である。

$$C = \frac{Pl}{8};\quad M_0 = \frac{Pl}{4} = 2C;\quad Q = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(10)$$

以降の解析は次回とする。

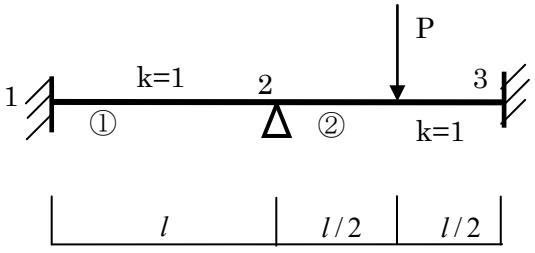


図 4 両端固定支持の連梁

基礎１００話 No.4　両端固定の連梁＋右梁の中央集中荷重

付 21 話参照
ex75_1

今回も固定法の説明の続きであり、例題の解析を行う。

節点 2 における部材①と②の分割率は、次式で与えられる。

$$DF_1 = \frac{1}{1+1} = 0.5; \quad DF_2 = \frac{1}{1+1} = 0.5 \qquad \cdots\cdots(11)$$

次に、固定法を用いるために表を作成する。ここでは、固定端モーメン C の値を 100 として計算する。

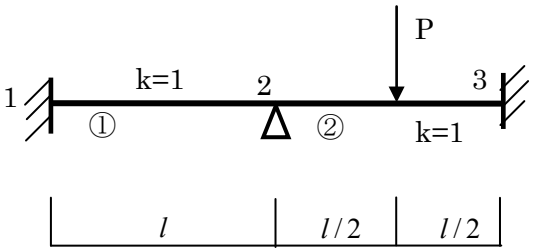


図 4 両端固定支持の連梁

表 4 両端固定支持の連梁に関する固定法の表

	右梁	左梁	右梁	外力	左梁
DF		0.5	0.5		
FEM	0	0	−100	100	100
D1		50	50		
C1	25	0	0	0	25
計	25	50	−50		125

上記の固定法の解析では、表から分かるように一回の分割と到達で不釣合モーメントが解消している。数値で得られた材端モーメントを、固定端モーメントの値 C に戻す。結果、材端モーメントは以下となる。

$$M_{12} = C/4; \quad M_{21} = C/2; \quad M_{23} = -C/2; \quad M_{32} = 5C/4 \qquad \cdots\cdots(12)$$

中間荷重が加わっている部材②では、得られた応力状態と両端固定の状態とを重ね合わせる必要がある。ただし、表中で得られる材端モーメントには、固定端モーメントである FEM の値を既に含んでいる。これは、梁端部で両端固定の応力状態を足し込んだことに相当する。従って部材荷重がある場合、この状態に単純梁の応力状態を加えれば良い。

部材②の中央の曲げモーメントは以下のように得られる。

$$M_c = M_0 - \frac{1}{2}(M_{32} - M_{23}) = 2C - \frac{1}{2}\left(\frac{5C}{4} + \frac{C}{2}\right) = \frac{9}{8}C \qquad \cdots\cdots(13)$$

材端モーメントと部材②の中央の曲げモーメントから、図 5 に示す曲げモーメント図及びせん断力図が得られる。

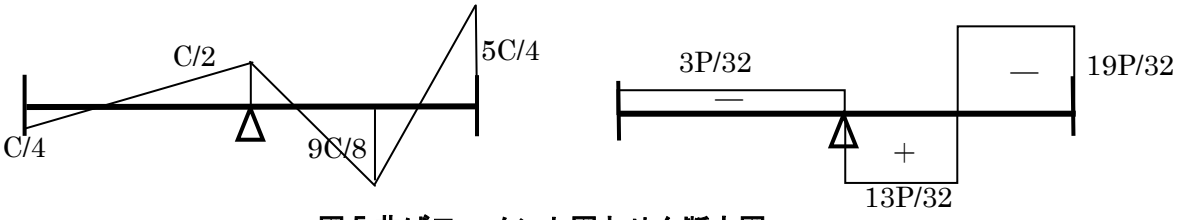


図 5 曲げモーメント図とせん断力図

部材①と②のせん断力は、曲げモーメントより次のように求められる。

$$Q_1 = -(M_{21} + M_{12})/l = -(\frac{C}{2} + \frac{C}{4})/l = -\frac{3C}{4l} = -\frac{3P}{32}$$
$$Q_{2L} = -(-\frac{9C}{8} - \frac{C}{2})/0.5l = \frac{13C}{4l} = \frac{13P}{32}$$
$$Q_{2R} = -(\frac{5C}{4} + \frac{9C}{8})/0.5l = -\frac{19C}{4L} = -\frac{19P}{32}$$
$$\cdots(14)$$

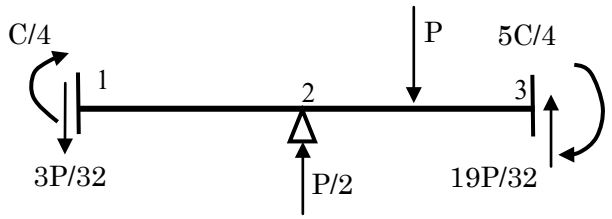


図 6　外力と反力の釣合

図 5 に示す曲げモーメント図とせん断力図から反力が求められる。この反力と外力を図 6 に示す。同図から理解できるように、上下方向の力の釣合は満たされている。モーメントの釣合は、節点 1 におけるモーメントを考えると、

$$\frac{C}{4} + \frac{5C}{4} + 1.5Pl - \frac{Pl}{2} - \frac{2l \cdot 19P}{32} = Pl(\frac{6}{32} + \frac{48}{32} - \frac{16}{32} - \frac{38}{32}) \to 0 \qquad \cdots(15)$$

となり、満足することが分かる。

次に、この骨組唯一の変位である回転角 φ_2 を求めてみよう。ここで、回転角と外力との関係である式(7)の $\varphi_i = \bar{M}_i / 2\sum k_i$ を思い起こそう。節点回転角 φ_2 は、外力と不釣合モーメントを打ち消す外力を、その節点に集まる部材剛比の総和の 2 倍で割った値で求められる。ただし、この外力は、収束段階で常に生じるので表中の外力の項を全て足し込んで求めることになる。この例題では、反復計算は 1 回であることから、φ_2 は次式で与えられる。

$$\varphi_2 = \frac{\bar{M}_2}{2\sum k_i} = \frac{C}{2(1+1)} = \frac{C}{4} \qquad \cdots\cdots(16)$$

実際の回転角 θ_2 は、標準剛度による変数変換より、次式で与えられる。

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{K_0} = \frac{l}{2EI_b}\frac{C}{4} = \frac{Cl}{8EI_b} \qquad \cdots\cdots(17)$$

以上で、固定法による骨組の応力解析は終了である。たわみ角法より単純で理解し易いことが分かる。特に節点移動のない場合、未知回転角の数が多くなっても、十分に手計算で解析可能である。コンピュータのない昔では、長期荷重は固定法を使用し、短期荷重では D 値法を使用して実務の応力解析を行っていた。現在では、無論、コンピュータによるマトリックス法を用いている。

以下に固定法の特徴をまとめる。

R48：固定法の特徴

１：　曲げモーメントの釣合状態を表により、変位を介さず直接求める
２：モーメントの釣合状態は、節点の拘束と解放を順次繰り返すことで求める
３：たわみ角法のように釣合式が連立方程式にならず、手計算に適している
４：たわみ角法の仮定と同じで、部材軸方向の変位を無視している
５：DF:分割率といい、その節点における剛比の割合を表す

基礎１０１話 No.5　固定以外の境界 有効剛比

付 21 話参照
ex102_1

今回も固定法の説明の続きであり、固定支持以外の支持条件の与え方や、骨組と荷重の状態で、対称条件や逆対称条件が成立する場合に対する解析方法を学習する。これらの条件は、固定法では**有効剛比**という考え方で全て処理しており、非常に有効な方法である。ここでは、これらの基本的な考え方について述べ、各種の条件に対する有効剛比を導く。また、演習を通して、固定法の解析手順をより深く理解する。

境界条件が固定支持以外の場合について考察しよう。固定以外の境界条件として次の 3 種類が考えられる。

1. ピン支持； 2. 対称条件； 3. 逆対称条件

これら 3 種類の条件をどのように扱うのかについて、たわみ角法を応用して考える。

一端ピン支持部材を固定法では如何に扱うのか、説明しよう。ここでは、図 6 の骨組を例として用いる。この骨組は、十字型の形状をしており、4 つの部材が 1 つの節点で剛に接合し、他の節点では 1 本の部材（①部材はピン支持）を除いて、固定支持されている。さらに、接合節点 i には、モーメント荷重 $\bar{M}_i$ が加わっているものとする。

この骨組に関するたわみ角法の基本式は、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} M_{1i} &= 0; \quad M_{i1} = k_1(1.5\varphi_i) \\ M_{2i} &= k_2(\varphi_i); \quad M_{i2} = k_2(2\varphi_i) \\ M_{3i} &= k_3(\varphi_i); \quad M_{i3} = k_3(2\varphi_i) \\ M_{4i} &= k_4(\varphi_i); \quad M_{i4} = k_4(2\varphi_i) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(18)$$

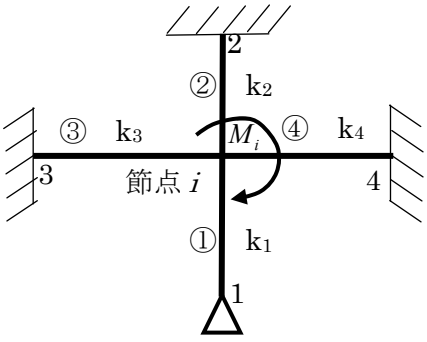


図 7　一端ピン支持部材を含む骨組
（ピン支持による有効剛比）

図 7 に示す構造物では、部材①は他端ピン支持であり、また節点 i に繋がる他の部材の他端は全て固定支持である。これらの部材では、骨組の形状から分かるように部材角は生じないし、また部材に中間荷重もない。

この骨組で、節点 i におけるモーメントの釣合は次式で与えられる。

$$M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + M_{i4} = \bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(19)$$

ここで、$\bar{M}_i$ は節点 i に加わるモーメント外力である。上式に、式(18)を代入すると、次式が得られる。

$$k_1(1.5\varphi_i) + k_2(2\varphi_i) + k_3(2\varphi_i) + k_4(2\varphi_i) = \bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(20)$$

ここで、一端ピン支持部材の剛比を $\bar{k}_1 = 3k_1/4$ とすると、節点 i の回転角 φ_i は次式となり、他の部材と同じ形式で表される。この剛比 $\bar{k}_1$ は有効

剛比と呼ばれる。

$$\varphi_i = \frac{\bar{M}_i}{2(\bar{k}_1 + k_2 + k_3 + k_4)} = \frac{\bar{M}_i}{2\sum k_m} \quad \cdots\cdots(21)$$

上式の右辺項の分母は、その節点に集まる部材の剛比の和を表し、ここでは、一端ピン部材の有効剛比も含まれる。

式(21)は、一端ピンのような特殊な部材を含んでいても、有効剛比の考え方を用いると、通常の方法で固定法が利用できることを示す。無論、一端ピンでは、到達モーメントはゼロとなる。

次に、対称境界や逆対称境界という特殊な境界も、有効剛比を利用することで通常の固定法で扱うことができることを示す。まず、対称境界の剛比について説明する。たわみ角法の基本式で対称条件は、$\varphi_i = -\varphi_j$ であることから、基本式は次式で表される。

$$M_{ij} = k(\varphi_i); \quad M_{ji} = -k(\varphi_i) \quad \cdots\cdots(22)$$

従って、有効剛比は $\bar{k} = k/2$ とすれば良い。

次に、逆対称について検討する。逆対称条件は、$\varphi_i = \varphi_j$ として与えられる。たわみ角法の基本式は、次式となり、

$$M_{ij} = k(3\varphi_i); \quad M_{ji} = k(3\varphi_i) \quad \cdots\cdots(23)$$

対称境界と同様に、有効剛比は $\bar{k} = 3k/2$ とすれば良いことになる。

以上をまとめると、有効剛比は次の表で与えられる。

R49：境界条件による有効剛比

部材の一端が次の状態であるとき、有効剛比を用いて分割率を計算する

	一端ピン	対称境界	逆対称境界
有効剛比	3k/4	k/2	3k/2

図 8 に示す例題を用いて有効剛比の使い方を学ぶ。

2）両端ピン支持の門型ラーメン+等分布荷重　　ex102_1

端部がピン支持された門型ラーメンの応力解析を、固定法を用いて行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を描く。ここでは、骨組は対称形状で対称荷重であるため、対称応力・対称変形となる。当然節点移動はない。

部材の剛比は、図 8 に示されているが、ここで、部材①と③は、支持端がピンであるため、一端ピンの有効剛比 $\bar{k}_1 = \bar{k}_3 = 3 \cdot 2/4 = 1.5$ を用いる。部材 2 における基本応力は次式で与えられる。後は次回お話しする。

$$C = \frac{Pl^2}{12} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 12}{12} = 120kNm$$
$$M_0 = \frac{Pl^2}{8} = 1.5C = 180kNm; \quad Q_0 = \frac{PL}{2} = 60kN \quad \cdots(24)$$

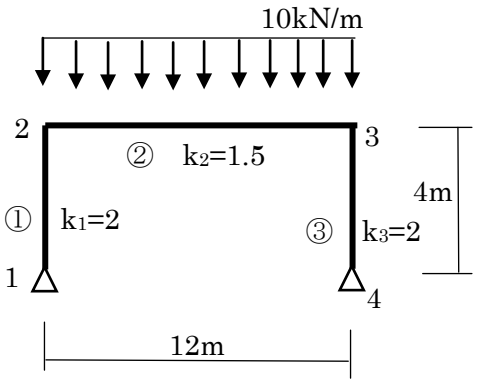


図 8 例題 1 のピン支持門型ラーメン

基礎１０２話 No.6　両端ピン支持門型ラーメン＋梁等分布荷重

付 21 話参照
ex102_1

今回も固定法の説明の続きであり、例題 1 の解析を行う。**ピン支持の有効剛比を用いた**分割率は、節点 2 と 3 で以下のように与えられる。

$$DF_c = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \quad : 柱の分割率$$
$$DF_b = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \quad : 梁の分割率 \qquad \cdots\cdots(25)$$

次に、表を用いて固定法を実行する。

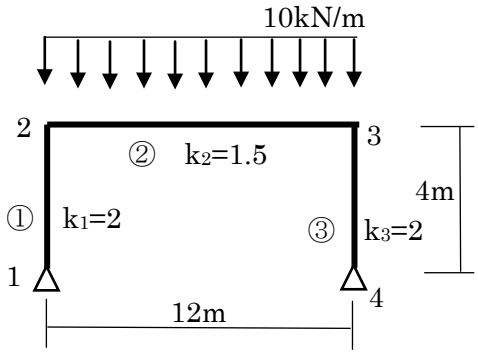


図 8 例題 1 のピン支持門型ラーメン

表 5 例題 1 骨組に対する固定法の表

	下柱	右梁	外力		左梁	下柱	外力
DF	0.5	0.5			0.5	0.5	
FEM		−120	120		120		−120
D1	60	60			−60	−60	
C1		−30	30		30		−30
D2	15	15			−15	−15	
C2		−7.5	7.5		7.5		−7.5
D3	3.8	3.8			−3.8	−3.8	
C3		−1.9	1.9		1.9		−1.9
D4	1	1			−1	−1	
計	79.8	−79.8			79.8	−79.8	

不釣合モーメントがある閾値以下になると反復をやめることになるが、真の解とは少しずれることになる。つまり、SPACE のような有限要素法の解と比較する場合、値が一致しないことになる。このことを良く覚えておこう。

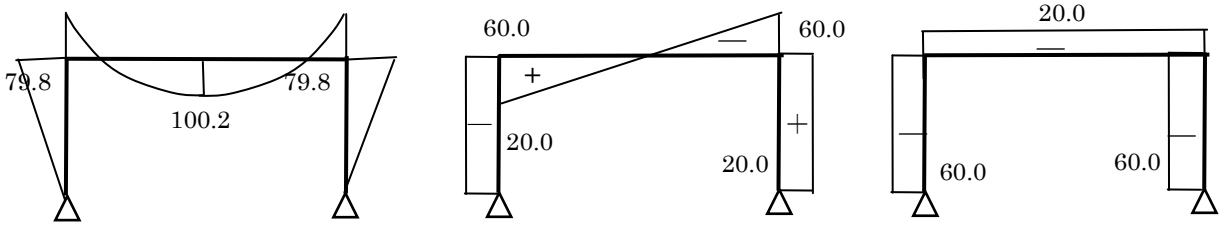
得られた材端モーメントと M_0 を用いると、部材②の梁中央の曲げモーメントは、

$$M_c = M_0 - (M_{32} - M_{23})/2 = 180 - (79.8 + 79.8)/2 = 100.2 \qquad \cdots\cdots(26)$$

となる。また、各部材のせん断力は、次のように求められる。

$${}_1Q = -{}_3Q = -(M_{21} - M_{12})/h = -79.8/4 = -20.0 \qquad \cdots\cdots(27)$$

なお、梁のせん断力は、基本応力状態と同一である。以上より、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を以下のように描く。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 9　両端ピン支持門型ラーメンの断面力図

2）両端ピン支持の門型ラーメン＋等分布荷重　対称条件を使用

ex102_1

次に、先の例題を対称条件、つまり対称の有効剛比を用いて、図 8 に示す門型ラーメンの半分を応力解析する。この解析モデルは例題 2 とし、曲げモーメント図とせん断力図を求める。

部材の剛比は、図 10 に示されているが、ここで、部材①と③は、支持端がピンであること、また、部材 2 を対称部材とすることで、次の有効剛比を用いて、骨組の半分を解析する。

$$\left.\begin{aligned}\bar{k}_1 &= \bar{k}_3 = \frac{3}{4}2 = 1.5\\ \bar{k}_2 &= 0.5k_2 = 0.5\cdot 1.5 = 0.75\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

部材②における基本応力を次のように求める。

$$\left.\begin{aligned}C &= \frac{Pl^2}{12} = \frac{10\cdot 12\cdot 12}{12} = 120kNm\\ M_0 &= \frac{Pl^2}{8} = 1.5C = 180kNm;\quad Q = \frac{Pl}{2} = 60kN\end{aligned}\right\}\cdots(29)$$

次に、分割率は、節点 2 で

$$\left.\begin{aligned}DF_c &= \frac{1.5}{1.5+0.75} = 0.667 \quad : \text{柱の分割率}\\ DF_b &= \frac{0.75}{1.5+0.75} = 0.333 \quad : \text{梁の分割率}\end{aligned}\right\}\cdots(30)$$

表を用いて、固定法を実行する。

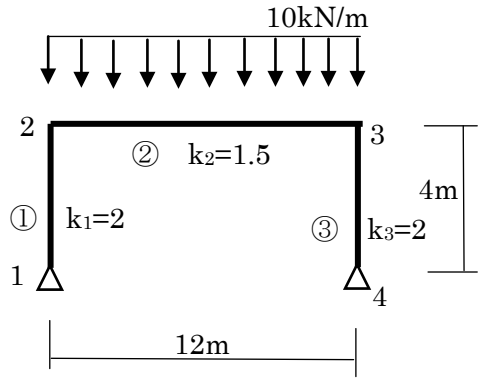


図 10　対称条件を用いた例題 2 の骨組

表 6　例題 2 骨組の固定法の表

	下柱	右梁	外力
DF	0.667	0.333	
FEM		−120	120
D1	80	40	
C1	0		0
D2			
C2			
D3			
C3			
D4			
計	80	−80	

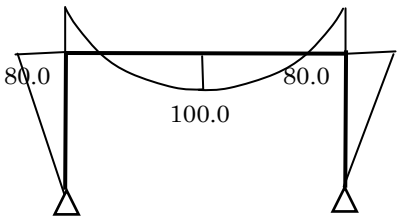


図 11　例題 2 骨組の曲げモーメント図

表中の材端モーメントを見れば分かるように、先の例題 1 の解析結果と同じ結果が得られている。例題 1 では、反復処理を途中で打ち切っているため、少しの誤差が生じているが、例題 2 では、対称条件を用いており、未知回転角は φ_2 ひとつである。そのため、反復処理を必要とせず、正解が得られている。次回からは少し複雑な骨組の解析を実施し、固定法の有利さを実感してみよう。

基礎１０３話 No.1　2 層両端固定支持骨組＋梁等分布荷重

付 22 話参照
ex84_1

これまで、節点移動のない場合について、固定法の解析手法の誘導と簡単なモデルを用いて演習を行ってきた。今回は、2 層 1 スパンのラーメン構造の解析を通して、固定法の解法を深く理解することにしよう。

3）2 層両端固定支持の骨組＋等分布荷重　　ex84_1

図 1 に示す課題 1 の 2 層骨組に等分布荷重が加わっている場合について応力解析を実行し、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を描く。この構造物は、対称形状で対称荷重であることから、変形・応力状態は対称であり、部材角も生じず、節点移動がない。従って、骨組の半分を応力解析する。ここでは、固定法の解析順序をしっかり理解しながら演習しよう。特に、固定法の表を使って、反復計算を実施してみよう。

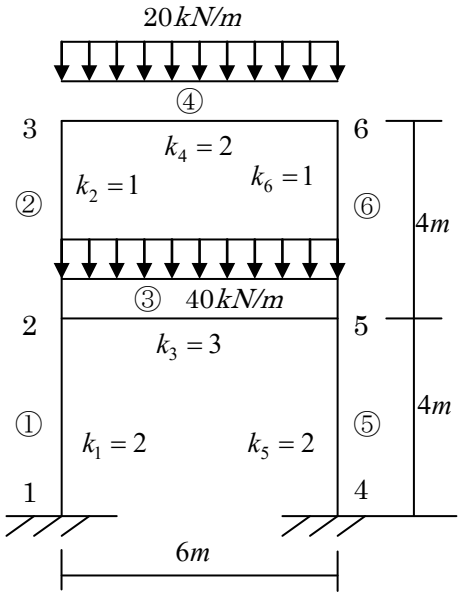


図 1 課題 1 の 2 層骨組

Ⅰ：基本応力の計算

最初に、部材③と④に加わる等分布荷重の基本応力を求める。

③部材

$$C=\frac{P_w l^2}{12}=\frac{40\times 6^2}{12}=120kNm;\quad M_0=\frac{P_w l^2}{8}=180tkNm;$$

$$Q=\frac{P_w l}{2}=120kN$$

④部材

$$C=\frac{20\times 6^2}{12}=60kNm;\quad M_0=\frac{20\times 6^2}{8}=90kNm$$

$$Q=\frac{20\times 6}{2}=60kN$$

Ⅱ：対称部材③と④の有効剛比を求める

$$\bar{k}_3=0.5\cdot k_3=1.5;\quad \bar{k}_4=0.5\cdot k_4=1.0$$

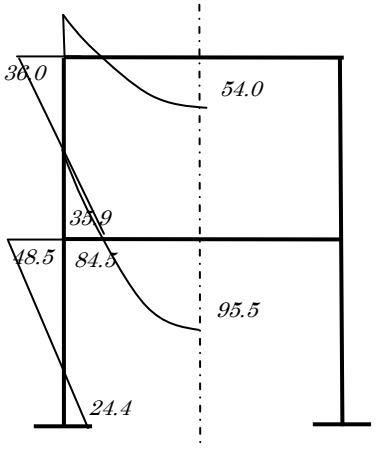
Ⅲ：節点 2 と 3 における分割率を計算

節点 2 での分割率

$$\begin{cases} DF_1=\dfrac{2}{2+1+1.5}=0.45 \\ DF_2=\dfrac{1}{2+1+1.5}=0.22 \\ DF_3=\dfrac{1.5}{2+1+1.5}=0.33 \end{cases}$$

節点 3 での分割率

$$\begin{cases} DF_2=\dfrac{1}{1+1}=0.5 \\ DF_4=\dfrac{1}{1+1}=0.5 \end{cases}$$



(a) 曲げモーメント図

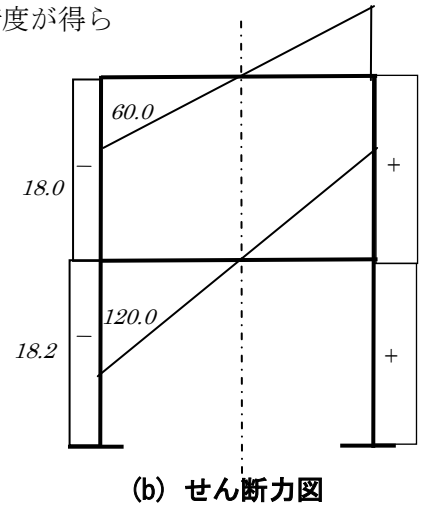
Ⅳ：表による反復計算

以上で、固定法を用いるための準備段階は終了である。次に、表を作成し、材端モーメントを求めるために反復計算を行う。節点移動のない場

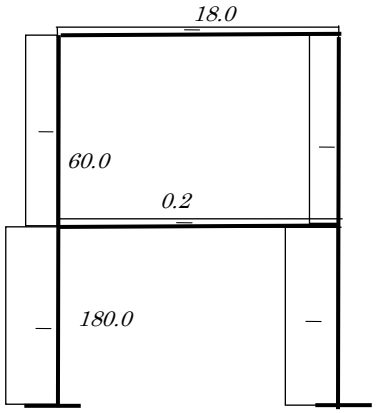
合、一般に反復回数は 4，5 回で収束する。収束の判定は不釣合モーメントが固定端モーメントの 1/100 以下となれば、2 桁程度の精度が得られ、反復計算を終了しても良いであろう。

表 1 課題 1 骨組の固定法の表

	下柱		右梁	外力
DF	0.5		0.5	
FEM			−60	60
D1	30		30	
C1	13.2			−13.2
D2	−6.6		−6.6	
C2	−1.7			1.7
D3	0.9		0.9	
C3	0.4			−0.4
D4	−0.2		−0.2	
計	36		−35.9	
	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.45	0.22	0.33	
FEM			−120	120
D1	54	26.4	39.6	
C1		15		−15
D2	−6.8	−3.3	−5	
C2		−3.3		3.3
D3	1.5	0.7	1.1	
C3		0.5		−0.5
D4	−0.2	−0.1	−0.2	
計	48.5	35.9	−84.5	
		上柱		
FEM				
C1		27		
C2		−3.4		
C3		0.8		
計		24.4		



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 2 課題 1 骨組の断面力図

V：部材断面力の計算

得られた材端モーメントから、部材荷重の加わっている部材③と④の梁中央の曲げモーメントを、以下のように求める。

$$M_{3C} = M_0 - \frac{1}{2}(M_{52} - M_{25}) = 180.0 - \frac{1}{2}(84.5 + 84.5) = 95.5kNm$$

$$M_{4C} = 90.0 - \frac{1}{2}(36.0 + 36.0) = 54.0kNm$$

以上をまとめて、曲げモーメント図を描くと図 2(a)となり、せん断力図、軸力図も同様に同図(b)と(c)のようになる。

図 2 を利用して反力を求め、図 3 に示す。同図より、上下方向と水平方向の力の釣合がとれていることは容易に理解できる。また節点 1 での外力と反力によるモーメントは

$$M_1 = 20 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} + 40 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 24.4 + 24.4 - 180 \times 6$$

$$= 360 + 720 - 1080 \rightarrow 0$$

となり、これも釣合が得られている。

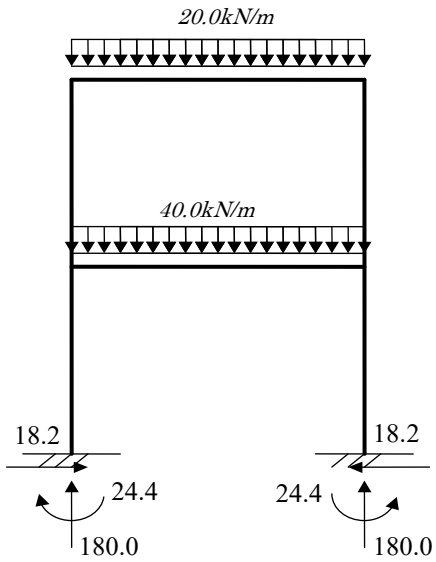


図 3 課題 1 の反力と外力の釣合

基礎１０４話 No.2　外力と層せん断力の不釣合仮想支持点

付 22 話参照
ex104_1;ex104_2

4）両端ピン支持の骨組＋等分布荷重　　ex104_1

今回は図 4 の骨組を応力解析し、固定法の解法をさらに深く理解することにしよう。図中の柱の剛比が左右対称でない門型ラーメンの応力解析を、次の順序で固定法により実行し、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を描く。

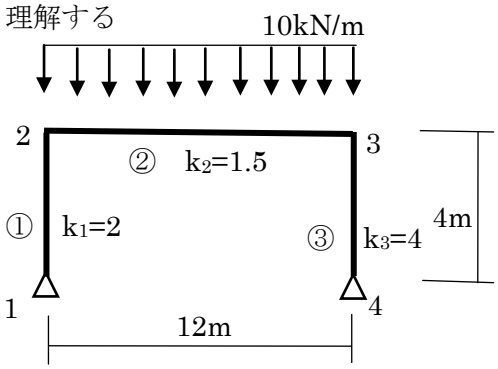


図 4 課題 2 のピン支持門型ラーメン

Ⅰ：基本応力の計算

$$C=\frac{Pl^2}{12}=\frac{10\cdot 12\cdot 12}{12}=120kNm;$$

$$M_0=\frac{Pl^2}{8}=1.5C=180kNm;\quad Q_0=\frac{Pl}{2}=60kN$$

Ⅱ：ピン支持を有する部材①と③の有効剛比を求める

$$\bar{k}_1=\frac{3}{4}2=1.5;\quad \bar{k}_3=\frac{3}{4}4=3.0$$

Ⅲ：節点 2 と 3 における分割率を計算

節点 2 における分割率：

$$DF_c=\frac{1.5}{1.5+1.5}=0.5;\quad DF_b=\frac{1.5}{1.5+1.5}=0.5$$

同様に、節点 3 での分割率：

$$DF_c=\frac{3.0}{1.5+3.0}=0.667;\quad DF_b=\frac{1.5}{1.5+3.0}=0.333$$

Ⅳ：表による反復計算

以上で、固定法を用いるための準備段階は終了である。次に、材端モーメントを求めるために反復計算を行う。まず、以下の表を作成し、材端モーメントを求めるための反復計算を行う。

Ⅴ：部材断面力の計算

表 2 課題 2 骨組の固定法の表

	下柱	右梁	外力		左梁	下柱	外力
DF	0.5	0.5			0.333	0.667	
FEM		−120	120		120		−120
D1	60	60			−40	−80	
C1		−20	20		30		−30
D2	10	10			−10	−20	
C2		−5	5		5		−5
D3	2.5	2.5			−1.7	−3.3	
C3		−0.9	0.9		1.3		−1.3
D4	0.5	0.5			−0.4	−0.9	
計	73	−72.9			104.2	−104.2	

梁中央の曲げモーメントは、図 5 を参考にすると、

$$M_c = M_0 - (M_{32} - M_{23})/2 = 180 - (104.2 + 72.9)/2 = 91.4kNm$$

また、各部材のせん断力は次のように求められる。まず、両柱のせん断力は次式で与えられる。

$$Q_1 = -(M_{21} + M_{12})/h = -73.0/4 = -18.23kN$$
$$Q_3 = 104.3/4 = 26.06kN$$

部材に中間荷重が加わっている梁は、右図のように基本応力と解析結果の曲げモーメントの和で表される。そのため、せん断力は、基本応力のせん断力に図中の曲げモーメントから得られるせん断力を加えれば良い。従って、梁のせん断力は、図 6 より、

$$Q_{2L} = Q_0 - (\bar{M}_{32} + \bar{M}_{23})/l = 60 - (-15.8 + 47.0)/12 = 57.4kN$$
$$Q_{2R} = -60 - (-16.0 + 47.0)/12 = -62.6kN$$

となる。また、柱の軸力は、せん断力との節点での力の釣合より求められる。なお、梁の軸力は後で検討する。

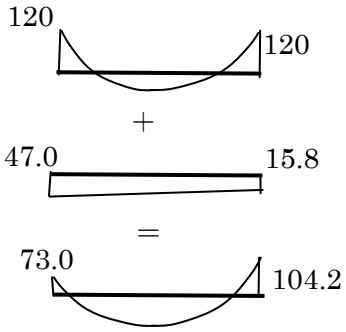


図 5 梁の曲げモーメント

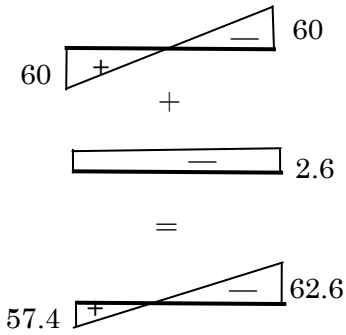
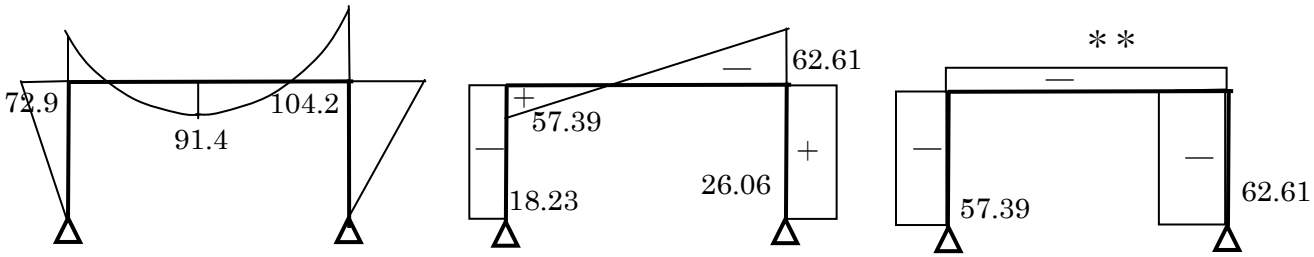


図 6 梁のせん断力

Ⅵ：各断面力図を描く

求めた各断面力より、下の断面力図を描く。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 7 課題 2 骨組の断面力図

Ⅶ：解析結果の検証

次に柱頭で切断し、柱のせん断力と水平外力との力の釣合について検討しよう。図 8 に見られるように、水平外力がゼロにもかかわらず、左右の柱におけるせん断力の和がゼロとはならず、応力解析で得た応力状態では、水平方向の力の釣合がとれていない。これは如何なることか、図 9 を参考にして考えてほしい。この原因については、次回以降でお話しする。

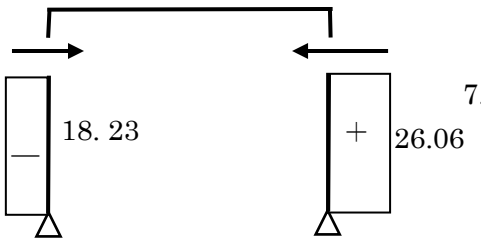
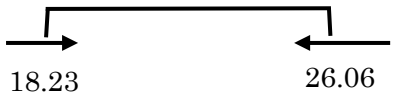
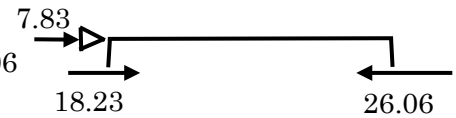


図 8 水平方向の力の釣合を考える



(a) 水平方向の力の釣合が得られていない



(b) 仮想支持点の反力で釣合う

図 9 仮想支持点を考慮

基礎１０５話 No.1　節点移動の解析
部材角強制変位による固定端モーメント

付 23 話参照
ex106_1

基礎 99 話で固定法の考え方について解説した。そこでは、節点モーメントの釣合は得られるが、層モーメントの釣合が得られていない。つまり、得られた断面力分布は、節点移動のない骨組では適切であるが、節点が移動する骨組では、柱頭に水平方向仮想支持点が設置された状態に相当し、その支持点に反力が生じる。

横移動が生じる場合、適切な断面力分布を得るためには、層モーメントの釣合を得る操作が必要となる。ここでは、層モーメントの釣合をとる方法の一つを紹介する。

今回から節点移動がある場合について、お話しする。整形骨組であっても水平荷重や骨組が対称形状でない場合、荷重を受けると骨組は横移動し、柱に部材角を生じる。これを**スウェイ(sway)**という。その際、これまで学んだ固定法では、層せん断力が外力と釣合わず、結局、応力解析が適切でなかったことになる。今回からは柱に部材角が生じる場合、固定法では如何なる方法で対処するか、練習問題を通して学ぶことにしょう。まずは、解析手法の誘導を行う。

図 1 に示す骨組を用いて、柱に部材角が生じる場合の固定法の扱い方について説明する。まず、図 2 のように強制的に柱に部材角を生じさせ、そのとき骨組内に発生する応力を基本応力とする。この強制的に部材角を発生させるとき、他の変位である節点の回転角や他の層の部材角は拘束した状態、つまりゼロとする。このような状態で強制変位を与えると部材角を生じる部材にのみ応力が発生する。

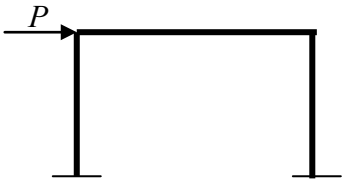


図 1 部材角が生じる骨組

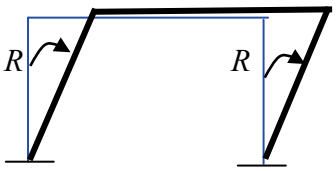


図 2 柱に強制的に部材角を生じさせる

強制的に部材角 R が与えられた部材の材端モーメントは、たわみ角法の基本式より、次式で与えられる。

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(-3R);\quad M_{ji}=\frac{2EI}{l}(-3R) \qquad \cdots\cdots(1)$$

部材角 R が生じると、その部材には、図 3 に示す断面力が発生する。当然、その部材に生じるせん断力は次式となる。

$$Q=-(M_{ij}+M_{ji})/l \qquad \cdots\cdots(2)$$

式(1)を、標準剛度 $K_0=2EI_0/l_0$ を用いて、たわみ角法の基本式を変換する。つまり、剛比 k を用いて基本式を表すと、

$$M_{ij}=k(\psi);\quad M_{ji}=k(\psi) \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。強制変位の大きさは任意で良いが、ここでは、部材角 ψ の値を次式とする。

$$\psi=-100X_1 \qquad \cdots\cdots(4)$$

部材角 ψ の値を負の値としたのは、実際の部材角 R を正の値とするためである。また、100 は適当な値であるが、これは固定法を使用するために表の中で扱い易い数字とするためである。この強制変位である部材角を与えると、柱の両端に生じる材端モーメントは、式(3)より次式となる。

$$M_{ij}=-100\cdot k\cdot X_1;\quad M_{ji}=-100\cdot k\cdot X_1 \qquad \cdots\cdots(5)$$

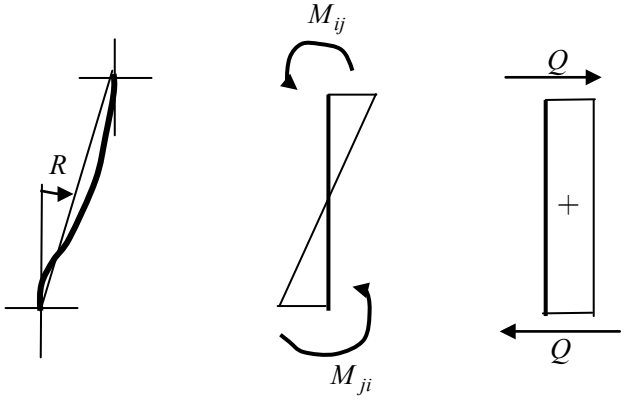


図 3 部材角によって生じる断面力

部材角 X_1 は未定係数であり、後で層せん断力の釣合から決定する。基本応力では材端モーメントは $X_1=1$ として計算すれば良い。

基本応力が決定したところで、次にこの基本応力に対して固定法を適用し、節点でのモーメントの釣合を満たすモーメント分布を求める。この応力分布から、層せん断力と水平外力との釣合式を求め、未定係数を決定する。未定係数が決定すれば、固定法で求めた応力状態に、この未定係数を掛けた状態が実際の断面力分布となる。多少複雑な手続きを踏んで、節点移動がある場合の解析を行う必要があるが、慣れるに従って理解が進むことになる。例題を通して、これらの手続きを学ぶことにしよう。

層数 n の整形骨組では、水平方向自由度は層数と同じ n である。線形代数によれば、自由度 n の空間内の位置ベクトルは、n 個の基底ベクトルが必要となり、その基底に係数がかかった項の線形和で表される。

従って、各層の水平変位を正確に表すためには、基底ベクトルとして、層毎に部材角を強制的に変位させた材端モーメント分布が必要となり、固定法の表を使って求める。最後に各層でそれらの線形和と外力との釣合より、係数の値を求める。これが、節点移動のある場合の解析法の基本的な考え方である。

1）両端固定支持の門型ラーメン＋柱頭水平荷重　　ex106_1

ここでは、図 4 の例題 1 を用いて節点移動がある場合に対する固定法の解析手続きを学ぶ。水平荷重を受ける固定支持された門型ラーメンの応力解析を固定法で行い、曲げモーメント図、せん断力図、及び軸力図を描く。部材の剛比は図 4 に示されているが、対称形状で逆対称荷重であることから、逆対称変形並びに逆対称応力となる。以下の手順に従って、解析を進めることにしよう。

Ⅰ：逆対称条件による部材②の有効剛比を求める

$$\bar{k}_2 = 1.5 \cdot k_2 = 1.5 \qquad \cdots\cdots(6)$$

Ⅱ：節点 2 における分割率を計算する

節点 2 における分割率は、梁の有効剛比を用いて、

$$\left.\begin{aligned} DF_c &= \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \quad : \text{柱の分割率} \\ DF_b &= \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \quad : \text{梁の分割率} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7)$$

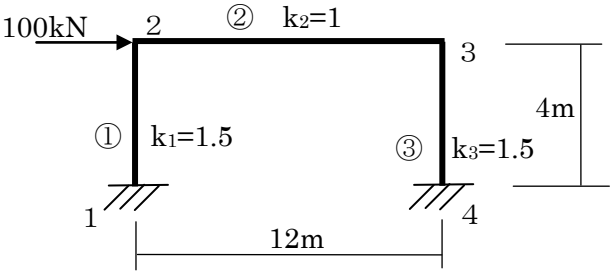


図 4 例題 1 両端固定支持の骨組

Ⅲ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたとき、柱に生じる固定端モーメントを計算する

部材角による材端モーメントは、$\psi = -100X_1$ とすると、

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= -100 \cdot k = -150 \\ M_{21} &= -100 \cdot k = -150 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

となる。ただし、ここでは、$X_1=1$ としている。

後は、表形式で固定法を適用し、柱に強制変位を与えたときに生じる骨組の材端モーメントを求める。この材端モーメントより柱に生じるせん断力を求め、さらに柱頭を切断し、上部を囲む閉曲線内で、水平方向釣合を考える。つまり、水平外力と釣合う柱のせん断力を求めるわけである。これらの解析手順は次回お話しする。

基礎１０６話 No.2　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重

付 23 話参照
ex106_1

今回も、節点移動がある場合に関する解析手法の続きをお話しする。

Ⅳ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

以下に、表形式で固定法を適用する。

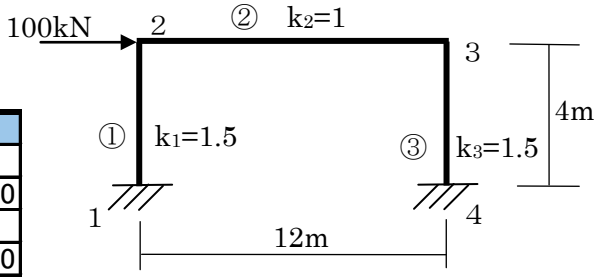


図 4 例題 1 両端固定支持門型ラーメン

表 1　例題 1 の固定法の表

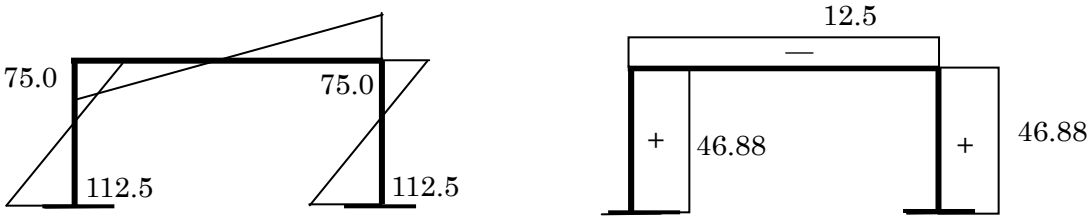
	下柱		右梁	外力
DF	0.5		0.5	
FEM	−150			150
D1	75		75	
C1	0			0
D2				
C2				
D3				
C3				
D4				
計	−75		75	

		上柱
FEM		−150
C1		37.5
C2		
C3		
計		−112.5

上の表では、未知数が回転角 φ_2 のみであることから、一回の反復計算で解が求められていることに注意しよう。

Ⅴ：求めた材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

上の表で得られた材端モーメントを用いて、応力状態が逆対称であることに注意して、次のように曲げモーメント図とせん断力図を描く。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 5 強制変位による曲げモーメントとせん断力

Ⅵ：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 の値を求める

上の応力は、$\psi = -100X_1$ として求めたものであり、この未定パラメータ X_1 を層せん断力と外力との釣合から求める。図 6 は、柱頭におけるせん断力と外力の釣合を表す。

層せん断力と外力の釣合は、図 6 を参考にすると、次式で与えられ、X_1 を求めると

$$100 = (46.88 + 46.88) \cdot X_1 \rightarrow X_1 = 1.0666 \quad \cdots\cdots(9)$$

として、未定係数 X_1 の値が得られる。

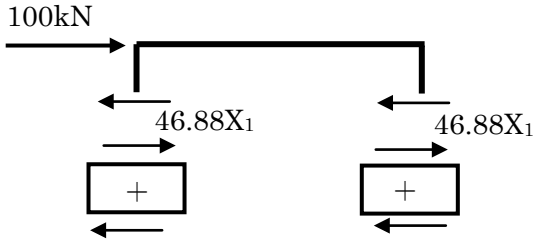
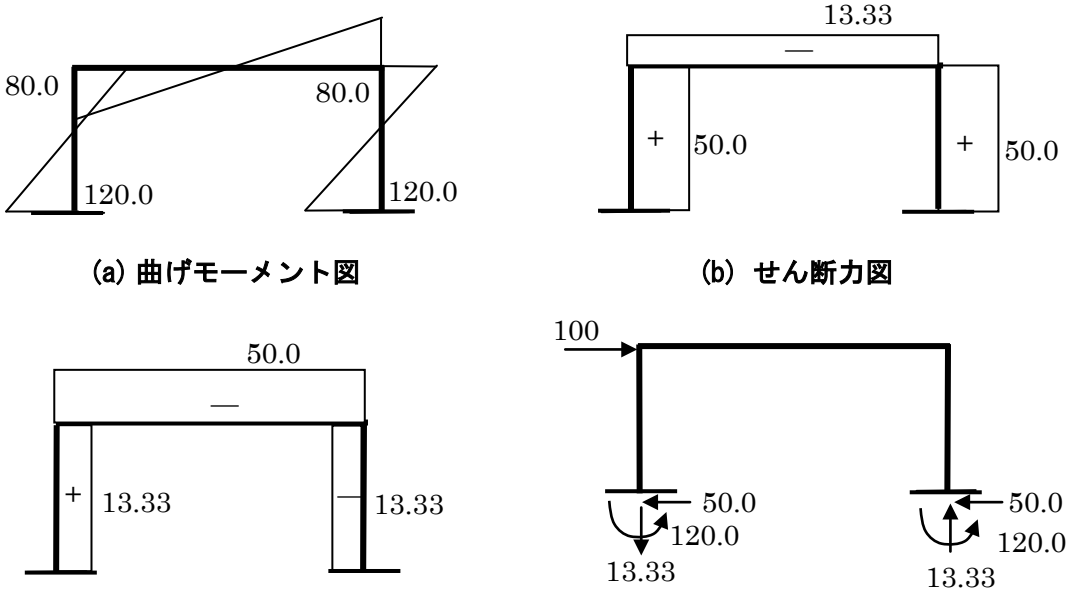


図 6 柱頭におけるせん断力と外力の釣合

Ⅶ：求めた未定定数を、強制変位を与えて求めた断面力図に掛け、修正した断面力図を求める

X_1 の値を、図 5 の強制変位を加えて求めた断面力図に掛けると、図 7 に示す結果が得られる。



(a) 曲げモーメント図　　**(b) せん断力図**

(c) 軸力図　　**(d) 反力・外力図**

図 7 例題 1 骨組の断面力図

上下方向と水平方向の力の釣合は、上図右より理解できる。モーメントの釣合は、節点 1 に関するモーメントが次のように計算され、

$$M_1 = 100 \cdot 4 - 120.0 - 120.0 - 13.33 \cdot 12 \rightarrow 0.04 \quad \cdots\cdots(10)$$

釣合が満たされている。ただし、上の小さな値は四捨五入による打切り誤差によるものである。

以上が、節点移動がある場合の解析手順である。さらに、次回、その手法を詳細に学んでいこう。

基礎１０７話 No.3　一端ピン・他端固定の場合 固定端モーメント

付 23 話参照
ex104_1

前回では、骨組に節点移動が生じて、柱に部材角が発生する場合に関する固定法の解析手順について学んだ。今回は例題を通して、柱に水平方向の部材荷重がある場合の解析方法を、より深く学ぶ。ここではまず、一端がピン支持の柱に強制変位である部材角を加えた場合、応力状態がどのようになるかを検討しておこう。

一端がピンで他端が固定の柱に、強制的に部材角を与えた場合、材端モーメントは、たわみ角法の基本式より、次式で与えられる。

$$M_{ij}=0;\quad M_{ji}=k(0.5\psi) \qquad \cdots\cdots(11)$$

先に示したように部材角ψの値を次式とすると、

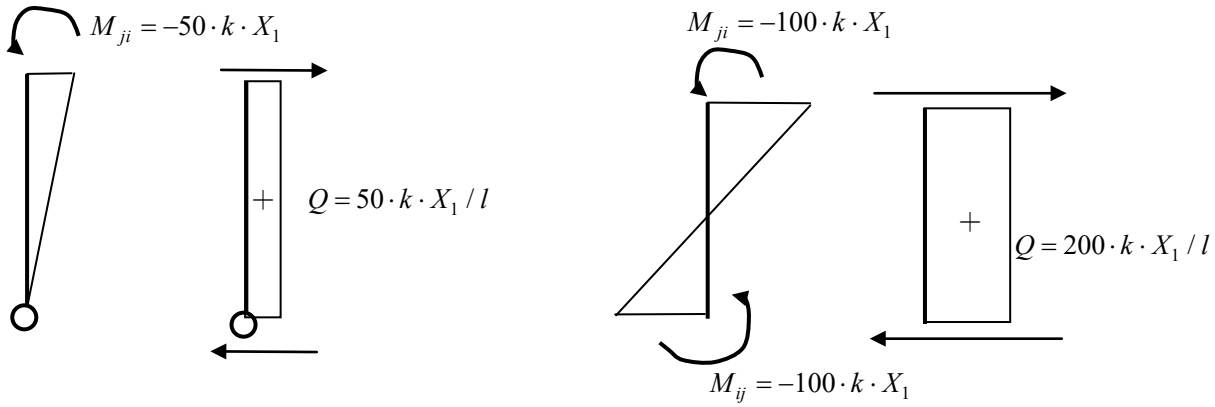
$$\psi=-100X_1 \qquad \cdots\cdots(12)$$

柱の両端に生じる材端モーメントは、式(11)より次式となる。

$$M_{ij}=0;\quad M_{ji}=-50\cdot k\cdot X_1 \qquad \cdots\cdots(13)$$

部材角X_1は未定係数であり、後で層せん断力の釣合から決定することになる。ここでも、材端モーメントは$X_1=1$として計算されている。また、式(13)の剛比は、式の誘導過程から理解できるように、一端ピンとなる部材の有効剛比ではなく、実際の剛比を使用する。このことを混乱しないよう注意されたい。

強制的に部材角を加えた場合、一端ピン支持の柱に生じる応力は、図8(a)のようである。同図(b)の両端固定の場合と比較して覚えよう。



(a) 一端ピン支持の場合　　(b) 両端剛接合の場合

図 8　部材角によって生じる応力

次に基礎 104 話でお話しした課題 2 の門型骨組であるが、節点移動の

ない場合の解析結果では層せん断力と外力に不釣合力が生じた。これを解消すべく、ここでは節点移動がある場合の手法を用いて正確な断面力図を求める。

2）両端ピン支持の門型ラーメン＋等分布荷重　　ex104_1

図 9 の課題 2 において、既に部材荷重に対する応力解析を、固定法を用いて実行した。ここでは、その結果を再度図 10 に示す。次に、柱頭で切断し、柱のせん断力と水平外力との力の釣合について検討しよう。図 10(b)に見られるように、外力がゼロにもかかわらず、左右の柱におけるせん断力の和はゼロにならず、求めた応力状態では、水平方向の力の釣合がとれていない。つまり、節点移動を打ち消すために、節点 3 には**仮想支持点**が存在し、その反力によって釣合が得られていたことになる。実際の支持点と仮想支持点の反力が図 11 示されており、この骨組に加わる外力と反力が釣合っていることになる。

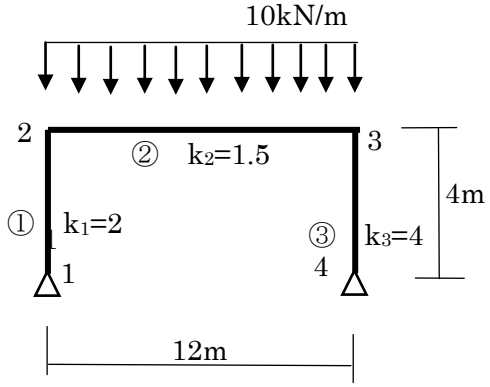
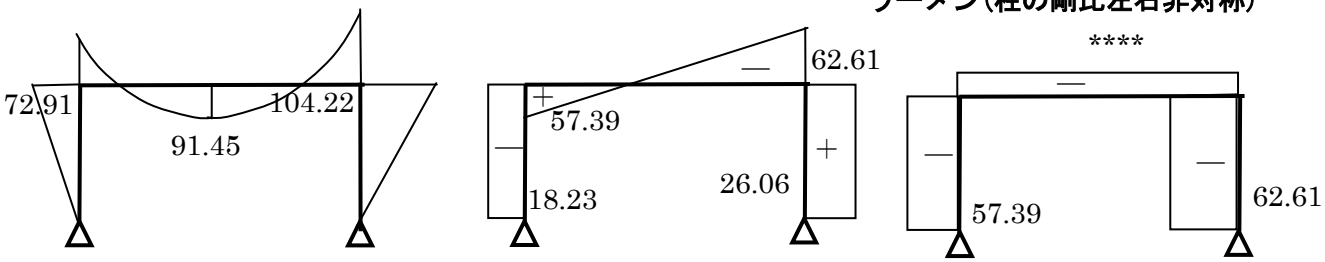


図 9　課題 2 両端ピン支持の門型ラーメン(柱の剛比左右非対称)



(a)　曲げモーメント図　　**(b)　せん断力図**　　**(c)　軸力図**

図 10　課題 2 骨組の断面力図

以上の分析から分かるように、この仮想支持点を取ってしまうと、骨組は左のほうに傾くことになる。このスウェイは、図 12 に示す外力を加えて骨組の応力状態より求める。つまり、節点移動のある場合の解析を行い、層せん断力の釣合を満たす結果を求めることになる。

ここでも、有効剛比や分割率は節点移動のない場合と同じである。

Ⅰ：部材角の強制変位による基本応力の計算

強制変位である部材角を次式で与える。

$$\psi = -100X_1 \qquad \cdots\cdots(14)$$

柱に強制的に部材角を与えると、部材①と③には、次に示す基本応力が発生する。ただし、ここでは X_1 は 1 とする。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= 0; \quad M_{21} = -50 \cdot k_1 \cdot X_1 = -100 \\ M_{43} &= 0; \quad M_{34} = -50 \cdot k_3 \cdot X_1 = -200 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(15)$$

Ⅱ：ピン支持を有する部材①と③の有効剛比を求める

$$\bar{k}_1 = \frac{3}{4}2 = 1.5; \quad \bar{k}_3 = \frac{3}{4}4 = 3.0 \qquad \cdots\cdots(16)$$

以降の解析は次回に行う。

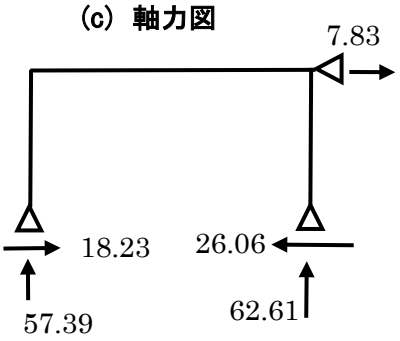


図 11 反力図

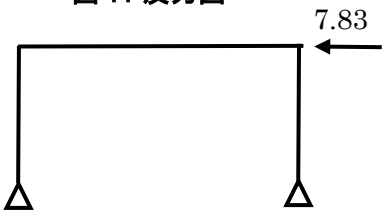


図 12 不釣合力を解除するための水平力

基礎１０８話 No.4　非対称剛性の両端ピン支持門型ラーメン＋梁等分布荷重

付 23 話参照
ex104_1

前回に続いて、課題 2 の応力解析を行う。先に求めた有効剛比を用いて、節点 2 と 3 における分割率を求める。

Ⅲ：節点 2 と 3 における分割率を計算する

節点 2 における分割率

$$DF_c = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5; \quad DF_b = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \qquad \cdots\cdots(17)$$

同様に、節点 3 での分割率

$$DF_c = \frac{3.0}{1.5+3.0} = 0.667; \quad DF_b = \frac{1.5}{1.5+3.0} = 0.333 \qquad \cdots\cdots(18)$$

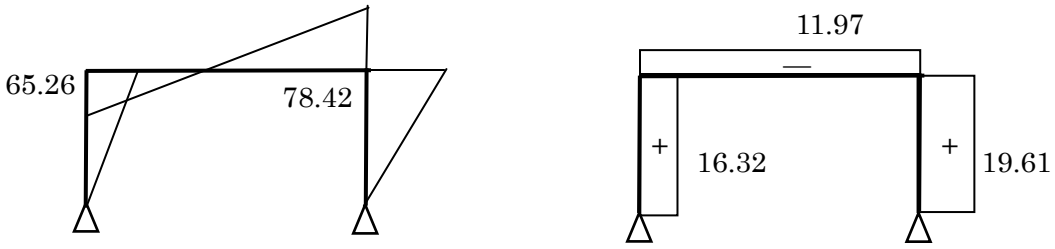
Ⅳ：柱に強制変位を与え、骨組全体で釣合う材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

表 2 課題 2 骨組の固定法の表

	下柱	右梁	外力		左梁	下柱	外力
DF	0.5	0.5			0.333	0.667	
FEM	−100	0	100		0	−200	200
D1	50	50			66.6	133.4	
C1		33.3	−33.3		25		−25
D2	−16.65	−16.65			−8.325	−16.675	
C2		−4.163	4.163		−8.325		8.325
D3	2.082	2.082			2.772	5.553	
C3		1.386	−1.386		1.041		−1.041
D4	−0.693	−0.693			−0.347	−0.694	
計	−65.261	65.262			78.416	−78.416	

Ⅴ：求めた材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

上の表を元に、曲げモーメントとせん断力を図示する。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 13 不釣合力を解除するための水平力による断面力図

次に、柱頭における層せん断力と外力との釣合を考える。図 14 を参考にすると、層方程式は以下のようになり、

$$\left.\begin{aligned} &-7.83-(16.32+19.61)X_1=0 \rightarrow \\ &X_1=-7.83/35.93=-0.2179 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(19)$$

結果、解 X_1 が得られる。

求めた X_1 を図 13 の断面力図に掛けると以下の応力状態が得られる。

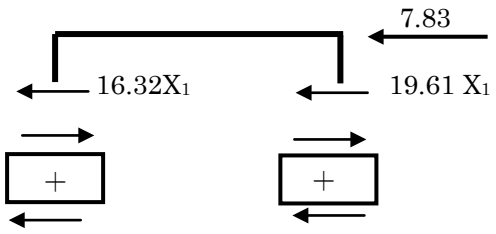
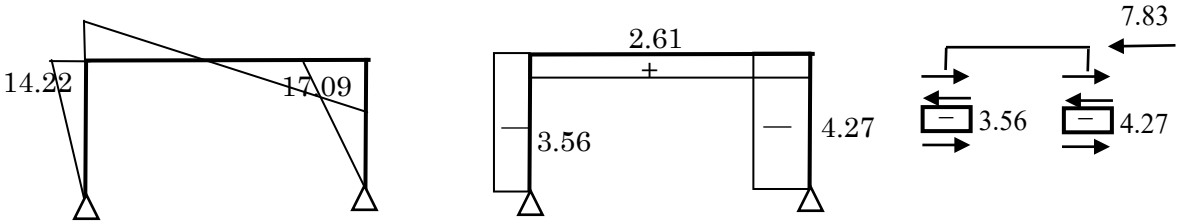


図 14 柱頭でのせん断力と外力の釣合

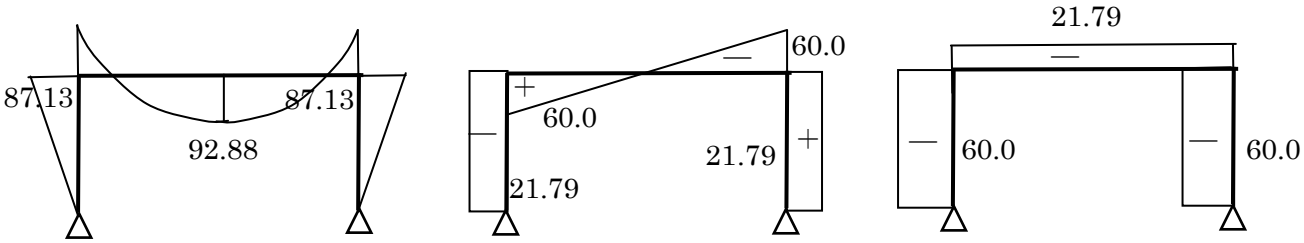


(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 柱頭での釣合

図 15 水平方向不釣合力に対する断面力分布

図 15(c)に見られるように、骨組の層せん断力と外力が釣合っていることが分かる。

実際の応力状態は、図 13 と図 15 の応力状態を重ね合わせることで得られる。従って、図 15(c)の外力と仮想支持点の反力が釣合って消去される。実際の断面力分布は以下のようになる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 16 課題 2 の骨組の断面力図

柱の部材角は、$\psi=-100X_1$ で与えられていた。ここで、求めた X_1 を代入すると、部材角が得られる。

$$\psi=-100X_1=21.79 \qquad \cdots\cdots(20)$$

この部材角を用いて、柱頭の水平変位を求めてみよう。標準剛度を K_0 とすると、次式で与えられる。このように、鉛直荷重のみであっても、骨組が対称でないと、柱の曲げ剛性が小さい方にスウェイすることになる。

$$\delta=Rh=-h\cdot\psi/3K_0=-400\cdot100\cdot21.79/3K_0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

ここでは特に単位には気を付ける。水平変位 δ が *cm* の単位であれば、右辺も同じでなければならない。ψ はモーメントの単位を持ち、式(20)では *kNm* の単位であった。式(21)では、*kNcm* の単位に変換する。無論、h は *cm* で、K_0 は *kNcm* でなければならない。

基礎１０９話 No.5　両端ピン支持門型ラーメン＋柱部材荷重

付 23 話参照
ex106_2

今回は、節点移動のある場合で、しかも、柱に部材荷重が加わる場合について、どのように扱うか、図 17 の例題 2 を用いてお話しする。

3) 両端ピン支持の門型ラーメン＋同水平方向柱部材荷重　ex106_2

図 17 に示すピン支持で、両柱に同方向の水平部材集中荷重が加わる門型ラーメンの応力解析を行う。この門型骨組は対称形状であり、また荷重は逆対称である。従って、変形や曲げモーメントは逆対称となる。以下に、固定法の解析順序に従って、応力解析を行う。

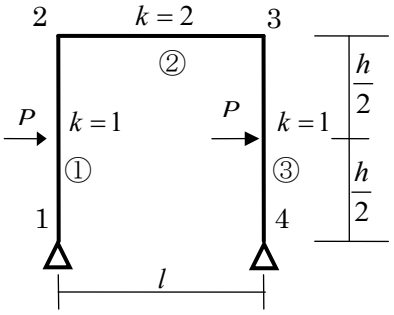


図 17 例題 2 柱に部材荷重が加わる骨組

Ⅰ：部材荷重のある部材の基本応力を求める

まず、荷重が加わっている部材①と③に関する基本応力を次のように求める。この部材は一端ピン支持であることに注意しよう。

$$\left.\begin{aligned} &C_{12}=C_{43}=0;\quad C_{21}=C_{34}=C+0.5C=1.5C\\ &C=\frac{Ph}{8};\quad M_0=2C\\ &Q_{12}=\frac{P}{2}-\frac{1.5C}{h}=\frac{P}{2}-\frac{1.5}{h}\cdot\frac{Ph}{8}=\frac{5P}{16}=Q_{43}\\ &Q_{21}=Q_{34}=-(\frac{P}{2}+\frac{1.5C}{h})=-\frac{11}{16}P=-\frac{11C}{2h} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

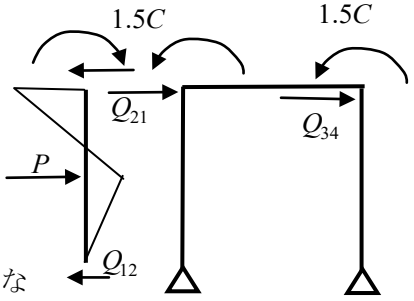


図 18 中間荷重による節点水平荷重

Ⅱ：部材の有効剛比を求める

部材①と③は一端ピン支持の有効剛比を、また変形と応力が逆対称となることから、部材②は逆対称部材としての有効剛比を求める。

$$\bar{k}_1=\bar{k}_3=0.75k_1=0.75;\quad \bar{k}_2=1.5k_2=3.0 \qquad \cdots\cdots(24)$$

Ⅲ：節点 2 での分割率を求める

上の有効剛比を用いると、節点 2 における分割率は次式となる

$$\left.\begin{aligned} &DF_c=0.75/(0.75+3.0)=0.2\\ &DF_b=3.0/(0.75+3.0)=0.8 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(25)$$

Ⅳ：柱の部材荷重に対する応力解析を固定法の表で行う

まず、柱の固定端モーメントに対する応力解析を、固定法の表を用いて行う。ただし、C を 100 として計算する。表 3 のように、未知変数が節点 2 の φ_2 一つであるため、反復計算を行う必要がなく、一回の解放で終了する。

表 3 例題 2 骨組の固定法の表

	下柱	右梁	外力
DF	0.2	0.8	
FEM	150	0	−150
D1	−30	−120	
C1	0		0
D2			
C2			
D3			
C3			
D4			
計	120	−120	

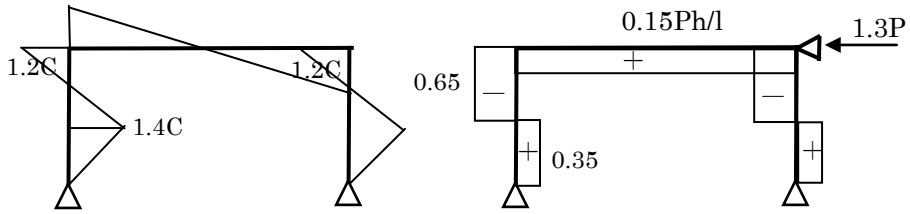
Ⅴ：得られた材端モーメントから、部材の断面力を求める

得られた材端モーメントから、柱中央部の曲げモーメントは、

$$M_c=2C-0.5\cdot1.2C=1.4C \qquad \cdots\cdots(26)$$

Ⅵ：各断面力図を描く

以上の結果より、曲げモーメント図とせん断力図を以下に示す。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 19 固定端モーメントによる応力

Ⅶ：層せん断力と外力との釣合

柱頭節点への水平外力はゼロにもかかわらず、柱には層せん断力が生じており、水平方向の力の釣合がとれていない。そのため、図のような仮想支持点に反力が生じる。以前にも述べたが、**骨組がスウェイする場合、節点移動のない解析を行うと自動的に節点に仮想支持点が設けられ、反力が生じる。**つまり、このような状態で解析を行ったことに相当する。そのため、この反力を解除しなければならない。

Ⅷ：部材角による基本応力の計算

この反力を消去するために、強制変位である部材角

$$\psi = -100X_1 \qquad \cdots\cdots(27)$$

を与え、その際の断面力分布を求める。強制変位を与えると部材①と③には、次に示す基本応力が発生する。ただし、ここでは X_1 は 1 とする。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= 0; \quad M_{21} = -50 \cdot k_1 \cdot X_1 = -50 \\ M_{43} &= 0; \quad M_{34} = -50 \cdot k_3 \cdot X_1 = -50 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(28)$$

上の基本応力を用いて、固定法の表で応力解析を行う。

Ⅸ：有効剛比と分割率を計算

部材②の逆対称の有効剛比と部材①と③の一端ピン支持部材の有効剛比はⅡで求めた値と同じ、また、これらの有効剛比を用いて、節点 2 での分割率もⅢで求めた値である。ここでは省略する。

Ⅹ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

表 4 のように、節点 2 での分割率、FEM(固定端モーメント)を記入する。節点に繋がる部材の固定端モーメントの総和が、モーメントの釣合が取れていればゼロとなるが、ここでは釣合が得られず、50 となっている。その不釣合モーメントを消去するために、符号を反転して外力とする。後は不釣合モーメントが閾値より小さくなるまで反復計算を繰り返す。ただし、ここでは未知変数が一つであるため、反復は一回で終了する。以後の解析は次回お話しする。

表 4 例題 2 骨組の固定法の表その 2

	下柱	右梁	外力
DF	0.2	0.8	
FEM	−50	0	50
D1	10	40	
C1	0		0
D2			
C2			
D3			
C3			
D4			
計	−40	40	

基礎１１０話 No.6　前回課題の続き 対称骨組の半解析モデル

付 23 話参照
ex106_2

前回に続いて、図 17 の例題 2 の解析過程を通して、節点移動があり、しかも柱に部材荷重が加わる場合の解析手順について学ぶ。

XI：材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

柱に強制変位を与えた場合の解析結果を用いて、応力状態を以下に図示する。ただし固定端モーメント C を 100 として考慮する。

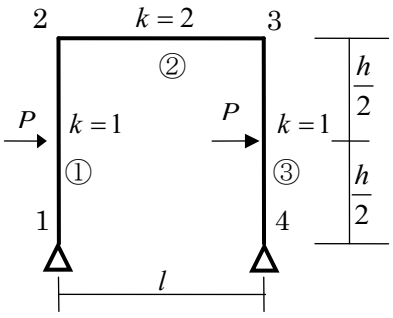
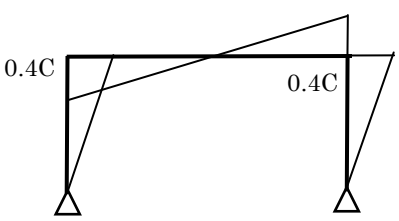
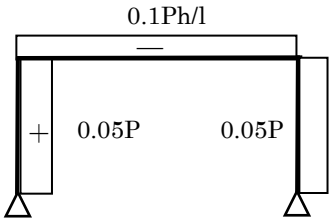


図 17 例題 2 柱に部材荷重が加わる骨組



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 20　強制変位による応力

XII：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 の値を求める

図 20 の断面力図を用いて、柱頭における層せん断力と水平外力との釣合を考察する。図 21 には、柱頭部分で切断した際のせん断力と外力を示す。同図より、水平方向の力の釣合は次式となる。

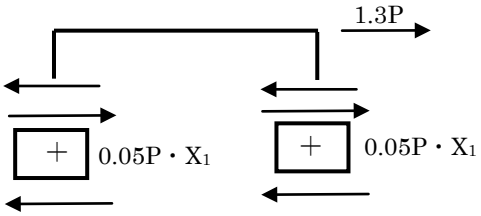


図 21 柱頭での水平方向の力の釣合

$$1.3P - 2(0.05P \cdot X_1) = 0 \rightarrow$$
$$0.1X_1 = 1.3 \rightarrow X_1 = 13.0 \qquad \cdots\cdots(29)$$

VII：未定定数 X_1 の値を、強制変位を与えて求めた断面力図に掛け、図 19 の断面力を加えることで、修正した断面力図を求める

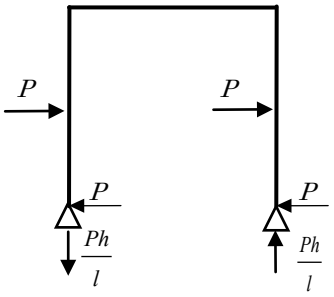
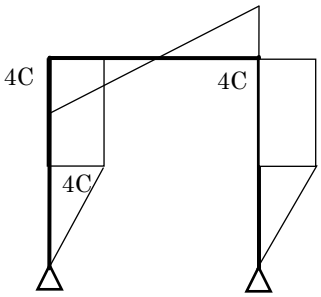
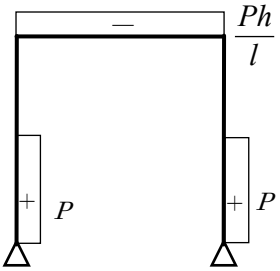


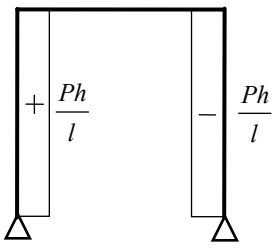
図 23 外力と反力



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 22　例題 2 骨組の断面力図

図 20 の断面力に X_1 の値を掛け、図 19 の断面力と重ね合わせることで、実際の応力状態が得られる。以下に柱の材端モーメントと柱中央の

曲げモーメントを求めてみよう。

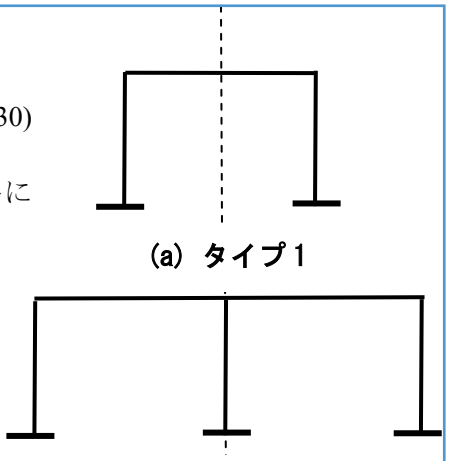
$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;M_{21}=1.2C-0.4C\cdot 13.0=1.2C-5.2C=-4.0C \\ &M_c=-1.4C+0.5\cdot(-0.4C)\cdot 13.0=-1.4C-2.6C=-4.0C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

梁の材端モーメントは、当然柱の材端モーメントとの釣合より、容易に得られる。以上をまとめると、骨組の曲げモーメントは、図 22(a)に示される。せん断力図と軸力図も、曲げモーメント図と節点での力の釣合より求められる。

せん断力図と軸力図より反力が求められ、まとめた図が図 23 に示される。同図を利用して、外力と反力の釣合を確認する。上下方向と水平方向の釣合が満たされていることは同図より容易に理解できる。また節点 1 における外力と反力によるモーメントの釣合は

$$M_1=P\cdot\frac{h}{2}+P\cdot\frac{P}{2}-\frac{Ph}{l}\cdot l\to 0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

となり、釣合がとれていることが分かる。



(a) タイプ 1

(b) タイプ 2

図 24 2 種の対称形状と対称剛性を有する骨組

ここでは、固定法における対称条件と逆対称条件の扱い方についてまとめてみよう。図 24 のように整形骨組を 2 つに分類し、条件の設定方法をまとめる。

対称条件や逆対称条件を考える際、骨組を図 24 に示すように、次の 2 つに分類する。タイプ 1 は、中心軸が梁の真ん中にある場合、タイプ 2 は柱の図芯軸にある場合である。これらの骨組は、基本的には、対称条件あるいは逆対称条件によって、中心軸を境に半分の骨組について解析を行えば良い。

1）タイプ 1 の骨組

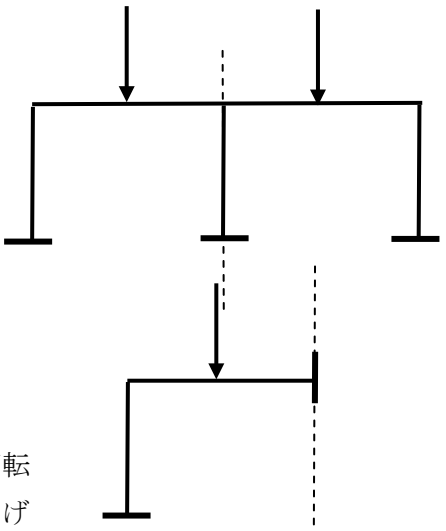
1.1 対称条件：中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じで、回転方向が逆となる。柱に部材角は生じない。中心軸上に存在する梁の曲げ剛性は、有効剛比 $k_e=0.5k$ を用いる。

1.2 逆対称条件:中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じとなる。材中央に中心軸を有する梁部材は有効剛比 $k_e=1.5k$ を用いる。

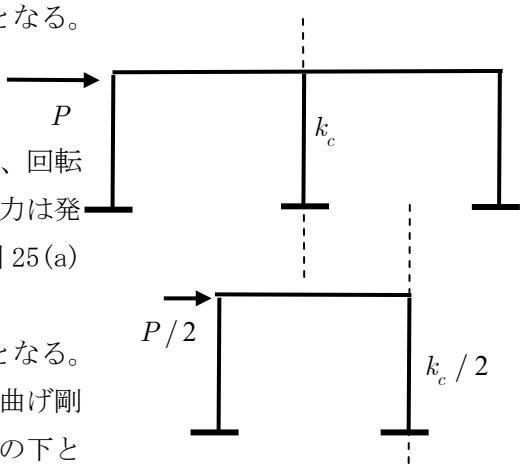
2）タイプ 2 の骨組

2.1 対称条件：中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じで、回転方向は逆となる。柱に部材角は生じない。中心軸上の柱には断面力は発生しない。中心軸上の節点回転角はゼロとなる。解析モデルは図 25(a)の下となる。

2.2 逆対称条件:中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じとなる。骨組を 2 つに分割するため、材中央に中心軸を有する柱部材は、曲げ剛性を半分に、また水平荷重も 1/2 にする。解析モデルは図 25(b)の下となる。



(a) 対称条件を用いた解析モデル



(b) 逆対称条件を用いたモデル

図 25 タイプ 2 の骨組解析モデル

基礎１１１話 No.1　多層骨組の節点移動解析法の解説

今回は、多層骨組に節点移動があり、結果、各層の柱に部材角が生じる場合の解析方法について考えよう。これまでは、柱に部材角が生じる 1 層の骨組に対する解析方法を学んできた。そこでは、まず、柱に強制変位、つまり任意の層間変位を与え、その状態で各節点でのモーメントの釣合を固定法によって求めた。次に、強制変位によって生じる柱の層せん断力と外力との釣合より、未定係数である強制変位の値を決め、骨組全体の断面力分布を得た。多層骨組では、この手法を拡張し、各層で層間変位が生じる整形骨組の解析を行う。

多層整形骨組では、まず図 1 に示すように層の数分、層毎で柱に強制変位を与え、各々節点でモーメントが釣合う応力状態を求める。その際、第 i 層の強制変位の部材角は、次のように未定係数を含むように与える。

$$\psi_i = -100X_i \qquad \cdots\cdots(1)$$

この部材角によって、当該層に存在する両端固定の柱には、剛比に比例する曲げモーメントが両端に発生する。

$$M_{ij} = -100kX_i; \quad M_{ji} = -100kX_i \qquad \cdots\cdots(2)$$

ただし、ピン支持の柱では次式となる。

$$M_{ij} = 0; \quad M_{ji} = -50kX_i \qquad \cdots\cdots(3)$$

この曲げモーメントを基本応力として、固定法を適用すると、モーメントの釣合が各節点で得られる。この操作を図 1 のように、各層で行うことになる。図 2 には、各層に強制変位を与えたときの曲げモーメント分布が示されている。これらの曲げモーメント分布は、未定係数を各々、$X_i = 1$として計算されている。

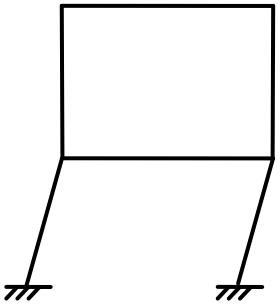
実際の断面力の分布は、図 2 に示す 2 つのモーメント分布に各々の未定係数を掛けた分布の和で表される。あとは、各層で層せん断力と外力との釣合より未定係数を決めることになる。層せん断力と水平外力との釣合、例えば、第 1 層の層せん断力の釣合は、図 3 を参考にすると、次式で与えられる。

$$({}_1Q_{11} + {}_1Q_{12})X_1 + ({}_2Q_{11} + {}_2Q_{12})X_2 = P_2 + P_1 \qquad \cdots\cdots(4)$$

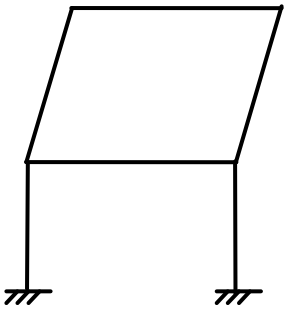
上の層せん断力の釣合式を一般系で表わすと、k 層の層せん断力と外力の釣合は次式となる。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\sum_j {}_iQ_{kj}) = \sum_{j=k}^{n} P_j \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで、右辺の外力は柱頭の節点水平力を表わし、当該層より上の外力

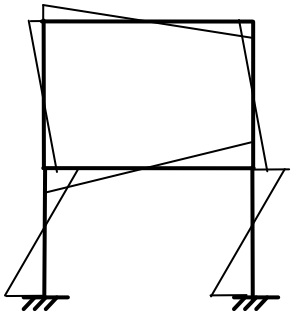


(a) 1 層目強制変位

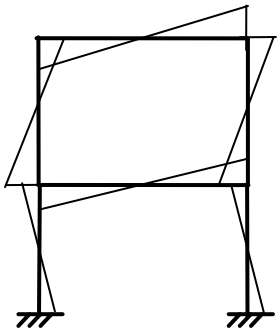


(b) 2 層目強制変位

図 1 多層骨組の強制変位



(a) 第 1 層の強制変位 X_1



(b) 第 2 層の強制変位 X_2

図 2 各層に強制変位を与えた際の曲げモーメント分布

の和を意味する。左辺の ${}_iQ_{kj}$ は k 層の柱で、i 層に加えられた強制変位によって生じるせん断力を意味する。上の釣合式に当該層の高さ h_k を両辺に掛けると、次の層モーメントの釣合式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_j ({}_iM_{lm} + {}_iM_{ml})\right) = h_k \sum_{j=k}^{n} P_j \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで、${}_iM_{lm}$, ${}_iM_{ml}$ は、k 層の柱で i 層に加えられた強制変位によって生じる柱両端の曲げモーメントを表す。

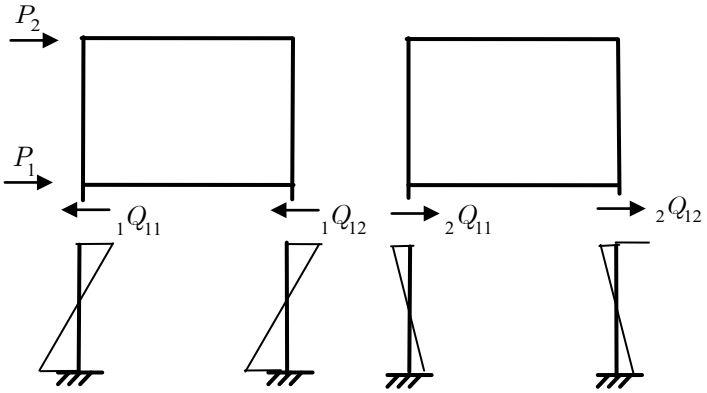


図 3 第 1 層の層せん断力と水平外力との釣合

層モーメントの釣合式(6)はその骨組の層数分得られ、連立方程式となる。この方程式を解くことによって未定係数が決定する。得られた X_i を図 2 の曲げモーメント分布に各々掛け、和をとると層せん断力と外力との釣合を満たす曲げモーメント分布が得られる。これらの解析手続きについては、課題で演習し、より深く理解することにしよう。

次に、柱に部材荷重がある場合について考える。この場合は、もう一段の手続きが必要となる。まず、梁に部材荷重がある場合と同様、柱に部材荷重の基本応力である固定端モーメントを外荷重として、固定法により、節点でモーメントの釣合を満たす曲げモーメント分布を求める。得られた結果より、各層でせん断力と水平外力との釣合を求める。そこでは、層せん断力は当然釣合がとれていないため、図 4 に示すように、各層には仮想支持点に反力が発生する。この反力によって水平部材荷重と柱のせん断力の釣合が得られることになる。

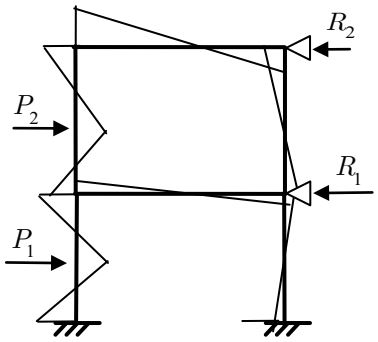


図 4 柱に部材荷重が加わる場合の曲げモーメント

上記の反力を消去するために、図 5 に示すように、反力とは逆の水平力を節点水平力に加え、層せん断力との釣合を考える。ここでは、式(6)の代わりに、次式が使用されることになる。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_j ({}_iM_{lm} + {}_iM_{ml})\right) = h_k\left(\sum_{j=k}^{n} P_j + \sum_{j=k}^{n} R_j\right) \quad \cdots(7)$$

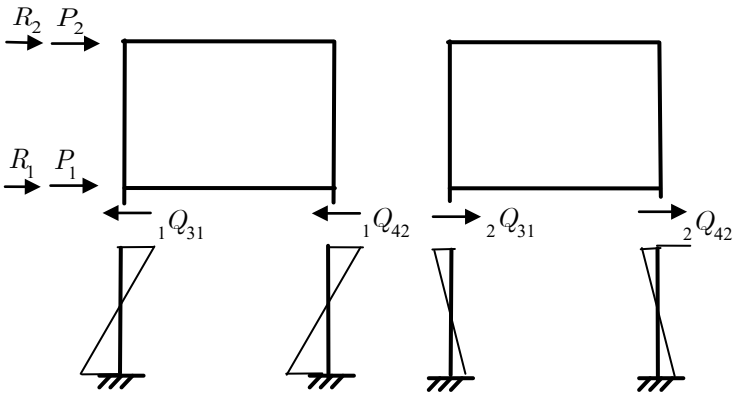


図 5 第 1 層の層せん断力と水平外力との釣合

上式から得られた連立方程式を解き、求めた X_i を、図 2 の曲げモーメント分布に各々掛け、和をとる。さらに、図 4 に示す部材荷重による曲げモーメント分布を加えると、層せん断力と外力との釣合を満たす曲げモーメント分布が得られる。これら解析手続きの詳細は、次回以降お話ししよう。

基礎１１２話 No.2　2 層両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重

付 24 話参照
ex84_2

前回は、節点移動のある多層骨組について、固定法による解析手法を誘導した。今回は 2 つの課題を通してこの手法をより深く理解しよう。

1）2 層固定支持骨組＋柱頭水平荷重　　ex84_2

図 6 に示す水平外力が加わる 2 層骨組について、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。以下の手順で 2 層の対称構造物に水平力が加わる場合の応力解析を行う。変形状態・応力状態共に逆対称となる。

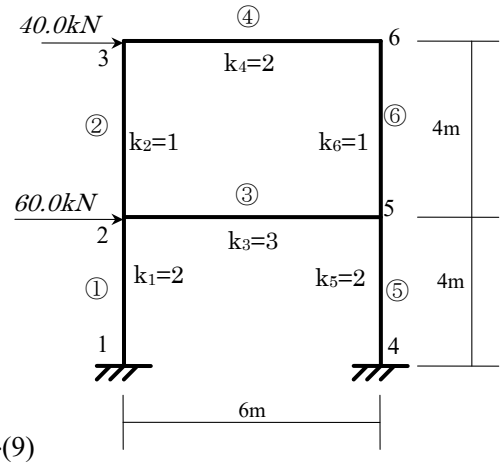


図 6 課題 1 の 2 層骨組

Ⅰ：部材の有効剛比を求める

逆対称部材である梁③と④の有効剛比を求める。

$$\bar{k}_3 = 1.5k_3 = 4.5; \quad \bar{k}_4 = 1.5k_4 = 3.0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

Ⅱ：節点 2 と 3 での分割率を求める

節点：2

$$DF_1 = \frac{2}{2+1+4.5} = 0.27; \quad DF_2 = \frac{1}{2+1+4.5} = 0.13; \quad DF_3 = \frac{4.5}{2+1+4.5} = 0.60 \qquad \cdots(9)$$

節点：3

$$DF_2 = \frac{1}{1+3} = 0.25; \quad DF_4 = \frac{3}{1+3} = 0.75 \qquad \cdots\cdots(10)$$

Ⅲ：第 1 層と 2 層で、部材角の強制変位による基本応力の計算

強制変位である部材角を次のように与える。ここで $\psi_1 = -50X_1$ としたのは剛比との関連で、計算の都合である。

$$\psi_1 = -50X_1 \qquad \psi_2 = -100X_2 \qquad \cdots\cdots(11)$$

ψ_1 と ψ_2 は独立に与えて良いが、無論、値は任意である。固定法の表計算がし易い数値を選ぶべきである。

上の強制変位 ψ_1 では部材①と⑤に、また ψ_2 では、部材②と⑥に、各々、次に示す基本応力が発生する。ただし、ここでは各々 X_1 を 1 に、また X_2 も 1 として与える。

部材：1、5：

$$M_{12} = -50 \cdot k_1 \cdot X_1 = -100; \quad M_{21} = -50 \cdot k_1 \cdot X_1 = -100$$
$$M_{45} = -50 \cdot k_5 \cdot X_1 = -100; \quad M_{54} = -50 \cdot k_5 \cdot X_1 = -100 \qquad \cdots\cdots(12)$$

部材：2、6：

$$M_{23} = -100 \cdot k_2 \cdot X_2 = -100; \quad M_{32} = -100 \cdot k_2 \cdot X_2 = -100$$
$$M_{56} = -100 \cdot k_6 \cdot X_2 = -100; \quad M_{65} = -100 \cdot k_6 \cdot X_2 = -100 \qquad \cdots\cdots(13)$$

Ⅳ：各層の柱に各々強制変位を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

上の基本応力を用いて、固定法で応力解析を行う。表 1 の左が未定係数 X_1 に対して、同じく右が X_2 に対する固定法による解析結果である。

Ⅴ：求めた材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

解析した結果より、未定係数 X_1 と X_2 に対する曲げモーメント図とせん

断力図を図 7 に示す。

表 1 課題 1 の強制変位による固定法の表

	下柱		右梁	外力
DF	0.25		0.75	
FEM				
D1				
C1	6.5			−6.5
D2	−1.6		−4.9	
C2				0
D3				
C3	0			0
D4				
計	4.9		−4.9	

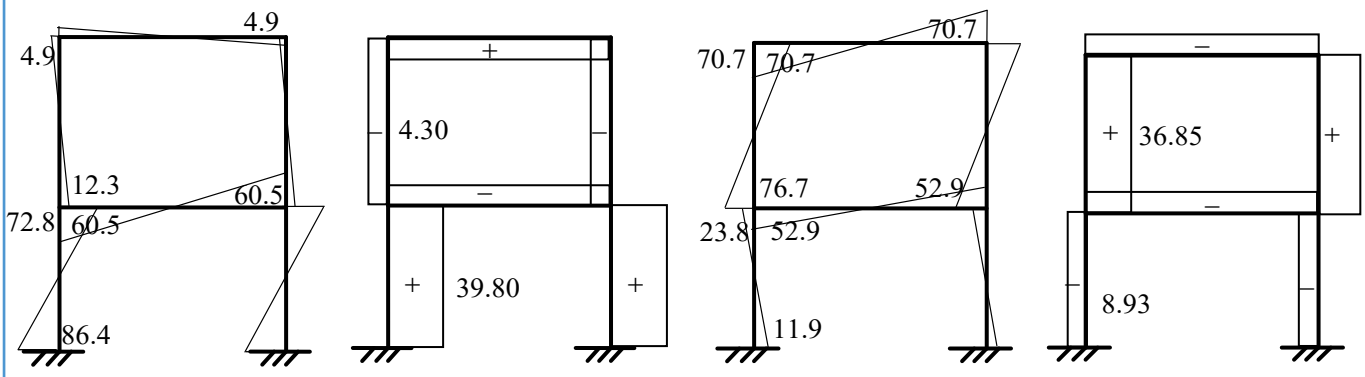
	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.27	0.13	0.6	
FEM	−100			100
D1	27	13	60	
C1				0
D2				
C2		−0.8		0.8
D3	0.2	0.1	0.5	
C3				
D4				
計	−72.8	12.3	60.5	

	上柱
FEM	−100
C1	13.5
C2	
C3	0.1
計	−86.4

	下柱		右梁	外力
DF	0.25		0.75	
FEM	−100			100
D1	25		75	
C1	6.5			−6.5
D2	−1.6		−4.9	
C2	−0.8			0.8
D3	0.2		0.6	
C3	0			0
D4				
計	−70.7		70.7	

	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.27	0.13	0.6	
FEM		−100		100
D1	27	13	60	
C1		12.5		−12.5
D2	−3.4	−1.6	−7.5	
C2		−0.8		0.8
D3	0.2	0.1	0.5	
C3		0.1		−0.1
D4			−0.1	
計	23.8	−76.7	52.9	

	上柱
FEM	
C1	13.5
C2	−1.7
C3	0.1
計	11.9



(a) 第 1 層目に強制変位を与えた際の断面力図　　(b) 第 2 層目に強制変位を与えた際の断面力図

図 7 2 つの強制変位による断面力図:左は曲げモーメント図、右はせん断力図

図 7(a)は第 1 層の柱に部材角を与え、強制変位を加えた際の曲げモーメント図とせん断力図である。また、同図(b)は、第 2 層の柱に部材角を与え、強制的に変位を加えた際の曲げモーメント図とせん断力図である。節点移動のある場合に関するこれまでの解析手順は、十分に理解できただろうか。以降の解析は次回以降に行う。

基礎１１３話 No.3　前回課題の続き 2 層両端固定支持骨組

付 24 話参照
ex84_2; ex114_1

これまで、多層骨組で節点移動のある場合の解析手法を誘導した。今回は課題 1 の解析の続きを行う。

Ⅵ:柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 と X_2 の値を求める

第 1 層目の柱頭における層モーメントの釣合は、逆対称であることを考慮すると、次式となる。

$$({}_1M_{12}+{}_1M_{21})X_1+({}_2M_{12}+{}_2M_{21})X_2=-(60+40)\cdot 4/2\rightarrow$$
$$-(86.4+72.8)X_1+(11.9+23.8)X_2=-(60+40)\cdot 4/2\rightarrow$$
$$159.2X_1-35.7X_2=200 \qquad \cdots\cdots(14)$$

同様に、第 2 層目の柱頭における層モーメントの釣合は

$$({}_1M_{23}+{}_1M_{32})X_1+({}_2M_{23}+{}_2M_{32})X_1=-(40)\cdot 4/2\rightarrow$$
$$(12.3+4.9)X_1-(76.7+70.7)X_2=-(40)\cdot 4/2$$
$$-17.2X_1+147.4X_2=80 \qquad \cdots\cdots(15)$$

となる。2 つの層モーメントに関する釣合式を整理すると、

$$\left.\begin{aligned}159.2X_1-35.7X_2&=200\\-17.2X_1+147.4X_2&=80\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

となり、上式を解くと、各層の未定係数は次のように得られる。

$$X_1=1.4150;\quad X_2=0.7079 \qquad \cdots\cdots(17)$$

求めた未定係数を用いると、各部材の材端モーメントは以下のように計算される。

Ⅶ：求めた未定定数を断面力図に掛け、修正した断面力図を求める

まず、材端モーメントを以下のように求める。

$$\left.\begin{aligned}M_{12}&=-86.4\cdot 1.4150+11.9\cdot 0.7079=-113.8\\M_{21}&=-72.8\cdot 1.4150+23.8\cdot 0.7079=-86.2\\M_{23}&=12.3\cdot 1.4150-76.7\cdot 0.7079=-36.9\\M_{32}&=4.9\cdot 1.4150-70.7\cdot 0.7079=-43.1\\M_{25}&=60.5\cdot 1.4150+52.9\cdot 0.7079=123.1\\M_{36}&=-4.9\cdot 1.4150+70.7\cdot 0.7079=43.1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

求めた材端モーメントから、骨組の曲げモーメント図を図 8(a)のように描く。さらに、各部材の曲げモーメンよりせん断力を求める。

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=-\frac{1}{4}(-113.8-86.2)=50.0;\quad Q_2=-\frac{1}{4}(-36.9-43.1)=20.0\\Q_3&=\frac{1}{6}(123.1+123.1)=41.0;\quad Q_4=\frac{1}{6}(43.1+43.1)=14.4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

各節点での力の釣合より部材の軸力を求める。その結果をせん断力図と軸力図として図 8(b)と(c)のように描く。

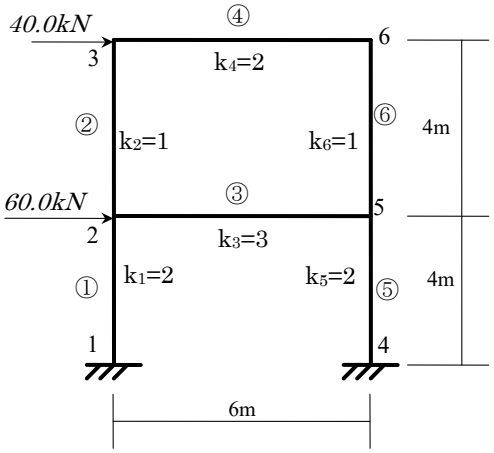
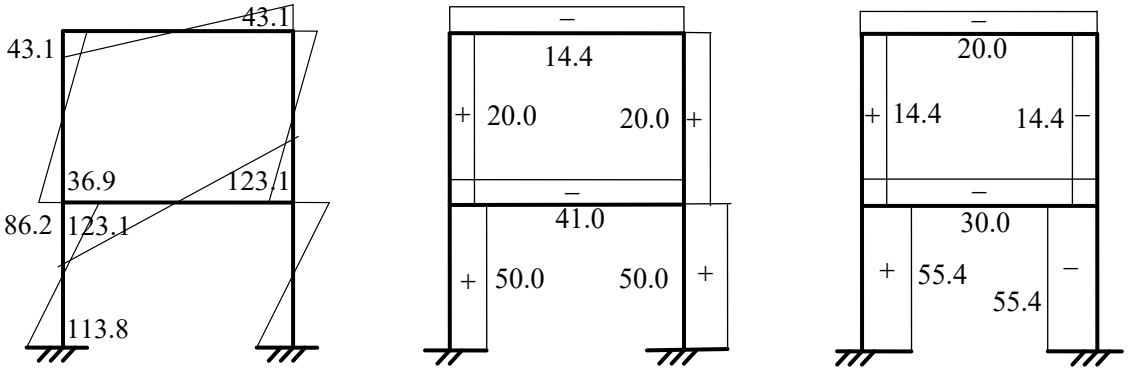


図 6 課題 1 の 2 層骨組



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 8 課題 1 骨組の断面力図

各断面力図より、図 9 のように反力が求められる。同図より、外力と反力の上下方向及び水平方向の力の釣合は成立していることが分かる。また、節点 1 におけるモーメントは、

$$M_1 = 40\cdot 8 + 60\cdot 4 - 113.8 - 113.8 - 55.4\cdot 6$$
$$= 320.0 + 240.0 - 227.6 - 332.4 \to 0 \qquad \cdots\cdots(20)$$

となり、釣合はとれている。

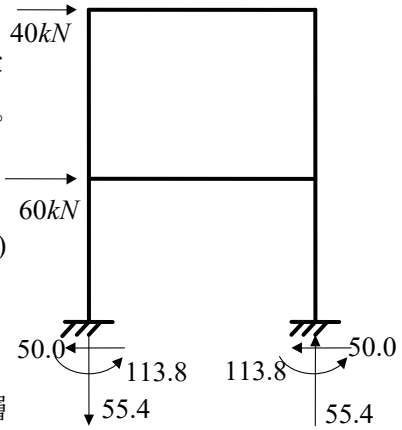


図 9 外力と反力の釣合

3）2 層固定支持骨組＋柱頭と柱中間部水平荷重　　ex114_1

次に、図 10 の課題 2 として水平外力及び柱に部材荷重が加わる 2 層骨組について、応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。このモデルは変形状態・応力状態共に逆対称である。課題 1 と異なる点は、柱の中央に水平集中荷重が加わっており、また、骨組に逆対称変形が生じるように荷重の形を変更していることである。この課題 2 では節点移動のない場合を含めて、3 回の応力解析を実施して断面力分布を求める必要がある。この 3 回の応力解析は、全て固定法の表を用いて行う。それでは、以下の順序に従って解析を行うことにしよう。

Ⅰ：部材荷重による基本応力を求める

先に、柱の部材荷重による基本応力を計算する。

第 1 層

$$C_1 = \frac{Ph_1}{8} = \frac{30\times 4}{8} = 15kNm$$
$$M_0 = \frac{Ph_1}{4} = 30kNm;\quad Q = \frac{P}{2} = 15kN \qquad \cdots\cdots(21)$$

第 2 層

$$C_2 = \frac{Ph_2}{8} = \frac{20\times 4}{8} = 10kNm$$
$$M_0 = \frac{Ph_2}{4} = 20kNm;\quad Q = \frac{P}{2} = 10kN \qquad \cdots\cdots(22)$$

以降の解析は、次回にお話しする。

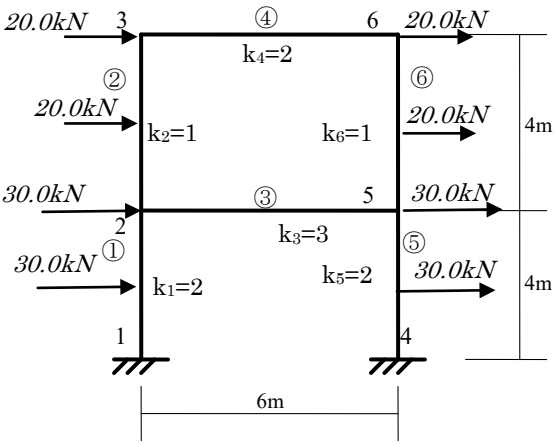


図 10 課題 2 部材荷重の加わる 2 層骨組

基礎１１４話 No.4　２層固定支持骨組＋柱頭・柱中央水平荷重

付 24 話参照
ex114_1

前回に続き、課題 2 の解析を行い、柱に部材荷重がある場合の解析手順について、さらに理解を深める。

Ⅱ：部材の有効剛比を求める

逆対称部材である部材③と④の有効剛比を以下に示す。

$$\bar{k}_3 = 1.5k_3 = 4.5; \quad \bar{k}_4 = 1.5k_4 = 3.0 \qquad \cdots\cdots(23)$$

Ⅲ：節点 2 と 3 での分割率を求める

次に、節点 2 と 3 における分割率を計算する。

節点：2　$DF_1 = \dfrac{2}{2+1+4.5} = 0.27; \quad DF_2 = \dfrac{1}{2+1+4.5} = 0.13;$

$$DF_3 = \frac{4.5}{2+1+4.5} = 0.60 \qquad \cdots\cdots(24)$$

節点：3　$DF_2 = \dfrac{1}{1+3} = 0.25; \quad DF_4 = \dfrac{3}{1+3} = 0.75 \qquad \cdots\cdots(25)$

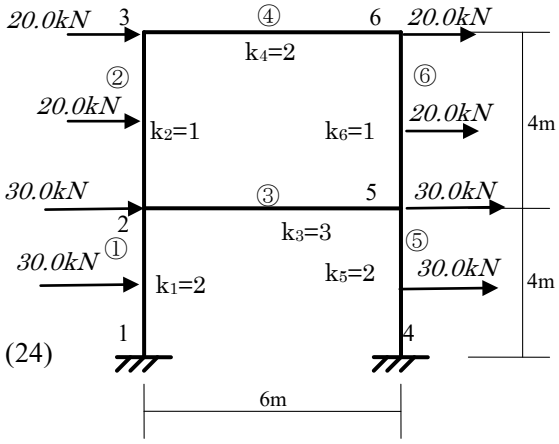


図 10 課題 2 水平方向部材荷重の加わる 2 層骨組

Ⅳ：節点移動のない場合の応力解析を、表を用いた反復計算で行う

最初に、柱の部材荷重によって生じる節点モーメントの釣合状態を、固定法の表 2 で求める。

表 2 課題 2 の部材荷重による固定法の表

	下柱		右梁	外力
DF	0.25		0.75	
FEM	10		0	−10
D1	−2.5		−7.5	
C1	−0.33		0	0.33
D2	0.08		0.25	
C2	0.08		0	−0.08
D3	−0.02		−0.06	
C3	0			0
D4				
計	7.3		−7.3	

	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.27	0.13	0.6	
FEM	15	−10		−5
D1	−1.35	−0.65	−3	
C1	0	−1.25		1.25
D2	0.34	0.16	0.75	
C2	0	0.04		−0.05
D3	−0.01	0	−0.03	
C3		−0.01		0.01
D4	0	0	0.01	
計	13.98	−11.7	−2.27	

	上柱		
FEM	−15		
C1	−0.68		
C2	0.17		
C3	0		
計	−15.51		

Ⅴ：材端モーメントから断面力を求める

柱中央の曲げモーメントは、右の表と式(21)と(22)の基本応力より、次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} {}_1M_c &= M_0 - 0.5(M_{ji} - M_{ij}) = 30 - 0.5(13.98 + 15.51) \\ &= 15.26; \quad {}_2M_c = 20 - 0.5(7.3 + 11.7) = 10.5 \end{aligned}\right\} (26)$$

求めた材端モーメント及び柱中央の曲げモーメントより、曲げモーメント図が図 11(a)に、また曲げモーメントからせん断力図が同図(b)に得られる。

このせん断力図より分かるように、層せん断力の釣合は当然満たされておらず、釣合を満たすために、仮想支持点に反力が生じることになる。

Ⅵ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたとき、柱に生じる固定端モーメントを計算する

層せん断力の釣合を得るため、節点に加わる水平力と同時に、ここでは、この仮想支持点の反力とは逆の力を加える。

層せん断力の釣合を得るために、各層に強制変位

を与えて、節点でのモーメントの釣合状態を求める。

$$\psi_1 = -50X_1 \qquad \psi_2 = -100X_2 \qquad \cdots\cdots(27)$$

2 つの強制変位に対し、各々部材①と②及び⑤と⑥には、次に示す基本応力が発生する。ただし、X_1 と X_2 は共に 1 とし、各々独立とする。

部材：1、5

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= -50\cdot k_1\cdot X_1 = -100; \quad M_{21} = -50\cdot k_1\cdot X_1 = -100 \\ M_{45} &= -50\cdot k_1\cdot X_1 = -100; \quad M_{54} = -50\cdot k_1\cdot X_1 = -100 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

部材：2、6

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= -100\cdot k_2\cdot X_2 = -100; \quad M_{32} = -100\cdot k_2\cdot X_2 = -100 \\ M_{56} &= -100\cdot k_6\cdot X_2 = -100; \quad M_{65} = -100\cdot k_6\cdot X_2 = -100 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(29)$$

Ⅶ：各層の柱に各々強制変位を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算し、各断面力図を求める

上の基本応力を用いて、固定法で応力解析を行う。固定法による応力解析は、前課題で既に求めている。解析した結果より、未定係数 X_1 と X_2 に対する曲げモーメント図とせん断力図を、再度図 12 に示す。

Ⅷ：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 と X_2 の値を求める

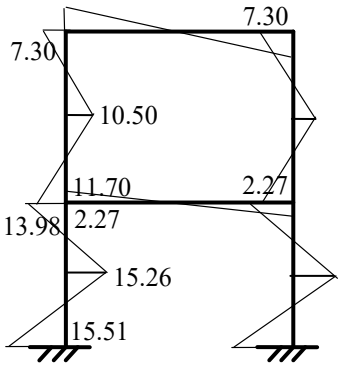
第 1 層目の柱頭における層モーメントの釣合は次式による。この釣合式には、仮想支持点の反力とは方向が逆の力が加えられている。また、逆対称であることを利用すると、下式となる。

$$({}_1M_{12}+{}_1M_{21})X_1+({}_2M_{12}+{}_2M_{21})X_2 = -(60+40)\cdot 4-(17.8+51.44)\cdot 4/2 \rightarrow$$
$$-(86.4+72.8)X_1+(11.9+23.8)X_2 = -(60+40+17.8+51.44)\cdot 4/2$$
$$159.2X_1-35.7X_2 = 338.48 \qquad \cdots\cdots(30)$$

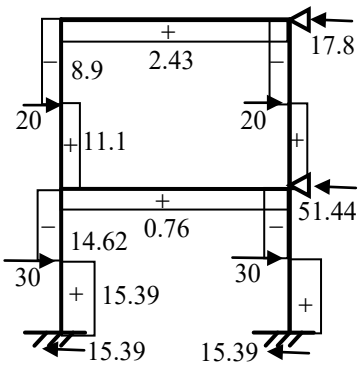
同様に、第 2 層目の柱頭における層モーメントの釣合は次式による。

$$({}_1M_{23}+{}_1M_{32})X_1+({}_2M_{23}+{}_2M_{32})X_2 = -(40)\cdot 4-17.88\cdot 4/2 \rightarrow$$
$$(12.3+4.9)X_1-(76.7+70.7)X_2 = -(40+17.8)\cdot 4/2$$
$$-17.2X_1+147.4X_2 = 115.60 \qquad \cdots\cdots(31)$$

以降は、次回お話しする。

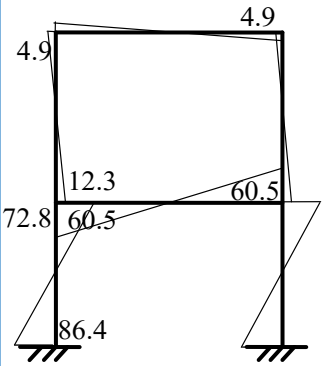


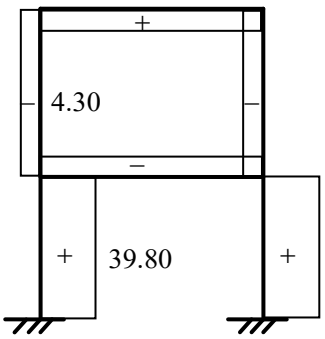
(a) 曲げモーメント図



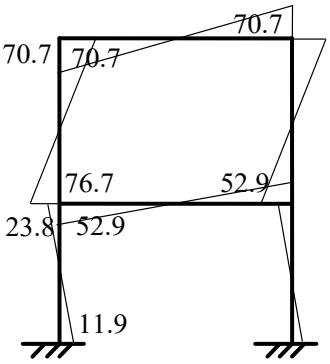
(b) せん断力図と反力

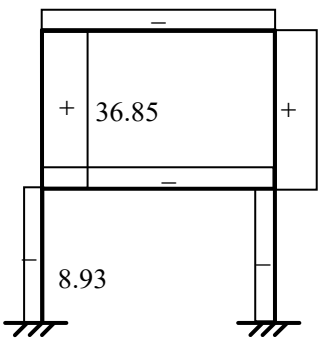
図 11 柱部材荷重による断面力図





(a) 第 1 層目に強制変位を与えた際の断面力図





(b) 第 2 層目に強制変位を与えた際の断面力図

図 12　2 つの強制変位による断面力図：左は曲げモーメント図、右はせん断力図

基礎１１５話 No.5　前回課題の続き 2 層固定支持骨組

付 24 話参照
ex114_1

今回も、課題 2 の解析の続きを行う。これまでに求めた 2 つの層モーメントに関する釣合式を整理すると、次式となる。

$$\left.\begin{aligned} 159.2X_1 - 35.7X_2 &= 338.48 \\ -17.2X_1 + 147.4X_2 &= 115.60 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(32)$$

上式を解くと、各層の未定係数は次となる。

$$X_1 = 2.3639; \quad X_2 = 1.0601 \qquad \cdots\cdots(33)$$

Ⅸ：求めた未定定数を断面力図に掛け、その値に節点移動のない場合の応力を加えて実断面力図を求める

部材荷重による断面力を加えることで、各部材の材端モーメントは以下のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= -86.4 \cdot 2.3639 + 11.9 \cdot 1.0601 - 15.51 = -207.1 \\ M_{21} &= -72.8 \cdot 2.3639 + 23.8 \cdot 1.0601 + 13.98 = -132.9 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= 12.3 \cdot 2.3639 - 76.7 \cdot 1.0601 - 11.70 = -63.9 \\ M_{32} &= 4.9 \cdot 2.3639 - 70.7 \cdot 1.0601 + 7.30 = -56.1 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} M_{25} &= 60.5 \cdot 2.3639 + 52.9 \cdot 1.0601 - 2.27 = 196.8 \\ M_{36} &= -4.9 \cdot 2.3639 + 70.7 \cdot 1.0601 - 7.30 = 56.1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(34)$$

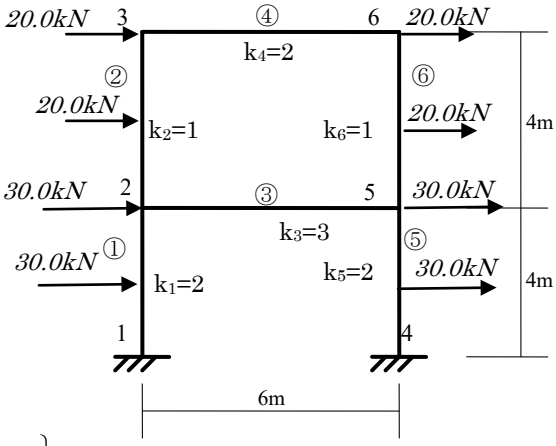


図 10 課題 2 水平方向部材荷重の加わる 2 層骨組

柱中央の曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} {}_1M_c &= M_0 - 0.5(M_{21} - M_{12}) = 30 - 0.5(-132.9 + 207.1) = -7.1 \\ {}_2M_c &= 20 - 0.5(-56.1 + 63.9) = 16.1 \end{aligned}\right\} \cdots(35)$$

計算した材端モーメントから、各部材のせん断力を求める。

$$\left.\begin{aligned} Q_{1l} &= -\frac{1}{2}(-207.1 + 7.1) = 100.0; \quad Q_{1u} = -\frac{1}{2}(-7.1 - 132.9) = 70 \\ Q_{2l} &= -\frac{1}{2}(-63.9 - 16.1) = 40.0; \quad Q_{1u} = -\frac{1}{2}(16.1 - 56.1) = 20.0 \\ Q_3 &= \frac{1}{6}(196.8 + 196.8) = 65.6; \quad Q_4 = \frac{1}{6}(56.1 + 56.1) = 18.7 \end{aligned}\right\} \cdots(36)$$

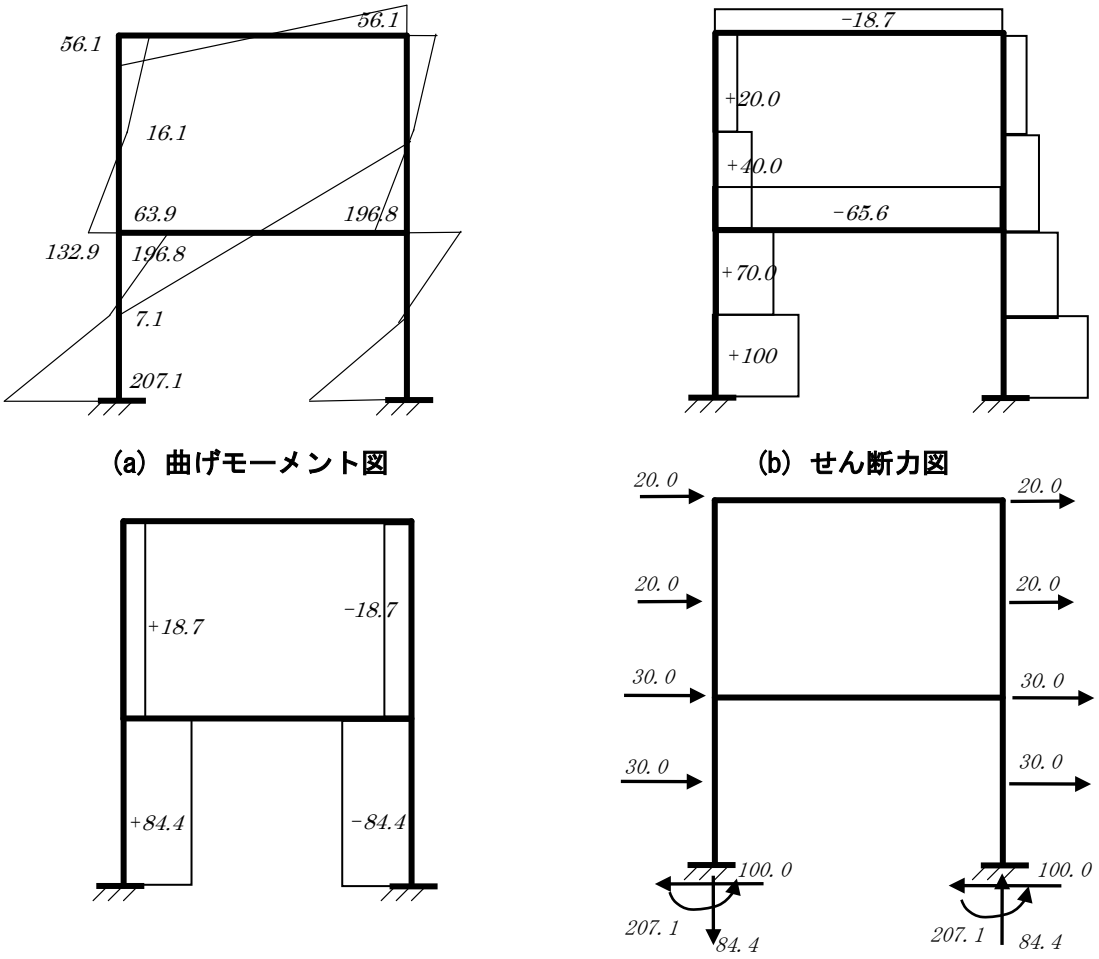
Ⅹ：求めた材端モーメント、部材中央曲げモーメント、せん断力から、各断面力図を描く

上で求めた材端モーメントとせん断力より、骨組の曲げモーメント図及びせん断力図を、図 13(a)と(b)に示す。次に、各節点での力の釣合より部材の軸力を求める。その結果を軸力図として描く。さらに、各断面力図より、以下のように反力が求められる。

図 13(d)より、上下方向及び水平方向の釣合が取れていることが分かる。また、節点 1 におけるモーメントは、

$$M_1 = 40\cdot 8 + 40\cdot 6 + 60\cdot 4 + 60\cdot 2 - 207.1\cdot 2 - 84.4\cdot 6$$
$$= 320.0 + 240.0 + 240.0 + 120 - 414.2 - 506.4 = -0.6 \text{ (誤差)} \quad \cdot\cdot(37)$$

となり、釣合は得られているといって良い。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

(c) 軸力図　　(d) 外力と反力

図 13　課題 2 水平方向部材荷重の加わる 2 骨組の断面力図

固定法は、節点移動のない場合は 1 回の表計算で釣合状態を求めることができ、非常に便利であるが、節点移動のある場合は結構面倒である。コンピュータによる設計が行われる以前では、長期荷重に対して、この固定法が主に使用された。地震時などの短期荷重で節点移動のある解析は、主として D 値法が用いられた。

以下に節点移動のある場合に関する固定法の特徴をまとめる。

R50：節点移動があり、部材荷重がある場合の解析手法の特徴

１：骨組の節点移動自由度＋節点移動のない場合について表計算で応力解析が必要となる
２：骨組の節点移動自由度とは整形骨組では層数を表し、層数＋１の表計算が必要となる
３：たわみ角法の層方程式に対応する方程式は連立となり、手計算では解きにくい
４：節点移動のない場合に比較して、圧倒的に面倒である

基礎１１６話 No.1　カーニー法 解析手法の解説

これまで、固定法により骨組全体がスウェイする場合に関する解析手法を学んだ。同法では各層に強制変位を与え、節点でモーメントの釣合を満たす曲げモーメント分布を求める必要がある。つまり、骨組の階層分、固定法で応力解析を行う。次に、外力との釣合を得るために、曲げモーメント分布から層方程式を作り、多層では連立方程式を解くことになる。多層・多スパンの構造物で節点移動がある場合、同法の手続きはかなり煩雑となり、固定法は現実的な手法とは言えなくなる。

上記解法の欠点を補うために、カーニー法が開発されている。同法は、何度も反復解放を行うことなく、しかも連立方程式を解くこともない。節点の不釣合モーメントを反復解放するのと同時に、不釣合の層せん断力あるいは層モーメントを解放する。カーニー法は手続きが比較的簡単で、節点移動がある場合、効果的な手法となっている。ただ、正解への収束が遅く、一般に、通常の固定法では 4 から 5 回で収束するのに対し、7 回以上の反復が必要となる。ここではカーニー法の原理を説明し、その後、例題を用いて同法の理解を深めることにしよう。

一般の固定法では、柱部材に部材角が生じる場合、各層で水平外力と層せん断力の釣合を得るために、層せん断力に関する連立方程式を解く必要がある。カーニー法の特徴は、この層せん断力に関する方程式を立てる替わりに、節点での不釣合モーメントの解除と同時に、層せん断力の釣合を満たしながら反復解放を行う。ここでは、この解放原理を説明しよう。

図 1 に示すように、任意の層で k 本の柱があり、その層に水平外力 P があると、水平方向の力の釣合より、外力 P に釣合う層せん断力 Q が発生する。この層せん断力によって層全体に部材角 R が生じ、各柱にもせん断力と曲げモーメントが現れる。最初に柱の両端を固定し、I 層の柱の部材角を強制変位に加えると、各柱に剛比に比例するせん断力が生成される。外力に釣合う各柱のせん断力あるいは柱両端の材端モーメントは、以下のように求められる。

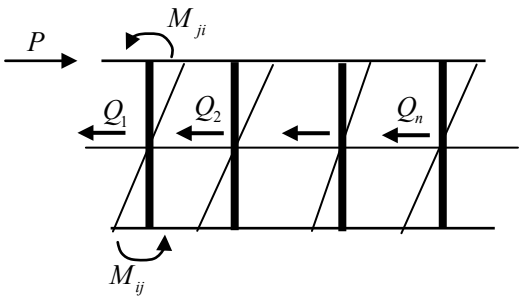


図 1 各層に働くせん断力と曲げモーメント

I 層の層せん断力 Q_I は各柱のせん断力の総和として次式で表される。

$$Q_I = -\sum (M_{ij} + M_{ji}) / h_I \qquad \cdots\cdots(1)$$

部材 k の材端の曲げモーメントは、たわみ角法の基本式より、

$$M_{ij} = k_k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi_I); \quad M_{ji} = k_k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi_I) \qquad \cdots\cdots(2)$$

層モーメントの釣合をとる方法の一つにカーニー法がある。先の節点移動のある場合より、むしろこちらの方が直感的で分かり易い。ただ、収束が遅くなるのが欠点である。

外力として、全自由度を拘束して求めた固定端モーメントと同様、水平荷重による各層の層モーメントから、当該層の柱に分担される材端モーメントを計算し、FEM 欄に記入する。この操作により層モーメントの釣合が得られる。

次に、各節点での不釣合モーメントを解放する一連の操作に続いて、一つの層の部材角の拘束を解き、その層の不釣合層モーメントを解放する。層毎に順にこの操作を追加することで、固定法の反復過程でも、常に層モーメントの釣合が満たされることになる。後は、節点での不釣合モーメントが閾値以下になるまで、反復計算を継続する。

上記のように、不釣合層モーメントの解放を追加すれば、節点移動のある骨組の断面力分布が直接求められることになる。

である。上式で、柱の両端を固定し、しかも部材角が同じであるとすると、式(1)は、式(2)より次のように簡単に表される。

$$Q_I = -2(\sum_{j=1}^{n} k_j)\cdot\psi_I / h_I \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、Q_I はＩ層の層せん断力であり、ψ_I は同じくＩ層の部材角、h_I はその階高である。また、k_j はその層に属する柱の剛比を、n は同じく柱の数を示す。上式より、その層の部材角は次式で得られる。

$$\psi_I = -\frac{Q_I h_I}{2(\sum_{j=1}^{n} k_j)} \qquad \cdots\cdots(4)$$

上式を式(2)に代入すると、両端固定柱の材端モーメントが得られる。

$$M_{ij} = -\frac{k_k}{2(\sum_{j=1}^{n} k_j)} Q_I h_I ; \quad M_{ji} = -\frac{k_k}{2(\sum_{j=1}^{n} k_j)} Q_I h_I \qquad \cdots\cdots(5)$$

図１のように柱頭・柱脚を固定した柱の両端の曲げモーメントは、式(5)より層モーメント、つまり、その層のせん断力と階高の積に次の分割率を掛けることで求められる。

$$DFS_i = \frac{k_k}{2(\sum_{j=1}^{n} k_j)} \qquad \cdots\cdots(6)$$

両端が固定でない場合、つまり一端ピン支持の場合は以前学んだように有効剛比を用いることになる。

次に、カーニー法における反復解放の手続きを説明する。最初に、節点における分割率を計算する際、層に関する式(6)の分割率を求めておく。次に、部材荷重による基本応力を計算すると同時に、外力に釣合う層モーメントと層の分割率を用いて、各柱に生じる曲げモーメントを計算し、これを基本応力とする。これで反復前の準備段階が終了し、次に表を用いた反復処理を行う。この手続きを具体的に説明しよう。

まず、各層の水平外力による層モーメントを計算し、層の分割率を利用して、当該層の柱に基本応力として、FEM の欄に記入する。柱に部材荷重がある場合、今まで通り、上下端に該当する FEM 欄に固定端モーメントを記入する。節点分割率と同時に柱には、括弧内に層モーメントの分割率を記入する。最初に、節点の不釣合モーメントを解除する。各節点の不釣合モーメントを計算し、外力項に記入する。この不釣合モーメントは、分割率を利用して当該節点に連結している部材に分割される。さらに、その分割モーメントの 1/2 を、その部材の他端にある到達モーメントの欄に記入する。以降の説明は次回とする。

カーニー法による反復計算は次の順序で行う。特に、不釣合層モーメントの操作について理解されたい。

１：初期設定

1.骨組の形状に合わせて表の作成、特に DS*欄の追加に注意

2. 節点毎に分割率**(層分割率)**を記入

3. 符号に注意して、部材荷重固定端モーメントを FEM 欄に記入

4.水平外力と釣合う層モーメントを、層の分割率を利用して柱の固定端モーメントとして FEM 欄に記入

5. 各節点の FEM 欄の和をとり、符号を替えて外力項の FEM 欄に記入(不釣合節点モーメントの初期値となる)

２：不釣合節点モーメントの解放処理

1. 前回の DS*欄外力項の不釣合節点モーメントに分割率を掛け、分割モーメントを D*に記入

2. 各部材の他端 C*欄に 0.5×分割モーメントの値を記入

３：不釣合層モーメントの計算

各層で柱両端の D*欄と C*欄の和をとり、符号を替えて不釣合層モーメントとして C*欄外力項に記入

４：不釣合層モーメントの解放処理

各層の不釣合層モーメントを、層分割率を利用して、柱両端の DS*欄に記入して分割する

５：不釣合節点モーメントの計算

各節点で C*欄と DS*欄の和をとり、符号を変えて不釣合節点モーメントとして、DS*欄の外力欄に記入

６：収束判定

外力欄の不釣合節点モーメントが収束閾値を下回ると反復終了。収束しない場合は 2 へ戻り、収束するまで反復処理を行う。

７：最後の節点不釣合モーメントの解放

前回の DS*欄外力項の節点不釣合モーメントに分割率を掛け、分割モーメントを D*に記入

８：収束後処理

各部材で FEM 欄から最後の D*欄まで和をとり、計に記入。この値が材端モーメントとなる。

基礎１１７話 No.2　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重

付 25 話参照
ex117_1

今回は、前回のカーニー法の解析手法の説明の続きと、表 1 を参照し、カーニー法の反復処理をより深く理解する。

カーニー法では、全節点について不釣合モーメントの解放を行った後、不釣合層モーメントの解除を行う。まず基本応力時では、層せん断力と外力は釣合っており、そのため、**不釣合層モーメントは反復時の分割と到達操作で発生する。**不釣合層モーメントは、当該反復時、各層で柱頭・柱脚の「分割モーメント」と「到達モーメント」の和をとり、その値を外力項に記入する。この項は、本来層せん断力が釣合えばゼロとなるため、反復処理が進むと次第に小さくなる。節点での不釣合モーメントは、到達モーメントに加えて、この層せん断力の分割モーメントも含まれる。不釣合層モーメントは、括弧内の層モーメントの分割率を利用して、各層毎に層モーメントを分割して、各柱の層モーメント分割欄に記入する。

節点不釣合モーメントの解放と、各層の不釣合層モーメント解除を順次行い、1 回の反復処理とする。この反復処理を数回繰り返すことによって、節点の不釣合モーメントと各層の不釣合層モーメントが閾値より小さくなると、解は収束したとして、通常の固定法と同様に、FEM の欄から最後の欄まで和を取り、合計欄に記入する。この値が材端モーメントとなり、この値を用いて曲げモーメント図を描くことになる。

以上のようにカーニー法の反復処理を説明したが、理解し難い部分があると思う。そこで、例題を用いて、具体的に反復処理を実施し、カーニー法を理解しよう。

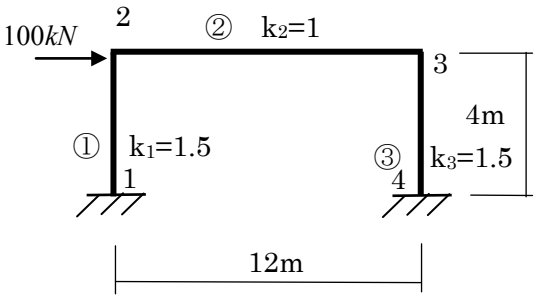
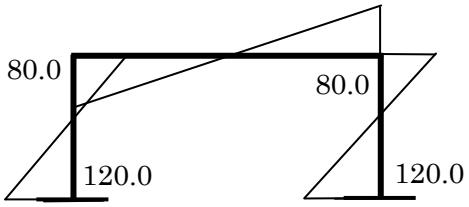
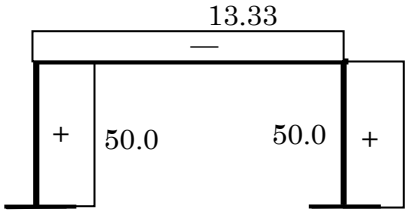


図 2 例題 1 の門型ラーメン



(a) 曲げモーメント図



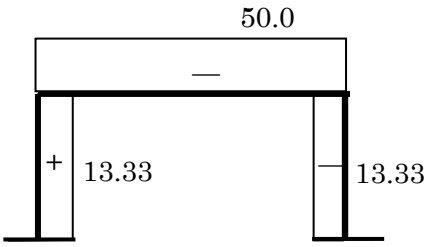
(b) せん断力図

1) 両端固定支持の門型ラーメン＋柱頭水平荷重　　ex117_1

ここでは、基礎 105 話で既にお話した節点移動のある場合の「例題 1」を用いて、以下の手順に従い、カーニー法の反復処理を実施する。例題 1 の骨組は図 2 に示されており、1 層 1 スパンの門型ラーメンで、柱頭に 100kN の水平外力が加わっている。

Ⅰ：逆対称条件による部材②の有効剛比を求める

部材の剛比は、図 2 に示されているが、例題 1 では、対称骨組で逆対称荷重、従って逆対称変形・逆対称断面力となる。対称条件より梁である部材 2 の有効剛比は次式となる。



(c) 軸力図

図 3 例題 1 の断面力図

$$\bar{k}_2 = 1.5 \cdot k_2 = 1.5 \qquad \cdots\cdots(7)$$

Ⅱ：節点 2 における分割率を計算

節点 2 における分割率は次式で与えられる。

$$DF_c = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5; \quad DF_b = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \qquad \cdots(8)$$

Ⅲ：柱①の層分割率を計算

層の分割率は式(6)より、以下のようである。

$$DFS_1 = \frac{k_k}{2(\sum_{j=1}^{n} k_j)} = \frac{1.5}{2(1.5)} = 0.5 \qquad \cdots\cdots(9)$$

上式では、逆対称条件を用いているため、柱は 1 本しかなく、このような単純な計算となっている。

Ⅳ：水平外力と釣合う層モーメントを求め、固定端モーメントを計算する

外力と釣合う層モーメントを求める。

$$M_I = \frac{100 \cdot 4}{2} = 200kNm \qquad \cdots\cdots(10)$$

上記の層モーメントも逆対称であることから、層せん断力は 1/2 となっており、層モーメントも同様に 1/2 の値となっている。

次に、この層モーメントに釣合う柱の固定端モーメントを、式(5)と(9)より求める。

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= -0.5 \cdot 200 = -100kNm \\ M_{21} &= -0.5 \cdot 200 = -100kNm \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(11)$$

Ⅴ：柱に固定端モーメントを加えた際の外力と釣合う材端モーメントを、固定法の表で求める

これで、カーニー法を適用するための準備は全て整った。次に表を用いて反復計算を行う。カーニー法では、通常の固定法と少し表が異なっており、表 1 のように、層モーメントの分割欄 DS*が加わっている。なお、*は反復回数を示す。

以下に、表形式でカーニー法を適用する。四捨五入の関係で、多少の誤差があるが、右の表のようにカーニー法によって材端モーメントが得られる。収束はやはり遅く 7 回の反復を要している。得られた材端モーメントを元に、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を図 3 に示す。基礎 105 話例題 1 の図 7 と同じ結果が得られている。

表 1 例題 1 のカーニー法の表

	下柱		右梁	外力
DF	0.5(0.5)		0.5	
FEM	−100			100
D1	50		50	
C1	0			−75
DS1	−37.5			37.5
D2	18.8		18.8	
C2	0			−28.2
DS2	−14.1			14.1
D3	7.1		7.1	
C3	0			−10.2
DS3	−5.1			5.1
D4	2.6		2.6	
C4	0			−3.9
DS4	−2			2
D5	1		1	
C5	0			−1.5
DS5	−0.8			0.8
D6	0.4		0.4	
C6	0			−0.6
DS6	−0.3			0.3
D7	0.2		0.2	
C7	0			0.3
DS7	−0.2			0.2
D8	0.1		0.1	
計	−79.8		80.2	
		上柱		
DF		(0.5)		
FEM		−100		
C1		25		
DS1		−37.5		
C2		9.4		
DS2		−14.1		
C3		3.5		
DS3		−5.1		
C4		1.3		
DS4		−2		
C5		0.5		
DS5		−0.8		
C6		0.2		
DS6		−0.3		
C7		0.1		
DS7		−0.2		
C8				
計		−120		

基礎１１８話 No.3　一端ピン・他端固定支持 門型ラーメン＋柱頭水平荷重

付 25 話参照
ex118_1

今回は、図 4 に示す門型ラーメンをカーニー法により応力解析する。

2）一端ピン・他端固定支持の門型ラーメン＋柱頭水平荷重　　ex118_1

この骨組は一方はピン支持、他方が固定支持であるため、前回の例題 1 のように逆対称とはならない。そのため全体骨組を扱う。次の順序に従って解析を進める。

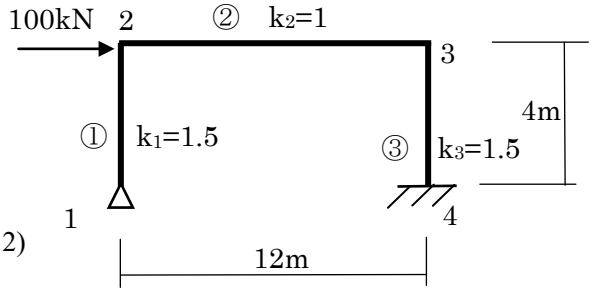


図 4 例題 2 支持条件が異なる門型ラーメン

Ⅰ：一端ピン支持部材①の有効剛比を求める

一端ピン支持の有効剛比を求める。

$$\bar{k}_1 = 3/4 \cdot k_1 = 1.125 \qquad \cdots\cdots(12)$$

Ⅱ：節点 2 と 3 における分割率を計算

節点 2:　$DF_c = \dfrac{1.125}{1+1.125} = 0.53; \quad DF_b = \dfrac{1}{1+1.125} = 0.47$　…(13)

節点 3:　$DF_c = \dfrac{1.5}{1.0+1.5} = 0.6; \quad DF_b = \dfrac{1.0}{1.0+1.5} = 0.4$　…(14)

Ⅲ：柱①と③の層分割率を計算

一端ピン支持で他端が固定の柱に部材角が生じると、固定端の材端モーメントは以下のようになる。

$$M_{ij} = 0; \quad M_{ji} = 0.5 k_k \psi \qquad \cdots\cdots(15)$$

上の結果から、当該柱の負担せん断力は両端固定梁の 1/4 となる。従って、解析モデルの層モーメントの分割率は次式で得られる

$$DFS_1 = \frac{0.5 \cdot 1.5}{0.5 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.5} = 0.2; \quad DFS_3 = \frac{1.5}{0.5 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.5} = 0.4 \qquad \cdots\cdots(16)$$

一端ピン支持の柱では、柱の上端部のモーメント分割率となる

Ⅳ：水平外力と釣合う層モーメントを求め、固定端モーメントを計算する

外力と釣合う層モーメントを求める。

$$M_{\mathrm{I}} = 100 \cdot 4 = 400 kNm \qquad \cdots\cdots(17)$$

次に、この層モーメントによって生じる柱の固定端モーメントを、式(5)と(15)より求める。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12} = 0; \quad M_{21} = -0.2 \cdot 400 = -80 kNm \\ &M_{34} = -0.4 \cdot 400 = -160 kNm; \quad M_{43} = -0.4 \cdot 400 = -160 kNm \end{aligned}\right\} \cdots(18)$$

Ⅴ：柱に固定端モーメントを加えた際の外力と釣合う材端モーメントを、固定法の表で求める

これで、カーニー法を適用するための準備は全て終了である。表 2 に、

表形式でカーニー法を適用する。

Ⅵ：表形式で求めた材端モーメントからせん断力を計算し、各断面力図を描く

表形式で求めた材端モーメントを用いて、骨組の層せん断力と外力の釣合を検証する。外力は 100kN であり、各柱のせん断力は、

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= (88.2)/4 = 22.05kN \\ Q_3 &= (118.5+192.6)/4 = 77.83kN \\ Q &= Q_1 + Q_3 = 99.91kN \end{aligned}\right\} (19)$$

となり、外力との釣合はほぼ得られている。少しの違いは、各種の誤差によるものである。材端モーメントより、骨組の曲げモーメント図、せん断力図、及び軸力図を図 6 に示す。

Ⅶ：外力と反力との力の釣合

次に、外力と反力との力の釣合をチェックする。図 5 より上下、及び水平方向の力の釣合がとれていることが分かる。左の支持点でのモーメントを計算すると、多少の誤差があるが、以下のように釣合はほぼとれているといえる。

$$M = 100\cdot 4 - 17.23\cdot 12 - 192.6 = -0.64 \quad \cdots\cdots (20)$$

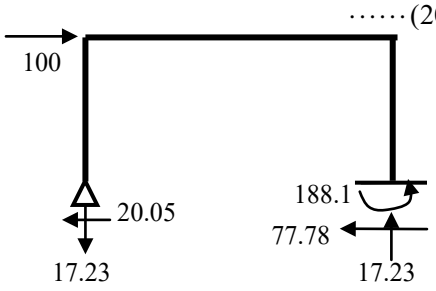
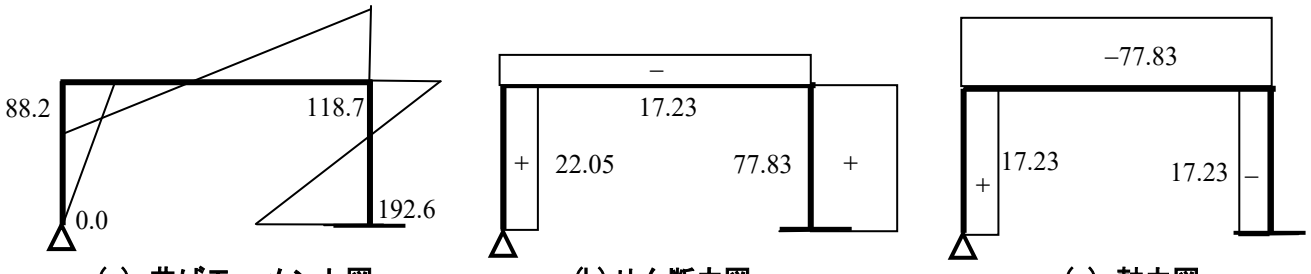


図 5 外力と反力の釣合

表 2 カーニー法による例題 2 の反復解放

	下柱		右梁	外力		左梁	下柱		外力
DF	0.53(0.2)		0.47			0.4	0.6(0.4)		
FEM	−80			80			−160		160
D1	42.4		37.6			64	96		
C1	0		32			18.8	0		−186.4
DS1	−37.3			5.3			−74.6		55.8
D2	2.8		2.5			22.3	33.5		
C2	0		11.2			1.3	0		−53.1
DS2	−10.6			−0.6			−21.2		19.9
D3	−0.3		−0.3			8.0	11.9		
C3	0		4.0			−0.2	0		−17.6
DS3	−3.5			−0.5			−7.0		6.8
D4	−0.2		−0.2			2.7	4.1		
C4			1.4			−0.1	0		−5.7
DS4	−1.1			−0.2			−2.3		2.0
D5	−0.1		−0.2			0.8	1.2		
C5			0.4			−0.1	0		−1.7
DS5	−0.3			−0.1			−0.7		0.8
D6	0		0			0.4	0.4		
計	−88.2		88.4			117.9	−118.7		
		上柱		外力				上柱	外力
DF								(0.4)	
FEM								−160	
C1								48	
DS1								−74.6	
C2								16.8	
DS2								−21.2	
C3								6.0	
DS3								−7.0	
C4								1.8	
DS4								−2.3	
C5								0.6	
DS5								−0.7	
計								−192.6	

表中の矢印は、柱両端による不釣合層モーメントと、その分割を示す



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 6 例題 2 の骨組の断面力図

基礎１１９話 No.4　２層両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重

付 19 話参照
ex84_2

今回は、カーニー法の特徴を以下にまとめ、次に 2 層の骨組を応力解析し、カーニー法の解析手順をより深く理解する。

R51：カーニー法の解析手法の特徴

１：層方程式としての連立方程式を解く必要がない

２：一般の固定法では、節点移動がある場合には層数分の表計算が必要となるが、カーニー法では、部材荷重があっても一回の表計算で解が求められる

３：節点移動がある場合、カーニー法が断然有利である

４：欠点として収束が遅く、一般の固定法では 3，4 回程度の反復で収束するが、カーニー法では、7、8 回の反復が必要となる

５：結果は一般の固定法と同様、分割率の計算誤差、計算過程の丸目誤差、反復計算の打切り誤差を含む

3）両端固定 2 層ラーメン＋柱頭水平荷重

ex84_2

この骨組は 2 層の対称構造物に水平力が加わっており、変形状態・応力状態共に逆対称となる(基礎１１３話の課題 1 と同一例題)。

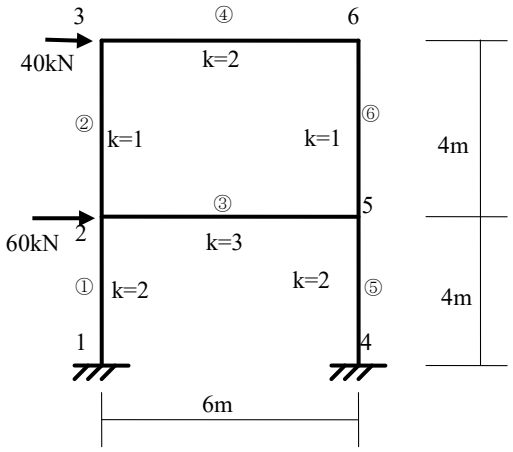


図 7 例題 3 水平力の加わる 2 層骨組

Ⅰ：逆対称部材③と④の有効剛比を求める

逆対称部材である部材 3 と 4 の有効剛比を以下に示す。

$$\bar{k}_3 = 1.5k_3 = 4.5; \quad \bar{k}_4 = 1.5k_4 = 3.0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

Ⅱ：節点 2 と 3 における分割率を計算

節点 2:

$$DF_1 = \frac{2}{2+1+4.5} = 0.27; \quad DF_2 = \frac{1}{2+1+4.5} = 0.13$$

$$DF_3 = \frac{4.5}{2+1+4.5} = 0.60 \qquad \cdots(22)$$

節点 3:

$$DF_2 = \frac{1}{1+3} = 0.25; \quad DF_4 = \frac{3}{1+3} = 0.75 \qquad \cdots\cdots(23)$$

Ⅲ：第 1 層と第 2 層、各々の強制変位による層分割率を計算

層モーメントに対する分割率は逆対称であることから、解析に使用する柱は各層 1 本である。また、柱両端に分割されることから、以下のようになる。

$$DFS_1 = 0.5; \quad DFS_2 = 0.5 \qquad \cdots\cdots(24)$$

Ⅳ：水平外力と釣合う層モーメントを求め、固定端モーメントを計算する

層せん断力と外力との釣合より、各層に生じる層せん断力、あるいは層モーメントは以下のようである。

$$\left.\begin{aligned} Q_2 &= 40kN; \\ M_2 &= 40\cdot 4 = 160kNm \\ Q_1 &= 40+60 = 100kN; \\ M_1 &= 100\cdot 4 = 400kNm \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(25)$$

逆対称条件を考慮すると、層モーメントに対する柱の基本応力は次のとおりである。

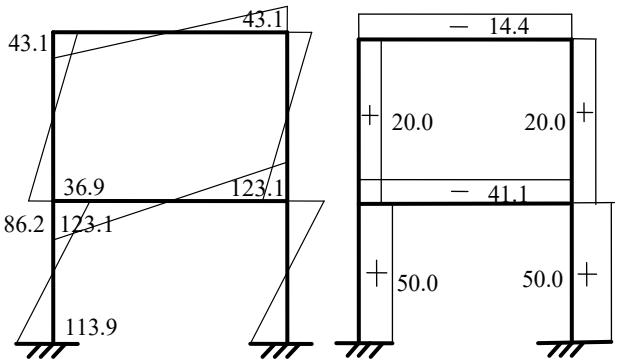
$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= -100kNm; \quad M_{21} = -100kNm \\ M_{23} &= -40kNm; \quad M_{32} = -40kNm \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(26)$$

以上で、節点モーメントに対する分割率、層モーメントに対する分割率、また層モーメントに対する柱の基本応力は、全て求まったことになり、準備計算は終了である。

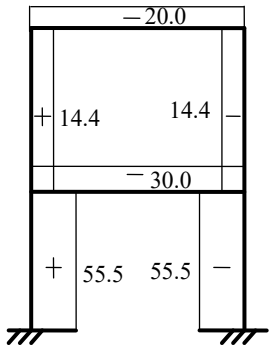
Ⅴ：柱に固定端モーメントを加えた際の外力と釣合う材端モーメントを、固定法の表で求める

次に、これらの情報を元に、また逆対称条件を考慮して、カーニー法により、解を求めることになる。右の表を用いて計算を行う。

得られた結果は、材端モーメントとなっており、材端モーメントから曲げモーメント図、せん断力図、軸力図が次のように得られる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 8 例題 3 の断面力図

表 3 カーニー法による例題 3 の表

	下柱		右梁	外力
DF	0.25(0.5)		0.75	
FEM	−40			40
D1	10		30	
C1	9.1			−42.3
DS1	−21.2			12.1
D2	3		9.1	
C2	2.9			−13.2
DS2	−6.6			3.7
D3	0.9		2.8	
C3	0.9			−3.9
DS3	−2			1.1
D4	0.3		0.8	
C4	0.3			−1.4
DS4	−0.7			0.4
D5	0.1		0.3	
C5	0.1			−0.3
DS5	−0.2			0.1
D6			0.1	
計	−43.1		43.1	
	下柱	上柱	右梁	外力
DF	0.27(0.5)	0.13(0.5)	0.6	
FEM	−100	−40		140
D1	37.8	18.2	84	
C1	0	5		−56.7
DS1	−28.4	−21.2		44.6
D2	12	5.8	26.8	
C2	0	1.5		−18
DS2	−9	−6.6		14.1
D3	3.8	1.8	8.5	
C3	0	0.5		−5.7
DS3	−2.9	−2		4.4
D4	1.2	0.6	2.6	
C4	0	0.2		−1.8
DS4	−0.9	−0.7		1.4
D5	0.4	0.2	0.8	
C5		0		−0.6
DS5	−0.3	−0.2		0.5
D6	0.1	0	0.4	
計	−86.2	−36.9	123.1	
		上柱		
DF		(0.5)		
FEM		−100		
C1		18.9		
DS1		−28.4		
C2		6		
DS2		−9		
C3		1.9		
DS3		−2.9		
C4		0.6		
DS4		−0.9		
C5		0.2		
DS5		−0.3		
計		−113.9		

表中の青矢印は、柱両端による不釣合層モーメントの集合、赤矢印は、節点不釣合モーメントの集合を表す

基礎１２０話 No.1 両端ピン支持門型ラーメン＋柱等分布水平荷重

付 26 話参照
ex120_1

今回から固定法の演習を行い、解析手法をより深く理解する。まず、図１に示すピン支持門型ラーメンに等分布の水平荷重が加わる場合の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求める。課題１のモデルは対称形状・逆対称荷重であり、逆対称の変形・応力状態となる。ここでは逆対称条件を用いて、骨組半分を用いて解析を行う。

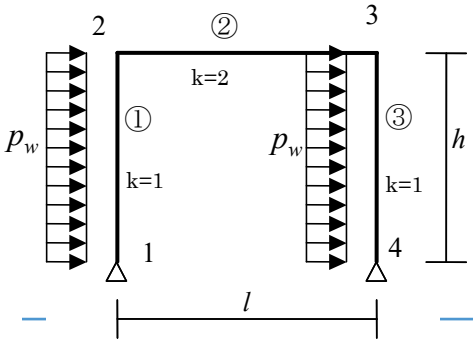


図１課題１水平等分布荷重を受ける両端ピン支持門型ラーメン

1）両端ピン支持の門型ラーメン＋柱水平等分布荷重　ex120_1

Ⅰ：部材荷重のある部材の基本応力を求める

柱部材①の基本応力を求める。

$$C_{12}=0;\quad C_{21}=C+0.5C=1.5C \leftarrow C=\frac{p_w h^2}{12};\quad M_0=\frac{p_w h^2}{8}=1.5C$$

$$Q_d=Q_{12}=\frac{p_w h}{2}-\frac{1.5C}{h}=\frac{9C}{2h};\quad Q_u=Q_{21}=-(\frac{p_w h}{2}+\frac{1.5C}{h})=-\frac{15C}{2h}$$

Ⅱ：部材の有効剛比を求める

部材①は一端ピン支持の有効剛比を、また変形と応力が逆対称となることから部材②は、逆対称部材として有効剛比を求める。

$$\bar{k}_1=0.75k_1=0.75;\quad \bar{k}_2=1.5k_2=3.0$$

Ⅲ：節点 2 での分割率を求める

各部材の有効剛比を用いると、節点 2 における分割率は、次のとおりである。ここで、DF_c は柱、DF_b は梁の分割率を表す。

$$DF_c=0.75/(0.75+3.0)=0.2;\quad DF_b=3.0/(0.75+3.0)=0.8$$

Ⅳ：柱の部材荷重に対する応力解析を固定法の表で行う

まず、固定端モーメントに対する応力解析を、反復計算を用いて行う。ただし、C を 100 として計算を行うと、固定端モーメントは $C_{21}=1.5C=150$ となる。表 1 のように未知変数が節点 2 の φ_2 一つであるため、反復計算を行う必要がなく、一回の反復計算で終了である。

Ⅴ：得られた材端モーメントから、部材の断面力を求める

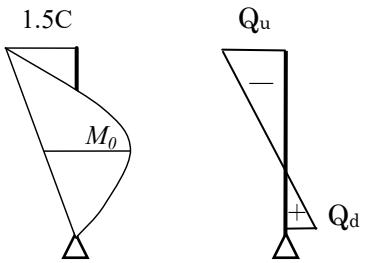
得られた材端モーメントから、柱中央部の曲げモーメントは

$$M_c=1.5C-0.5\cdot 1.2C=0.9C$$

となり、また、柱のせん断力は次のように得られる。

$$Q_d=\frac{9C}{2h}+\frac{(1.5-1.2)C}{h}=\frac{9.6C}{2h}=0.4p_w h$$

$$Q_u=-\frac{15C}{2h}+\frac{0.3C}{h}=\frac{14.4C}{2h}=0.6p_w h$$



曲げモーメント図　　せん断力図

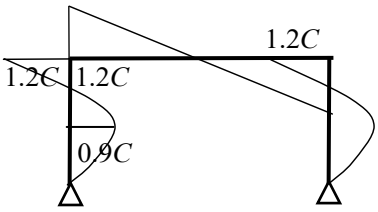
図 2 中間荷重による柱の基本応力

表 1 課題 1 の固定法の表

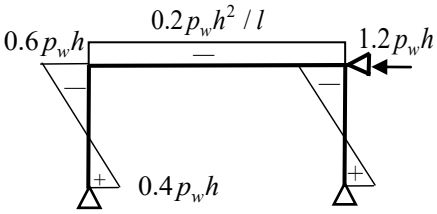
	下柱	右梁	外力
DF	0.2	0.8	
FEM	150	0	−150
D1	−30	−120	
C1	0		0
D2			
C2			
D3			
C3			
D4			
計	120	−120	

Ⅵ：各断面力図を描く

以上の結果より、曲げモーメント図とせん断力図を右に示す。せん断力図より、仮想支持点には水平反力が生じていることが分かる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 3 仮想支持点を有する骨組の断面力図

Ⅶ：層せん断力と外力との釣合

上記の反力を消去するために、骨組に反力とは逆方向の外力を加える。まず、強制変位である部材角を与えると、

$$\psi = -100X_1$$

部材①と③には、次に示す基本応力が発生する。ただし、ここでは、X_1 を 1 とし、また C を 100 とする。

$$M_{12} = 0; \quad M_{21} = -50 \cdot k_1 \cdot X_1 = -50$$

Ⅷ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

上の基本応力を用いて、表 2 の固定法で応力解析を行う。

Ⅸ：材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

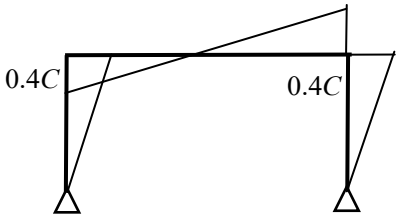
上記の解析結果を用いて、強制変位による応力状態を以下に図示する。

ただし、柱に生じるせん断力は、次式で与えられる。

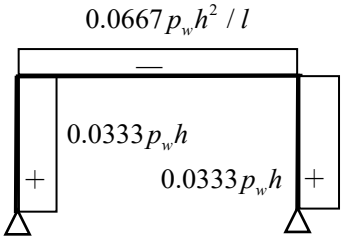
$$Q_u = Q_d = \frac{0.4C}{h} = \frac{0.4p_w h^2}{12h} = 0.0333p_w h$$

表 2 課題 1 の固定法の表その 2

	下柱	右梁	外力
DF	0.2	0.8	
FEM	−50	0	50
D1	10	40	
C1	0		0
D2			
C2			
D3			
C3			
D4			
計	−40	40	



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 4 強制変位による応力

Ⅹ：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 の値を求める

柱頭における層せん断力と水平外力との釣合を考える。図 5 には、柱頭部分で切断したときの水平方向のせん断力と外力を示す。下式を解いて、X_1 を求める。

$$1.2P_w h - 2(0.0333\bar{P}_w h \cdot X_1) = 0 \rightarrow$$
$$0.0667X_1 = 1.2 \rightarrow X_1 = 18.0$$

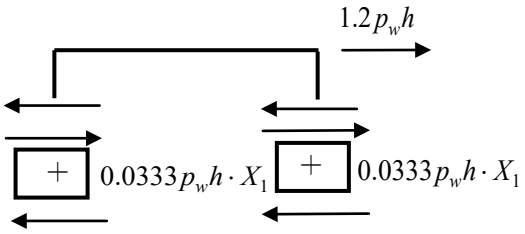


図 5 柱頭での水平方向の力の釣合

上式上で、第 1 項は固定端モーメントによって生じる仮想支持点の反力に釣合う水平外力であり、第 2 項は、強制変位によって生じる柱のせん断力である。

以降の解析は、次回お話しする。

基礎１２１話 No.2　前回課題の続き 対称骨組の半解析モデル

付 26 話参照
ex120_1

今回は、前回の続きで、図 1 の柱に等分布の部材荷重が加わる骨組の応力解析である。

Ⅸ：未定定数を断面力図に掛け、その値に節点移動のない場合の応力を加えて実断面力図を求める

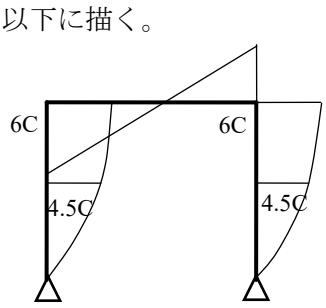
図 4 の断面力分布に、求めた X_1 の値を掛け、図 3 の断面力と重ね合わせることで、実際の応力状態が得られる。以下に材端モーメントと柱中央の曲げモーメントを求める。

$$M_{12}=0;\quad M_{21}=1.2C-0.4C\cdot 18.0=1.2C-7.2C=-6.0C$$
$$M_c=-0.9C+0.5\cdot(-0.4C)\cdot 18.0=-0.9C-3.6C=-4.5C$$

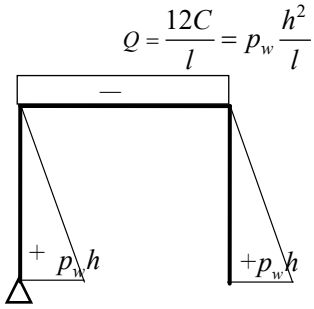
柱のせん断力は、図 3 のせん断力 Q_u，Q_d に、図の強制変位によって生ずるせん断力を加えれば良い。

$$Q_d=0.4p_wh+0.0333p_wh\cdot 18.0=p_wh;\quad Q_u=-0.6p_wh+0.0333p_wh\cdot 18.0=0$$

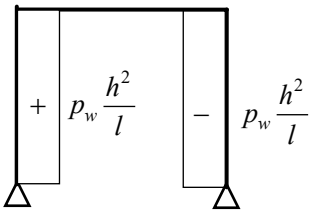
次に、得られた各断面力から、曲げモーメント図、せん断力図と軸力図を以下に描く。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 6 課題 1 の骨組の断面力図

上の各断面力から、反力が図 7 のように得られ、外力と反力によって上下方向の釣合、水平方向の釣合が得られていることが分かる。また、節点 1 に関するモーメントの釣合は

$$M_1=p_wh\frac{h}{2}+p_wh\frac{h}{2}-p_w\frac{h^2}{l}l\to 0$$

となり、これも釣合が満たされている。

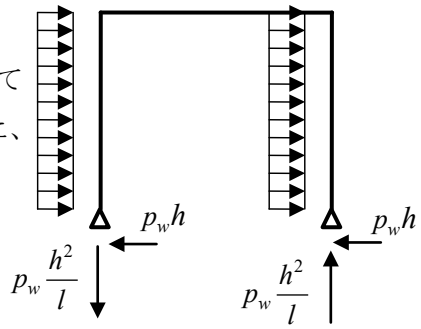
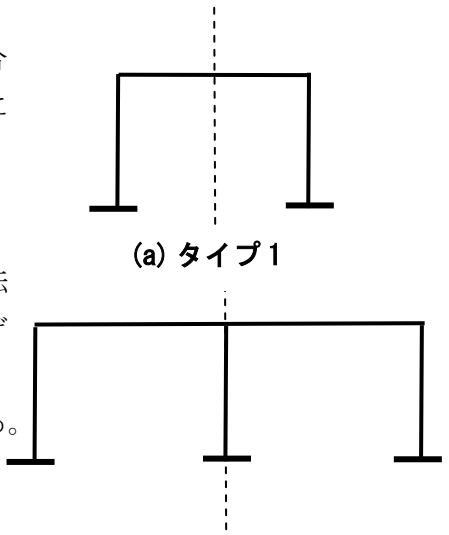


図 7 反力と外力十釣合

次に、以前まとめた対称条件と逆対称条件について、さらに複雑な骨組を解析し、検証してみよう。基礎 107 話で整形骨組を 2 つのタイプに分類し、対称条件と逆対称条件を考えた。復習のために、ここでも図 8 のように整形骨組を 2 つに分類し、条件の設定方法をまとめる。対称条件や逆対称条件を考える際、骨組形状を次の 2 つに分類する。タイプ 1

は、中心軸が梁の真ん中にある場合、タイプ 2 は柱の図芯軸にある場合である。これらの骨組は、基本的には、対称条件あるいは逆対称条件によって、中心軸を境に半分の骨組で解析を行うことができる。



(a) タイプ 1

(b) タイプ 2

図 8 2 種の対称形状と対称剛性を有する骨組

１）タイプ１の骨組(図 8(a))

1.1:**対称条件：**中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じで、回転方向が逆となる。柱に部材角は生じない。中心軸上に存在する梁の曲げ剛性は、有効剛比 $k_e = 0.5k$ を用いる。

1.2:**逆対称条件：**中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じとなる。材中央に中心軸を有する梁部材は有効剛比 $k_e = 1.5k$ を用いる。

２）タイプ 2 の骨組(図 8(b))

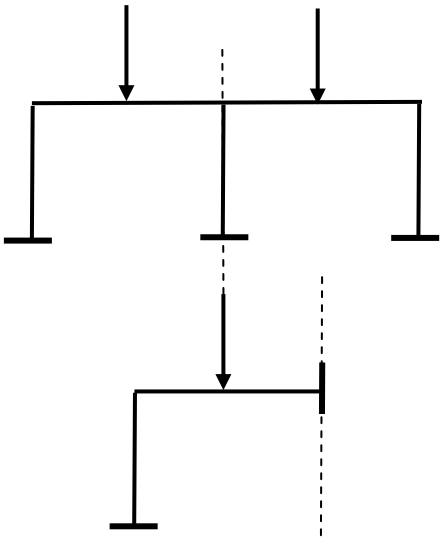
2.1:**対称条件：**中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じで、回転方向は逆となる。柱に部材角は生じない。中心軸上の柱には断面力は発生しない。中心軸上の節点回転角はゼロとなる。解析モデルは図 9(a)の下となる。

2.2:**逆対称条件：**中心軸を挟んで対応する節点回転角の値は同じとなる。骨組を 2 つに分割するため、材中央に中心軸を有する柱部材は、曲げ剛性を半分に、また水平荷重も 1/2 にする。解析モデルは図 9(b)の下となる。

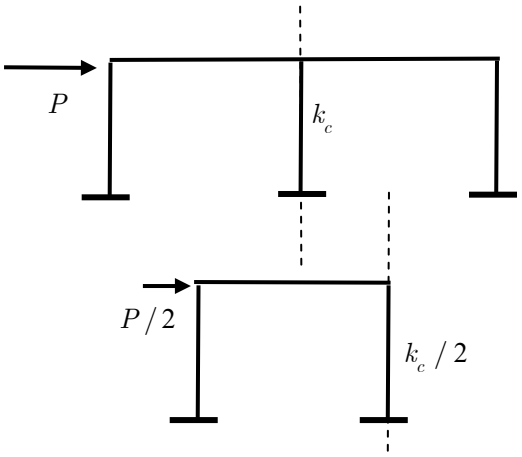
以上の対称条件や逆対称条件を使用する場合、以下の有効剛比を使用する。

表 3 固定法における有効剛比一覧

	一端ピン	対称境界	逆対称境界
有効剛比	3k/4	k/2	3k/2



(a) 対称条件を用いた解析モデル



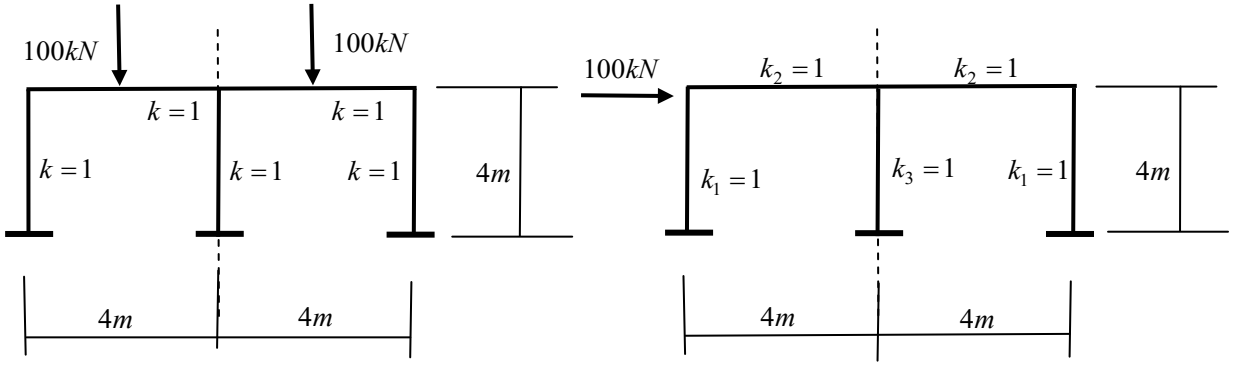
(b) 逆対称条件を用いたモデル

図 9 タイプ 2 の骨組解析モデル

基礎１２２話 No.3　対称両端固定支持門型ラーメン＋対称・逆対称荷重モデル

付 26 話参照
ex122_1; ex122_2

今回は、前回まとめた対称条件と逆対称条件について、実際に骨組を解析して検証してみよう。解析モデルは図 10 に示すように、タイプ 2 の骨組である。タイプ 1 については既に多く扱ってきた。



(a) 対称モデル　　(b)逆対称モデル

図 10 タイプ 2 の骨組の対称・逆対称条件用の課題 2 解析モデル

2) 両端固定支持の骨組　タイプ 2 の対称モデル　　ex122_1

まず、図 10(a)の対称モデルの解析を行う。このモデルは対称条件より、図 11 に示す骨組を解析することになる。対称変位・対称断面力となる骨組であることより、節点移動はない。

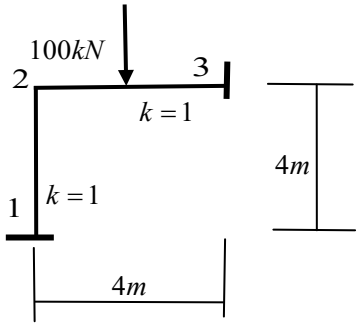


図 11 課題 2(a)の対称解析モデル

Ⅰ：部材荷重に対する基本応力を求める

梁に部材荷重が加わっていることから、基本応力を求める。

$$C=\frac{Pl}{8}=\frac{100\cdot 4}{8}=50kNm;\quad M_0=\frac{Pl}{4}=100kNm;\quad Q=\frac{P}{2}=50kN$$

Ⅱ：節点 2 での分割率を求める

節点 2 における分割率を計算する。

$$DF_c=1/(1+1)=0.5$$
$$DF_b=1/(1+1)=0.5$$

Ⅲ：部材荷重に対する応力解析を固定法の表で行う

上の基本応力を用いて、右の表で固定法により応力解析を行う。

Ⅳ：材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を描く

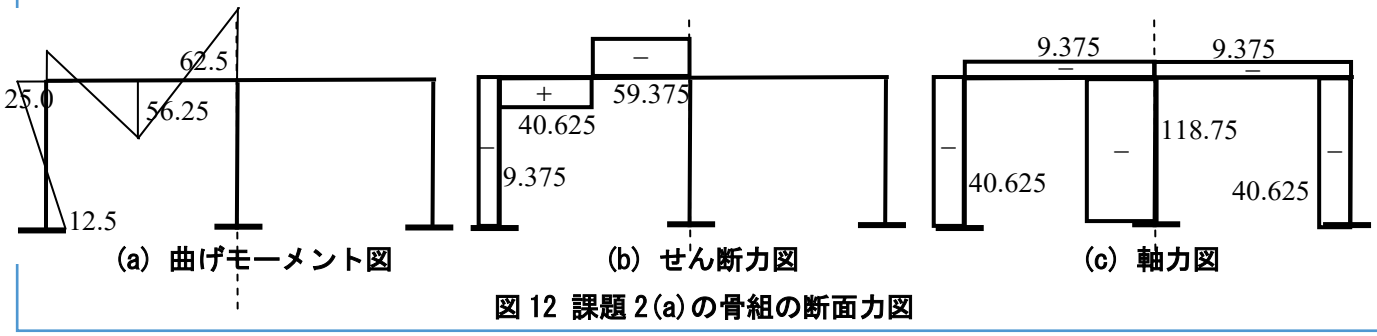
梁中央の曲げモーメントは、

$$M_c=100-0.5(62.5+25)=56.25$$

表 5 課題 2(a)の固定法の表

	下柱	上柱	右梁	外力		左梁
DF	0.5		0.5			
FEM	0		−50	50		50
D1	25		25			0
C1	0			0		12.5
D2						
C2						
D3						
C3						
D4						
計	25		−25			62.5
		上柱				
FEM						
C1		12.5				
C2						
C3						
計		12.5				

となり、固定法で求めた材端モーメントと上記の梁中央の曲げモーメントより、以下の断面力図が得られる。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図　　(c) 軸力図

図 12 課題 2(a)の骨組の断面力図

3) 両端固定支持の骨組　タイプ 2 の逆対称モデル　　ex122_2

このモデルは逆対称条件より、図 13 に示す骨組を解析することになる。逆対称では水平荷重は半分の $50kN$ となり、対称軸上の柱の曲げ剛性も半分となる。この柱の有効剛比は図のように $k_3'=0.5$ となる。

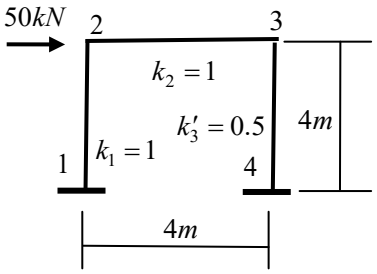


図 13 課題 2(b)の逆対称解析モデル

Ⅰ：節点 2 と 3 での分割率を求める

$$_2DF_c=1/(1+1)=0.5;\quad _2DF_b=1/(1+1)=0.5$$
$$_3DF_c=0.5/(1+0.5)=0.333;\quad _3DF_b=1/(1+0.5)=0.667$$

Ⅱ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたとき、柱に生じる固定端モーメントを計算する

部材角による材端モーメントは、$\psi=-100X_1$ として強制変位を与えると、部材①と③には、次に示す基本応力が生じる。ただし、ここでは X_1 を 1 とする。

$$M_{12}=-100\cdot k_1\cdot X_1=-100;\quad M_{21}=-100\cdot k_1\cdot X_1=-100$$
$$M_{43}=-100\cdot k_3'\cdot X_1=-50;\quad M_{34}=-100\cdot k_3'\cdot X_1=-50$$

Ⅲ：柱に強制変位、つまり部材角を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する。以降の解析は次回行う。

表 6 課題 2(b)の固定法の表

	下柱	上柱	右梁	外力		左梁	下柱	上柱	外力
DF	0.5		0.5			0.667	0.333		
FEM	−100		0	100			−50		50
D1	50		50			33.33	16.67		
C1	0		16.67	−16.67		25	0		−25
D2	−8.34		−8.34			−16.67	−8.33		
C2	0		−8.34	8.34		−4.17	0		4.17
D3	4.17		4.17			2.78	1.39		
C3	0		1.39	−1.39		2.09	0		−2.09
D4	−0.7		−0.7			−1.39	−0.7		
計	−54.87		54.85			40.97	−40.98		
		上柱						上柱	
FEM		−100						−50	
C1		25						8.34	
C2		−4.17						−4.17	
C3		2.09						0.7	
計		−77.08						−45.13	

基礎１２３話 No.4　２層・２スパン両端固定支持骨組＋柱頭水平荷重モデル

付 26 話参照
ex122_2; ex123_1

今回は、図 13 の逆対称モデルに関する解析の続きである。

Ⅳ：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 の値を求める

以上の結果を用いて、柱頭における層せん断力と水平外力との釣合を考える。同図より、水平方向の力の釣合は次式となり、未定係数が得られる。

$$Ph-(54.87+77.08+40.98+45.13)X_1=0 \rightarrow$$
$$218.06X_1=200 \rightarrow \quad X_1=0.9172$$

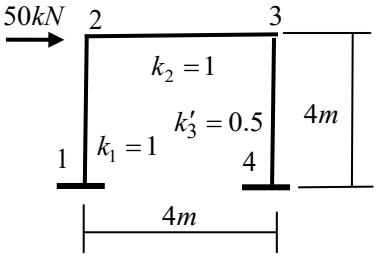


図 13 課題 2(b)の逆対称解析モデル

Ⅴ：未定定数を、強制変位による断面力図に掛け、修正した断面力図を求める

固定法で求めた材端モーメントに $X_1=0.9172$ を掛けることで、層せん断力の釣合が得られることになる。図 14 に曲げモーメント分布を描く。この曲げモーメント分布は、図 12 の逆対称モデルの解であり、従って、図 15 に実際の曲げモーメント分布を示す。

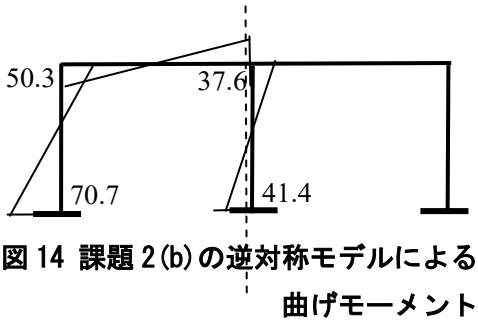


図 14 課題 2(b)の逆対称モデルによる曲げモーメント

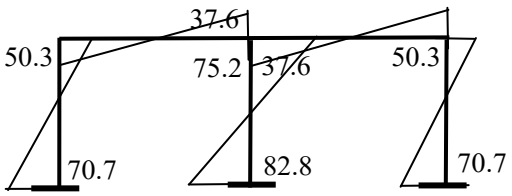


図 15 課題 2(b)の全部材の曲げモーメント

次に、図 16 示す 2 層 2 スパンの骨組を、固定法を用いて解析する。両スパンは 6m とし、階高は 2 層とも 4m とする。梁・柱の部材は全て同じとすると、同図のような剛比となる。

4) 2 層・2 スパン両端固定支持の骨組　タイプ 2 の逆対称モデル　　ex123_1

課題 3 の解析モデルは対称骨組に逆対称の荷重が加わっていることから、逆対称変形・逆対称の断面力分布となる。対称軸が柱を通る場合、図 17 に示す半分の骨組に変換して解析すれば良い。

逆対称部材である中央の柱は、有効剛比として、前例と同様、剛比の 1/2 を用いる。

Ⅰ：節点 2、3、5、6 での分割率を求める

逆対称となる柱の剛比を $0.5k$ とする有効剛比を用いて(図 17 参照)、各節点の分割率を求める。

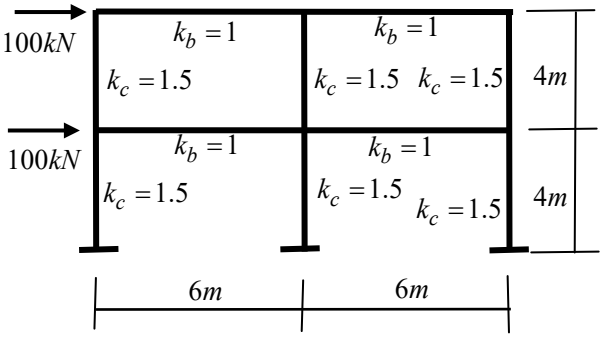


図 16 課題 3 の解析モデル

節点：2　$DF_{C1}=DF_{C2}=\dfrac{1.5}{1.5+1.5+1}=0.375;\quad DF_{b1}=\dfrac{1}{1.5+1.5+1}=0.25$

節点：3　$DF_{c2}=\dfrac{1.5}{1+1.5}=0.6;\quad DF_{b2}=\dfrac{1}{1+1.5}=0.4$

節点：5　$DF_{C3}=DF_{C4}=\dfrac{0.75}{0.75+0.75+1}=0.3;\quad DF_{b1}=\dfrac{1}{0.75+0.75+1}=0.4$

節点：6　$DF_{c4}=\dfrac{0.75}{1+0.75}=0.429;\quad DF_{b2}=\dfrac{1}{1+0.75}=0.571$

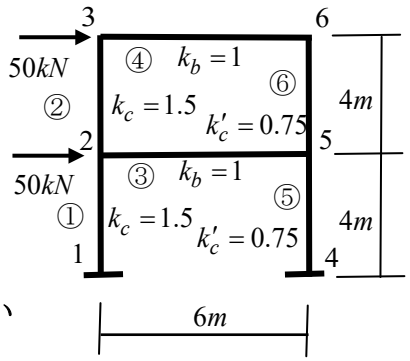


図 17 課題 3 の逆対称解析モデル

Ⅱ：柱に強制変位を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

強制変位である部材角 $\psi_1=-100X_1;\quad \psi_2=-100X_2$ を各々与えると、部材①、②及び⑤、⑥には、次に示す基本応力が発生する。ただし、ここでは各々 X_1 を 1、X_2 を 1 として与える。

部材：①、⑤：$M_{12}=-100\cdot k_c\cdot X_1=-150;\quad M_{21}=-100\cdot k_c\cdot X_1=-150$
$M_{45}=-100\cdot k'_c\cdot X_1=-75;\quad M_{54}=-100\cdot k'_c\cdot X_1=-75$

部材：②、⑥：$M_{23}=-100\cdot k_c\cdot X_2=-150;\quad M_{32}=-100\cdot k_c\cdot X_2=-150$
$M_{56}=-100\cdot k'_c\cdot X_2=-75;\quad M_{65}=-100\cdot k'_c\cdot X_2=-75$

Ⅲ：各層の柱に各々強制変位を与えたときの材端モーメントを、固定法の表を用いて計算する

上の基本応力を用いて、固定法で応力解析を行う。表 7(a)が未定係数 X_1 に対して、次回に示す表 7(b)が同じく X_2 に対する解析結果である。

表 7(a) 課題 3 の強制変位 X_1 による固定法の表

	下柱		右梁	外力		左梁	下柱	上柱	外力
DF	0.6		0.4			0.571	0.429		
FEM	0			0			0		0
D1	0		0			0	0		
C1	28.13			−28.13			11.25		−11.25
D2	−16.88		−11.25			−6.42	−4.83		
C2	−2.82		−3.21	6.03		−5.63	−2.82		8.45
D3	3.62		2.41			4.82	3.63		
C3	2.29		2.41	−4.7		1.21	0.65		−1.86
D4	−2.82		−1.88			−1.06	−0.8		
計	11.52		−11.52			−7.08	7.08		
	下柱	上柱	右はり	外力		左はり	下柱	上柱	外力
DF	0.375	0.375	0.25			0.4	0.3	0.3	
FEM	−150			150		0	−75	0	75
D1	56.25	56.25	37.5			30	22.5	22.5	
C1	0	0	15	−15		18.75	0	0	−18.75
D2	−5.63	−5.63	−3.75			−7.5	−5.63	−5.63	
C2	0	−8.44	−3.75	12.19		−1.88	0	−2.42	4.3
D3	4.57	4.57	3.05			1.72	1.29	1.29	
C3	0	1.81	0.86	−2.67		1.53	0	1.82	−3.35
D4	−1	−1	−0.67			−1.34	−1.01	−1.01	
計	−95.81	47.56	48.24			41.28	−57.85	16.55	
		上柱						上柱	
FEM		−150						−75	
C1		28.13						11.25	
C2		−2.82						−2.82	
C3		2.29						0.65	
計		−122.4						−65.92	

基礎１２４話 No.5　前回課題の続き
２層・２スパン両端固定支持

付 26 話参照
ex123_1

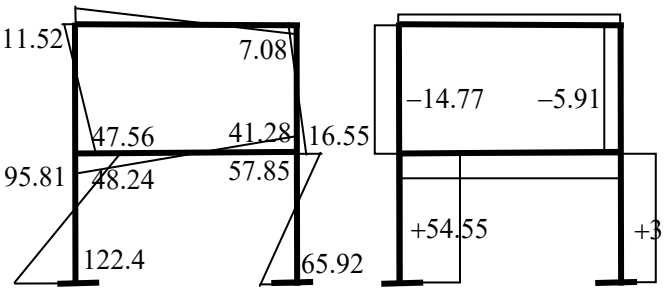
今回は、前回の逆対称モデルの解析の続きである。

表 7(b)　課題 3 の強制変位 X_2 による固定法の表

	下柱		右梁	外力		左梁	下柱	上柱	外力
DF	0.6		0.4			0.571	0.429		
FEM	−150			150			−75		75
D1	90		60			42.83	32.18		
C1	28.13		21.42	−49.55		30	11.25		−41.25
D2	−29.73		−19.82			−23.55	−17.7		
C2	−11.25		−11.78	23.03		−9.91	−5.23		15.14
D3	13.82		9.21			8.64	6.5		
C3	4.1		4.32	−8.42		4.61	2.46		−7.07
D4	−5.05		−3.37			−4.04	−3.03		
計	−59.98		59.98			48.58	−48.57		
	下柱	上柱	右梁	外力		左梁	下柱	上柱	外力
DF	0.375	0.375	0.25			0.4	0.3	0.3	
FEM	0	−150		150			0	−75	75
D1	56.25	56.25	37.5			30	22.5	22.5	
C1	0	45	15	−60		18.75	0	16.09	−34.84
D2	−22.5	−22.5	−15			−13.94	−10.45	−10.45	
C2	0	−14.87	−6.97	21.84		−7.5	0	−8.85	16.35
D3	8.19	8.19	5.46			6.54	4.91	4.91	
C3	0	6.91	3.27	−10.18		2.73	0	3.25	−5.98
D4	−3.82	−3.82	−2.55			−2.39	−1.79	−1.79	
計	38.12	−74.84	36.71			34.19	15.17	−49.34	
		上柱						上柱	
FEM		0						0	
C1		28.13						11.25	
C2		−11.25						−5.23	
C3		4.1						2.46	
計		20.98						8.48	

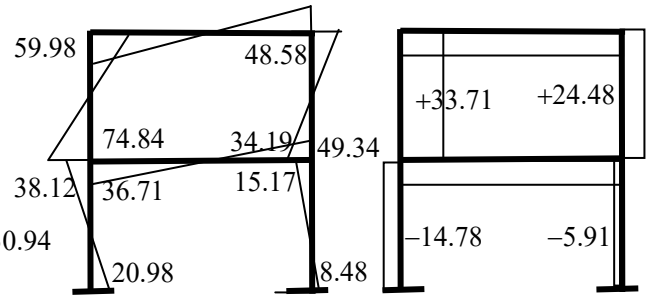
Ⅳ : 求めた材端モーメントから曲げモーメント図とせん断力図を求める

上で求めた材端モーメントより、曲げモーメント図とせん断力図を次のように描く。



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 18(a)　強制変位 X_1 による断面力図



(a) 曲げモーメント図　　(b) せん断力図

図 18(b)　強制変位 X_2 による断面力図

Ⅴ：柱のせん断力と外力との水平方向釣合より、未定定数 X_1 と X_2 の値を求める

各層の層せん断力と外力との釣合より次式が得られ、整理すると、

$$\left.\begin{array}{l}\text{第 1 層の釣合：}\quad (54.55+30.94)X_1-(14.77+5.91)X_2=50+50\\ \text{第 2 層の釣合：}\quad -(14.78+5.91)X_1+(33.71+24.48)X_2=50\end{array}\right\}\rightarrow\quad \begin{array}{l}85.49X_1-20.68X_2=100\\ -20.69X_1+58.19X_2=50\end{array}$$

となり、上式を解くと、次のように未定係数が決定される。

$$X_1=1.5072;\quad X_2=1.3952$$

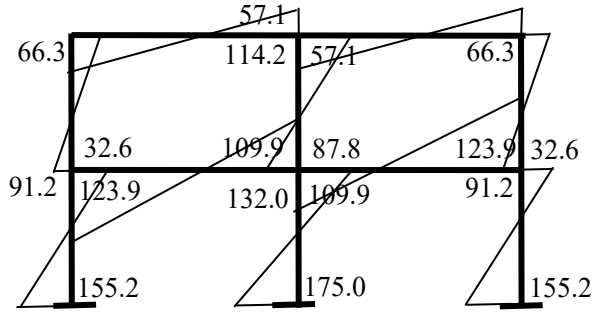
Ⅵ：未定定数を断面力図に掛け、修正した断面力図を求める

上の未定係数を用いて、以下のように材端モーメントを計算する。ここでは、その一部を示すので、後は読者が独自に計算されたい。

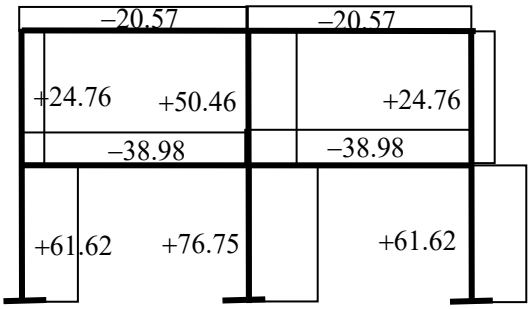
$$M_{12}=-122.4\cdot1.5072+20.98\cdot1.3952=-155.21$$
$$M_{21}=-95.82\cdot1.5072+38.12\cdot1.3952=-91.23$$
$$M_{23}=47.56\cdot1.5072-74.84\cdot1.3952=-32.73$$
$$M_{32}=11.52\cdot1.5072-59.98\cdot1.3952=-66.32$$

各部材の断面力は、これまで学習した方法で求められる。

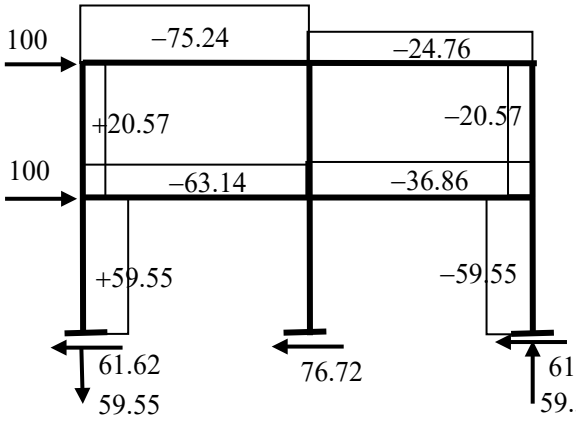
ただし、これまでに求めた断面力分布は、逆対称条件を用いて解析した結果であり、実際は、右半分の断面力を加える必要がある。以下に、断面力が逆対称であることより、以下の図として骨組全体の曲げモーメント分布、せん断力分布、軸力分布を示す。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力と反力図

図 19 課題 3 の骨組の断面力図

基礎１２５話　線形構造力学 まとめ

今回、これまで学んだ構造力学の中で、重要な項目をまとめておく。ここでは全て平面応力状態を仮定するが、右手右ねじの座標系と単位系を意識することが大切である。

１：弾性論の基礎として応力と歪の関係と変位と歪の関係がある。

線形の構造力学とは、上記 2 つの関係が線形であり、線材では軸方向応力 σ_x と軸ひずみ ε_x のみ考える。ここで、$u(x),v(x)$ は各々軸方向変位と軸方向に直交するたわみを表し、E_x は材料定数である。

応力と歪の関係：　$\sigma_x = E_x\varepsilon_x$

変位と歪の関係：　$\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx} - y\dfrac{d^2v}{dx^2}$

２：梁理論：ベルヌーイ・オイラー梁では、**平面保持の仮定と法線保持の仮定**の成立を前提としている。

３：断面性能と断面力

軸力と曲げを受ける部材内の応力と断面力

１：軸力による断面内応力は一様で σ_0

２：曲げによる断面内応力は一次式で σ_b

３：軸力の定義式：$N = \int_A \sigma_x dA$

４：曲げモーメントの定義式：$M = \int_A \sigma_x y dA$

５：軸力と曲げを同時に受ける断面内応力：$\sigma_x = \sigma_0 + \sigma_b = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M}{I_z}y$

６：縁応力：$\sigma_t = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M}{Z_t}$;　$\sigma_c = \dfrac{N}{A} - \dfrac{M}{Z_c}$

断面性能とその機能

１：$A = \int_A dA$：断面積；　軸方向剛性に関係

２：$S_z = \int_A y dA$：断面一次モーメント；　図芯を求める

３：$I_z = \int_A y^2 dA$：断面二次モーメント；　曲げ剛性に関係

４：$Z_t = \dfrac{I_z}{y_t}$; $Z_c = \dfrac{I_z}{y_c}$：断面係数；　断面内最大応力である縁応力に関係

y_t と y_c は断面内で図芯位置から断面縁までの距離

４：力の釣合：力とモーメントはベクトルであり、ベクトルは矢印で表す。静止する物体は力の釣合が常に満たされる。両方向の力の釣合とモーメントの釣合、この 3 種の釣合式がある。

５：図芯と中立軸：図芯は断面の中心で、具体的には断面一次モーメントがゼロとなる位置を表す。従って、応力の状態で変化しない。一方、中立軸は軸方向応力がゼロの位置であり、曲げモーメントと軸

力の比率によって、その位置は変化する。

６：断面内の応力分布は、梁理論では図芯に垂直な面の応力分布は軸力による一様分布、曲げによる 1 次式分布、曲げにより生じるせん断応力分布がある。図芯に対し斜めの面ではモールの応力円で考える。

７：骨組と境界：骨組モデルとは、図芯を用いて線材の構造物の形状を表す。骨組の支持状態は、固定、ピン、ローラーがある。

８：断面力による力の釣合と梁の微分方程式

１：断面力による力の釣合

１：せん断力と鉛直荷重の関係：　$\dfrac{dQ}{dx}=-p_w(x)$

２：せん断力と曲げモーメントの関係：$\dfrac{dM}{dx}=Q$

３：曲げモーメントと鉛直荷重の関係：$\dfrac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)$

２：梁の微分方程式　$EI\dfrac{d^2v}{dx^2}=-M(x)$

９：構造物の応力状態は、曲げモーメント図(M 図)、せん断力図(Q 図)、軸力図(N 図)で表す。

10：静定構造と不静定構造：静定構造は、断面力による力の釣合から応力状態が求められる。一方、不静定構造では、断面力の釣合と梁の微分方程式を同時に解いて応力状態を求める。

11：トラスの応力解析：トラスは一般に直線材で三角形を構成、接合部はピン接合、力を受けると軸力のみ生じる。軸力分布を求める手法として**節点法と切断法**がある。

12：静定構造のたわみは梁の微分方程式を解く：先に曲げモーメントが求められると、梁の微分方程式を解くことで、たわみや節点変位が得られる。

13：モールの定理と仮想仕事の原理：静定構造のたわみや節点の変位は、モールの定理や、仮想仕事の原理に基づく単位荷重法で求められる。

14：不静定構造の応力解析は応力分布と節点変位を同時に解いて求める。

15：高次の不静定構造物の解析では、たわみ角法、固定法、有限要素法が必要。有限要素法（直接剛性法）はコンピュータの使用を前提。

16：たわみ角法：自由度が少なく座標変換を必要としない。軸方向の伸縮を考慮せず、軸力が自動的に求められない。たわみ角法の基本式は右式で与えられ、節点移動のある場合とない場合に分けられる。釣合式は節点方程式と層方程式で、最終的に連立方程式となる。

$$\begin{cases} M_{ij}=\dfrac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij} \\ M_{ji}=\dfrac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji} \end{cases}$$

17：固定法：仮定はたわみ角法と同じである。応力状態は表形式の反復計算で求められる。節点移動のある場合は、層方程式を解く必要があるが、カーニー法は一度の反復計算で応力が求められる。

$$\begin{cases} M_{ij}=k_k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi_k)-C_{ij} \\ M_{ji}=k_k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi_k)+C_{ji} \end{cases}$$

基礎１２６話 No.1　幾何学的非線形と材料非線形

今回から、骨組の非線形解析についてお話しする。特にここでは、非線形性とは何か、また骨組の非線形挙動とは何かについてお話しし、さらに骨組の安定・不安定について説明する。以前、「弾性論における基本は、次の 2 つの関係である」という話をした。

１：応力と歪の関係

２：変位と歪の関係

ベルヌーイ・オイラー梁では、上の 2 つの関係は次式で表されるように、各々1 つの式となる。左側が応力と歪の関係、右側が変位と歪の関係である。

$$\sigma_x = E_x\varepsilon_x;\quad \varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y = \frac{du}{dx} - y\frac{d^2v}{dx^2}$$

この 2 つの関係が上のように線形であれば、ここから派生する骨組の挙動は線形となる。一方、この関係のどちらかが非線形であれば、この関係から成立する骨組の挙動は非線形性を有する。左側の応力と歪の関係が非線形性を示すと**材料非線形問題**という。右側の変位と歪の関係が非線形性を示すと**幾何学的非線形問題**という。無論両者とも非線形性を示す場合もあり、この種の問題を**混合非線形問題**という。

まず、応力と歪の関係で非線形とは如何なるものか考えてみよう。応力と歪の関係は材料固有の特性を表し、例えば、代表的な構造用材料である鋼材は図 1 のような履歴となる。同図の応力と歪の関係で、線形ではヤング係数 E_x は定数であり、材料によって異なる値を採る。例えば、鉄骨構造では $E_x = 20500kN/cm^2$ である。一方、非線形関係になると、この関係は骨格曲線で表される。鉄骨では比較的力学で扱い易い形をしており、特にコンピュータで扱うために図 1 の点線のように 2 つの直線で表すことが多い。そのため、この種の非線形性はバイリニア型と呼ばれる。特に、塑性状態を表す直線に勾配がない場合、これを完全弾塑性型という。弾塑性解析が理論的に行われる場合は、この完全弾塑性型の履歴特性が多く用いられる。

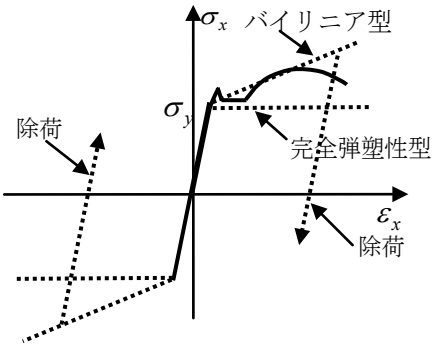


図 1 鋼材の応力と歪の関係

応力と歪の関係が非線形であると、関係式は増分形式で表され、$\Delta\sigma_x = E_x\Delta\varepsilon_x$ で E_x が歪の関数となり、骨組の弾塑性状態を表す。弾塑性特性は一般に**骨格曲線**（バックボーンカーブ）と**履歴ループ則**によって表され、鋼やコンクリート、木材など使用する構造材料によって異なる。骨格曲線は、バイリニア、トリリニアなど直線を結合した区分線形化手

鋼の E : $20500kN/cm^2$
コンクリート：およそ鋼の $1/10$
木造 :$700 \sim 1000kN/cm^2$

法と、RO モデルや HD モデルなど曲線で表す方法がある。履歴特性は幾何学的非線形とは異なり、除荷によって元の釣合曲線には戻らず、新たな除荷曲線上を移動する。また、応力がゼロとなっても残留歪が残る。

平板や曲面板は、材料そのものの特性を用いて弾塑性状態を求めるが、多様に構成される骨組構造では、上記の材料特性のみでは解析できない。解析の目的や部材の状態、例えば床や耐震壁などの面材を線材に置換した部材には、骨格曲線と履歴ループ則を拡張して、特別な弾塑性履歴を設定する必要がある。さらに材と材との接合部のゆるみやすべり、基礎の浮き上がり、壁面との衝突など、材料特性とは異なる履歴も材料非線形特性として表現する。これらの特性は、実験や特別な解析から骨格曲線と履歴ループ則を決めることになる。

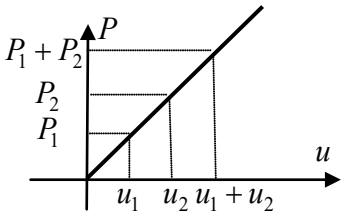
RO(Ranberg-Osgood) モデルとは、指数関数を用いた曲線で骨格曲線や除荷時の履歴を表し、金属材料などの履歴に用いられる。
HD(Hardin-Drnevichi)モデルは、双曲線を用いた関数で地盤の履歴特性などに用いられる。詳細は他の文献を参照されたい。

次に幾何学的非線形問題について考えてみよう。大変形を考慮するためには、変位と歪の関係を非線形として扱わなければならない。連続体の変形は、*Euler* 表示あるいは *Lagrange* 表示で表すことができ、前者は変形後の点を、後者は変形前の点を座標の基点に考える。ここでは、ベルヌーイ・オイラー梁に対し *Lagrange* 表示を用い、法線保持の仮定を適用すると、次の 2 次の非線形項を考慮した非線形軸歪が得られる。ただし、**曲げによる歪は線形とし、大きな曲率の変化は考慮しない**。逆に部材が大きく曲げられる場合は、曲率の非線形性を考慮する必要があるが、建築で扱う梁・柱ではそれほど大きく曲げられることはないので、線形として扱う場合が多い。

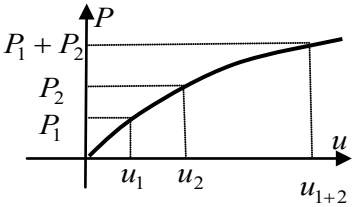
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2}$$
$$= \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa y$$

ここで、ε_L は線形歪、ε_N は非線形歪、κy は曲げによる線形歪である。非線形歪 ε_N を加えることで、座屈や不安定現象など、多くの特異な現象が解明できる。これについては次回お話しする。

線形問題の特徴は**重ね合わせの原理**の成立である。非線形ではこの原理が成り立たない。例えば、図 2(a)の長期荷重と短期荷重である地震、風、雪荷重などを個別に応力解析し、その後、短期と長期荷重による応力を加え合わせて断面算定を行う。これが可能なのは、全て線形解析であり、重ね合わせの原理が成立するからである。非線形解析では図 2(b)のように荷重 P_1 と荷重 P_2 の各々の変位の和 u_1+u_2 と、両荷重の和 P_1+P_2 に対する変位 u_{1+2} とが異なるため、重ね合わせの原理は成立しない。そのため、非線形解析を行う場合、まず、長期荷重を加え、その状態に短期荷重である地震荷重や風荷重を加えて解析する必要がある。



(a) 線形解析

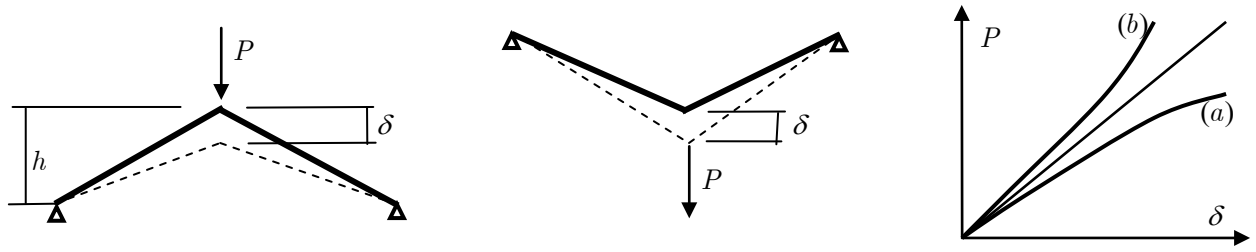


(b) 非線形解析

図 2 重ね合わせの原理

基礎１２７話 No.2　不安定現象と座屈の分類

今回も前回に続いて骨組の非線形性、特に幾何学的非線形問題についてお話しする。図 3 に示す 2 種の骨組に静的な荷重を載荷した状態について考える。骨組(a)は、アーチやドームを模擬した最も単純な解析モデルであり、荷重と変位の関係は図 3(c)の曲線(a)となる。この荷重と変位の関係を表す曲線は、一般に**釣合曲線**と呼ばれ、同構造では、荷重の増加と共に変位の割合が大きくなる。逆に、骨組(b)はつり構造に代表されるような引張軸力が主体となる構造であり、荷重と変位の関係は同図(c)の曲線(b)のように荷重が増加するに従って、変位の増加が小さくなる特徴を有する。



(a) 圧縮応力主体の構造　　**(b) 引張応力主体の構造**　　**(c) 荷重と変位の関係**

図 3 骨組の非線形性挙動

上記の構造であっても、荷重が微小である場合、荷重―変位図形はほぼ直線といって良く、これを**線形挙動**と呼ぶ。逆に、変位が大きくなると構造種別によって大きくその挙動が異なることになり、これを**非線形挙動**、あるいは**大変位による挙動**と呼ぶ。特に、同図(a)に示されるような構造は特異なふるまいを示す場合がある。次にこれらの挙動を分析し、分類しておこう。

図 3(a)の構造で、変位がさら大きくなると荷重と変位は、図 4 の関係となる場合がある。釣合曲線はある点（図上の a 点）で屈曲し、変位が増加するに従って荷重が減少する現象が現れる。この屈曲点はリミットポイント(極限点、屈服点)であり、また、その点で生じる現象を**屈服座屈**(snap-through buckling)と呼ぶ。リミットポイントに達した後も荷重を増加させると、釣合状態は図の a 点から b 点に、部材の応力は圧縮状態から引張状態に瞬時に移行する。この現象は**飛び移り**と呼ばれ、実際の現象にも見られる。一方同図の釣合曲線 a-c 間は不安定な釣合であり、この釣合状態を得るためには、実験でも数値解析でも変位を制御しながら注意深く実施する必要がある。

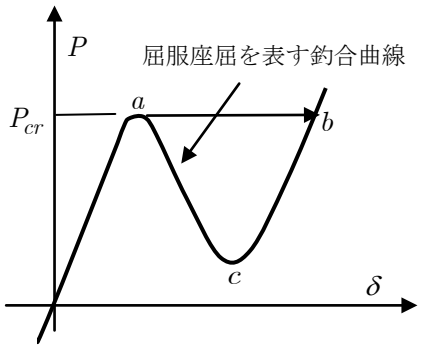


図 4 屈服座屈を示す釣合曲線

屈服座屈には、図 4 のように引張状態となって再度安定釣合を示す場合と、構造形式によってはこのような状態が存在せず不安定のまま耐力を低下させ、崩壊に至る場合とがある。

図 3(a)の構造で、高さ h が大きくなると図 5 のように、釣合曲線上に他の釣合曲線が交差する分岐点 a が現れる場合がある。この現象は**分岐座屈**(bifurcation buckling)と呼ばれ、この分岐点を越えると釣合経路は同図 a 点から b 点に移行する。この a-b 間は不安定な釣合であり、この間の変形状態は座屈前と全く異なった変形形状を示す。

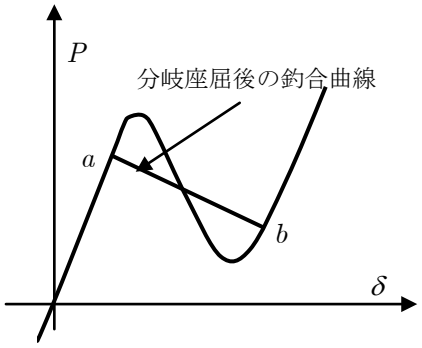


図 5 分岐座屈を示す釣合曲線

分岐座屈は、図 6 のように座屈後の釣合曲線の状態によって分類されている。まず、対称型と非対称型(同図 C)に分類され、対称型には安定型(A)と不安定型(B,E)に分類される。また、屈服座屈後の釣合経路にも、図のように分岐点が発生する場合もある。

以上をまとめると、幾何学的非線形性による座屈形態は屈服型と分岐型に分類され、分岐型は対称分岐と非対称分岐に分かれる。また、対称分岐には安定型と不安定型があり、座屈時には、座屈前の変形と全く異なる変形状態に変化する。特に不安定型分岐座屈の座屈後挙動は、不安定となった変形モードが大きくなるに従って耐荷能力が低下する。一方、屈服型では、座屈前の変形状態と同種の変形で不安定となる。屈服点を越えるとその変形状態が大きくなるが、荷重は低下する。この座屈の特徴は、近くに安定釣合曲線が存在すると、その状態に瞬時に移行する。この現象は飛び移りと呼ばれ、実際の現象でも多く見られる。

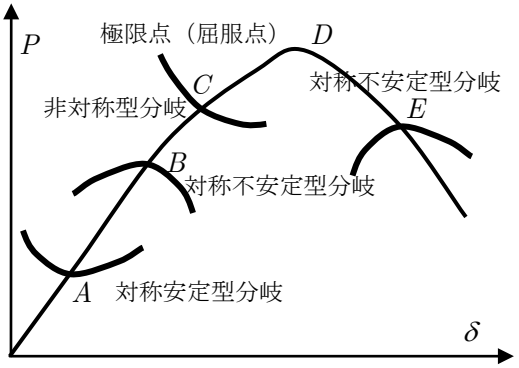


図 6 座屈点の分類

一般的に、建築の構造解析では、幾何学的非線形性は特殊な構造形態以外、ほとんど考慮されることはない。例外として、変形が大きく生じる立体トラスドームなどスペースフレームの応力解析や、高層のビルや免震装置に生じる $P-\Delta$ 効果などがある。また、鉄骨構造内のブレースにおける座屈後挙動でも幾何学的非線形性を考慮した手法が用いられる。ただし、このような大変形問題では数値計算の安定性が悪く、まれに解が発散する。そのため、この種の問題を扱うには多くの経験と知識を必要とする。そこで $P-\Delta$ 効果や座屈後挙動では、上記の幾何学的非線形性を考慮した手法ではなく、付加荷重や材料非線形問題に置き換える方法が良く用いられる。上記の方法で安定性が担保され、誰もが使用できるようになる。

弾塑性解析における崩壊解析は、以後、詳細にお話しする予定である。

基礎１２８話 No.1　オイラー座屈と固有値問題

付 27 話参照
ex127_1 ~ ex127_3

今回は、非線形解析で最も単純な問題である棒材の弾性座屈について学ぶ。ここでは、図 1 に示す一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平方向拘束）支持で、材軸方向に集中荷重 P が作用している場合について考える。同図には座屈した瞬間の状態が示されており、モーメントの釣合は変形後の変位 $v(x)$ を用いて行う。このように座屈後の変位を用いて釣合状態を考えることは、幾何学的非線形問題を扱うことに相当する。この問題は、幾何学的非線形性を扱う最初の課題となる。

図 1 の変形状態を考え、釣合式を求める。座標原点から x 離れた点 A におけるモーメントの釣合は、

$$-M_z(x)+v(x)P=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

で与えられる。さらに、梁の微分方程式

$$EI_z\frac{d^2v}{dx^2}=-M_z(x) \qquad \cdots\cdots(2)$$

を式(1)に代入すると、次式のように座屈挙動を支配する 2 階の微分方程式が得られる。

$$EI_z\frac{d^2v}{dx^2}+Pv=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、$k^2=P/EI_z$ と置くと、上式は以下の式となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}+k^2v=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

上式の解は一般解に剛体変位を加えると下式で与えられる。

$$v(x)=A\cos kx+B\sin kx+Cx+D \qquad \cdots\cdots(5)$$

一端ピン･他端ローラー支持に対する境界条件として､柱両端 $x=0,l$ で、$v=0,M=0$ の 4 つを用い、この条件を上式に適用すると、$A=C=D=0$ と $B\sin kx=0$ が得られる。ここでは最後の式が有意であり、この条件式より $B=0$ あるいは $\sin kl=0$ を得ることになる。前者の $B=0$ は、部材が真直ぐとなる解であり、また $B\neq 0$ の場合は、部材が曲がりながら釣合っている状態を表す。後者の状態を座屈(buckling)と呼び、次式が成立する。

$$\sin kl=0 \quad\rightarrow\quad kl=n\pi \rightarrow k=\frac{n\pi}{l};\quad (n=0,1,2,3\cdot\cdot) \qquad \cdots\cdots(6)$$

上式において、$n=0$ は $B=0$ と同じであり、従って、座屈条件を満足する値として $n=1,2,3\cdot\cdot$ が考えられる。上式を $k^2=P/EI_z$ に代入すると、次の**座屈荷重** P_{cr} が得られる。

$$P_{cr}=EI_zk^2=(\frac{n\pi}{l})^2EI_z;\quad (n=1,2,3\cdot\cdot) \qquad \cdots\cdots(7)$$

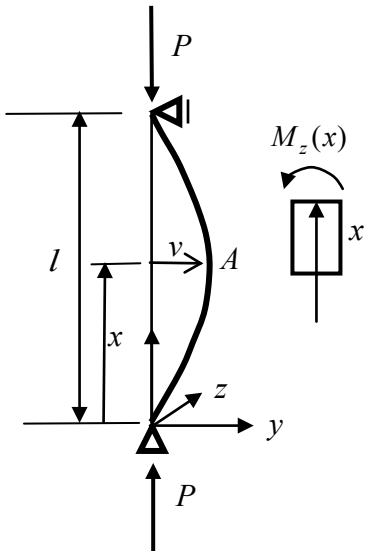


図１一端ピン･他端ローラー支持柱の座屈

また、式(6)を式(5)に代入すると、座屈時の変形状態が次式で与えられ、これらは一般に**座屈モード**と呼ばれる。

$$v(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x; \quad (n = 1,2,3\cdot\cdot) \qquad \cdots\cdots(8)$$

座屈条件を満足する値$n = 1,2,3\cdot\cdot$に対応する座屈荷重と座屈モードを図 2 に示す。

R52：オイラー座屈：座屈荷重と座屈モード

$n=1 \quad P_E = EI_z\frac{\pi^2}{l^2}$　　$n=2 \quad P_2 = EI_z\frac{4\pi^2}{l^2} = 4P_E$　　$n=3 \quad P_3 = EI_z\frac{9\pi^2}{l^2} = 9P_E$

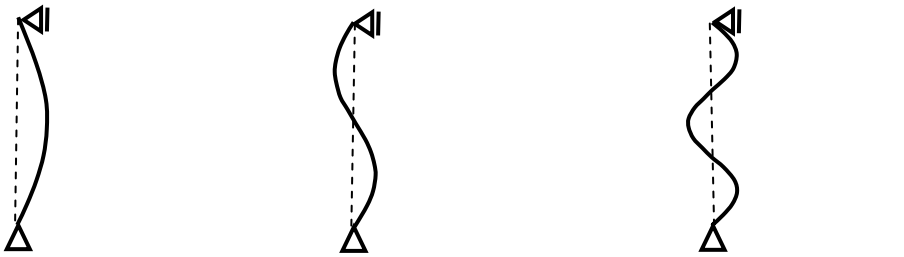


図 2 一端ピン・他端ローラー支持柱の座屈荷重と座屈モード

上の座屈の内、実際に生じる座屈現象は最も小さい$n = 1$で与えられ、その荷重は **Euler(オイラー)座屈荷重** P_E と呼ばれる。座屈する瞬間の圧縮応力σ_Eは Euler 座屈荷重を断面積で割ることで求められる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{EI_z\pi^2}{Al^2} \qquad \cdots\cdots(9)$$

上式に、$i^2 = I_z / A$で定義する断面二次半径iを用いると弾性座屈応力σ_Eは次式となる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2\left(\frac{A}{I_z}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(10)$$

さらに、材長と断面二次半径の比を、下式で示す新たなパラメータ**細長比λ**を導入すると、

$$\lambda = \frac{l}{i} \qquad \cdots\cdots(11)$$

式(9)の弾性座屈応力は、細長比のみの関数として以下のように与えられる。

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式で$\lambda \to 0$となる太短い部材の極限では、弾性座屈応力は$\sigma_E \to \infty$となる。しかしながら、材の応力は降伏応力σ_yを超えることはなく、式(12)の弾性座屈応力の式は成立しない。このことから、座屈応力と細長比の関係が図 3 のように得られる。

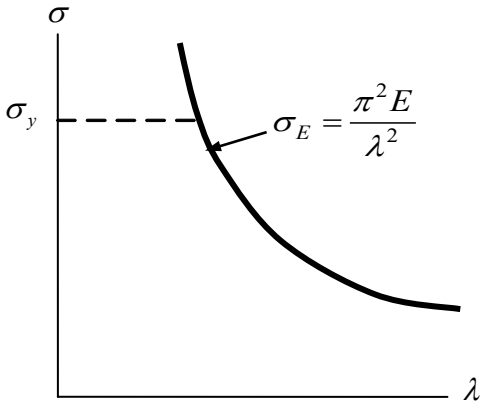


図 3 弾性座屈時応力と細長比

基礎１２９話 No.2　鉄骨設計式
限界細長比と非弾性座屈

前回は、座屈現象を解析し、座屈応力と細長比の関係を求めた。今回は、この関係を詳細に分析する。

細長比が大きく、弾性座屈を生じる場合、座屈時の軸方向歪は次式で与えられる。

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = (\frac{\pi}{\lambda})^2 \qquad \cdots\cdots(13)$$

上式のように弾性座屈時の軸方向歪は、軸力や弾性係数とは無関係に細長比によって決まる。また、ヤング係数が比例限度内では、式(7)は成立するが、比例限度を超えると成り立たない。さらに、式(12)で与えられる応力が材の降伏応力σ_yを超えると、部材は塑性座屈することになる。

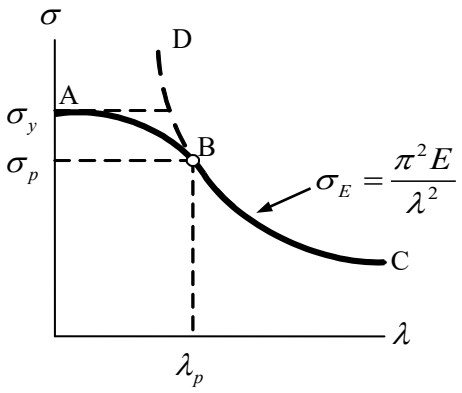


図 4 中心圧縮を受ける材の座屈応力

図 4 には、圧縮荷重を受ける材の座屈時の応力と細長比との関係を示し、図 5 は鋼材の応力と歪の関係を表す。図 4 では、縦軸は断面内の軸方向応力を、また横軸は細長比を表す。比例限界応力σ_Pとオイラー座屈荷重との交点 B を通る細長比λ_pは**限界細長比**といい、弾性座屈の限界を示す細長比となる。つまり、材の細長比が$\lambda > \lambda_p$であれば弾性座屈を起こすが、$\lambda \leqq \lambda_p$であれば非弾性座屈を起こすことになる。限界細長比は、比例限界応力σ_Pを式(12)に代入し、少し整理すると次式で表される。

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \qquad \cdots\cdots(14)$$

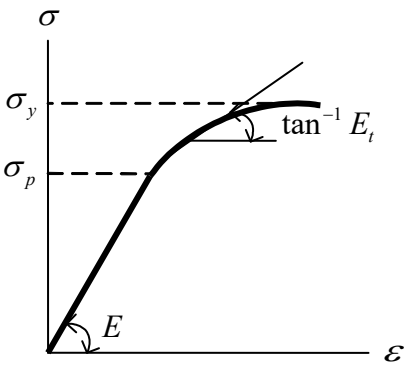


図 5 鋼材の応力と歪の関係

図 4 で、曲線 B-C は弾性座屈を表し、その際の軸方向応力は、図 3 のσ_Pより小さな値であり、一般にこの範囲の材は**長柱**と呼ばれる。曲線 A-B は、軸方向応力がσ_Pとσ_yの間の応力状態で、非弾性座屈時の$\sigma - \lambda$関係を表し、一般にこの範囲の材は**短柱**と呼ばれる。

非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されている。例えば、Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論が有名である。前者の座屈時応力σ_tは、式(11)右辺のヤング係数が接線係数に、また、後者の座屈時応力σ_rは、柱の曲げ引張側で、除荷を考慮した等価係数を用いることで求められる。圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley である。

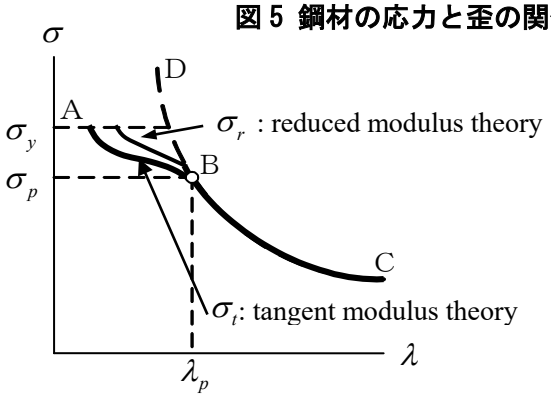


図 6 接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力

Shanley モデルは、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値がその間に存在することを示した。図 6 には、接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力が示されている。この 2 つの座屈時応力と Euler 応力との関係は、次式で与えられる。

$$\sigma_{Euler} > \sigma_r > \sigma_t \qquad \cdots\cdots(15)$$

これら 3 つの理論の詳細については、「SPACE で学ぶ構造力学　静的解析編」を参照されたい。

多くの研究者が非弾性領域の座屈応力を実験式として提案し、現在でも各国で設計式として使われている。以下にその代表的な式を示す。

R53：非弾性領域の座屈応力の実験式

Gordon-Rankine 式；　$\sigma_{cr} = \dfrac{\sigma_y}{1+c\lambda}$

Johnson 式；　$\sigma_{cr} = \sigma_y - k\lambda^2$

Tetmajor 式；　$\sigma_{cr} = a - b\lambda$

学会規準では、基準値 F は、鉄骨降伏点の 60% か σ_y のどちらか小さい値を用いる。

ここで、σ_y は材の降伏応力、c,k,a,b は材料によって決まる係数である。

日本の建築学会規準では、比例限度応力を $\sigma_P = 0.6F$ と定め、先に述べた限界細長比 Λ を式(12)より次式としている。ここで、F は材の設計基準強度を表す。

$$0.6F = E(\frac{\pi}{\Lambda})^2; \quad \Lambda = \pi\sqrt{\frac{E}{0.6F}} \qquad \cdots\cdots(16)$$

設計用許容応力度 f_c は、材の細長比が限界細長比より大きい場合、弾性座屈として Euler 式に安全率を考慮して式(19)で表され、また、限界細長比より小さい場合、非弾性であるとして、式(18)に示すように細長比に関する 2 次式で与えられている。ここで使用される安全率 ν は式(17)としている。ここでは部材が細長くなるに従って、不完全さ、つまり形状初期不整や残留応力によって、座屈荷重に与える影響が著しくなるとして、細長比の大きい領域では大きな値となっている(図 7 参照)。

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}(\frac{\lambda}{\Lambda})^2 \qquad \cdots\cdots(17)$$

ただし、上式は $\lambda < \Lambda$ の範囲であり、$\lambda > \Lambda$ の場合、つまり弾性座屈については、$\nu_\Lambda = 3/2 + 2/3 = 2.17$ の値を用いている。以下に、建築学会で使用している設計用許容応力度を示し、図 8 に細長比との関係を示す。

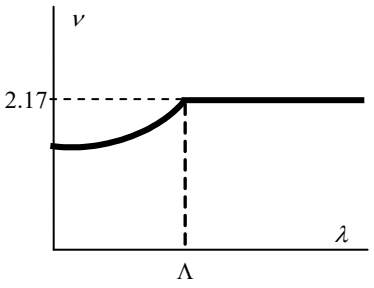


図 7 細長比と安全率

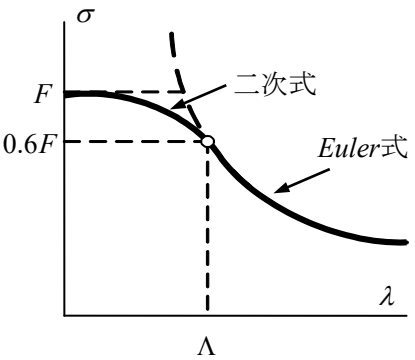


図 8 学会規準式における座屈時応力

$\lambda < \Lambda$ に対し（非弾性）

$$f_c = \frac{\left\{1 - 0.4(\frac{\lambda}{\Lambda})^2\right\}F}{\nu} \qquad \cdots\cdots(18)$$

$\lambda > \Lambda$ に対し（弾性）

$$f_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}\frac{0.6F\Lambda^2}{\lambda^2} = \frac{0.277F}{(\frac{\lambda}{\Lambda})^2} \qquad \cdots\cdots(19)$$

基礎１３０話 No.3　境界条件と座屈長さ

話をオイラー座屈に戻そう。今回は特に座屈長さについて説明する。これまで述べたように、座屈応力は、両端ピン支持、一様断面、一様圧縮、単一断面について規定されている。しかしながら、使用される部材には、トラス材やラーメンの柱材など様々な断面形状や境界条件が存在する。このような部材にも、前述の規定を適用するためには何らかの換算が必要となり、ここでは仮想の部材長さで評価することになる。この部材長さを**座屈長さ**l_kとする。例えば、両端の支持条件によって異なる座屈長さが図 9 に示されている。ここで、lは実際の部材長さを表す。

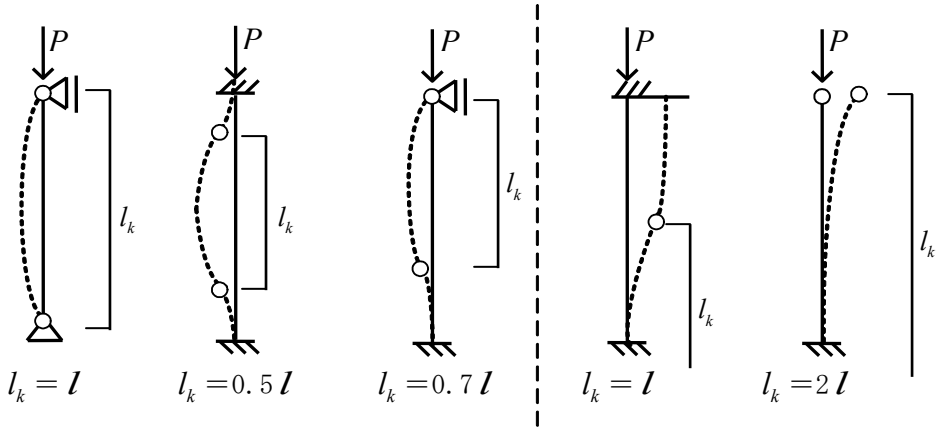


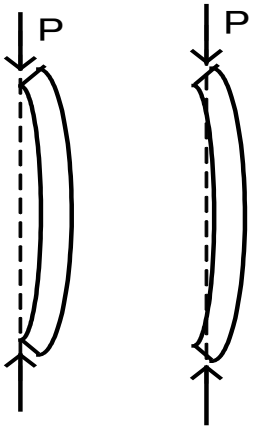
図 9 境界条件と座屈長さの関係

境界条件の異なる部材の座屈荷重と細長比は、この座屈長さと式(7)を用いると次式となる。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{l_k^2};\quad \lambda = \frac{l_k}{i} \qquad \cdots\cdots(20)$$

この座屈長さl_kを適切に評価することで、ラーメンの柱など支持条件が異なっていても、弾性座屈応力や細長比が同じ形式で表現することができることになる。

棒材の座屈荷重は初期不整の影響を受けて低下することが知られている。特に、短柱では残留応力に、長柱では初期変位に大きく影響され、座屈荷重を低下させる。荷重の不整とは、図 10 のように圧縮材に加わる荷重が断面の図芯からわずかにずれている場合であり、初期変位とは、材自体がわずかに湾曲している場合などである。このように実際の部材はわずかな不完全さを有している。そのため初期不整を考慮して座屈解析を行い、座屈荷重に与える影響を分析し、どの程度耐力が低下しているかを知っておく必要がある。



(a) 荷重のズレ (b) 材の湾曲

図 10 荷重の不整と初期変位

図 11 は、荷重と材中央部のたわみの関係を表している。図中のＡ点が材の最大耐力となり、**わずかな初期変位**eであっても座屈耐力は急激に低下する。また、溶接による組立材は冷却とそれに伴う収縮によって自己釣合の残留応力を残すが、圧延形鋼でも同様の残留応力が断面内に分布する。この状態で、圧縮荷重が加わると、内在する残留応力に外力の圧縮応力が加算されて、断面の一部で早めに降伏応力に達し、塑性化することになる。この状態の断面二次モーメントは弾性域のみで評価されるため、全断面弾性で計算されたそれに比較して小さい値となる。この結果、座屈荷重が完全部材に比較して低下する原因となる。特に、非弾性領域において影響が大きくなる。

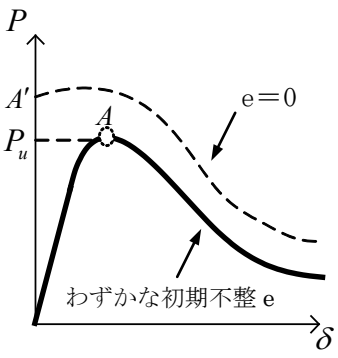


図 11 初期不整による座屈荷重の低下

真っ直ぐな材に中心圧縮力が加わる場合、その耐力は図 13 の曲線 ABC で表されるが、実際の柱材は前に述べたように、それぞれ不完全さ（初期変位など）を有しており、耐力はバラつく。その要因は、設計上中心圧縮としても、実際は圧縮力が中心からずれている場合が多く、また、圧延形鋼や溶接で組み立てた組立圧縮材には種々の残留応力が存在する。つまり、初期変位や残留応力の影響で座屈耐力が低下する。実験結果によれば、実際の柱材の耐力は図 12 の斜線内の範囲に分散してしまう。そこで建築学会新基準では図 13 のように弾性範囲の最大耐力を、降伏点を表す基準値（Ｆ値）の 60%とし、限界細長比との交点から曲線 AB を描いたものを非弾性範囲の耐力と考え、これから許容座屈応力 f_c を決めている。これらについての詳細は専門書を参照されたい。

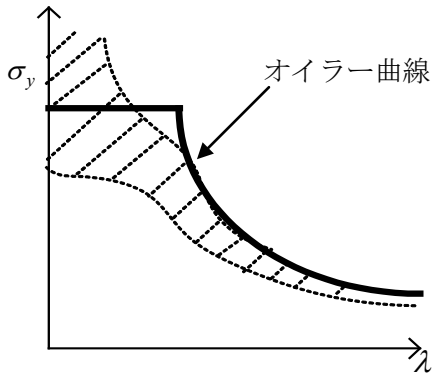


図 12 実験による座屈耐力

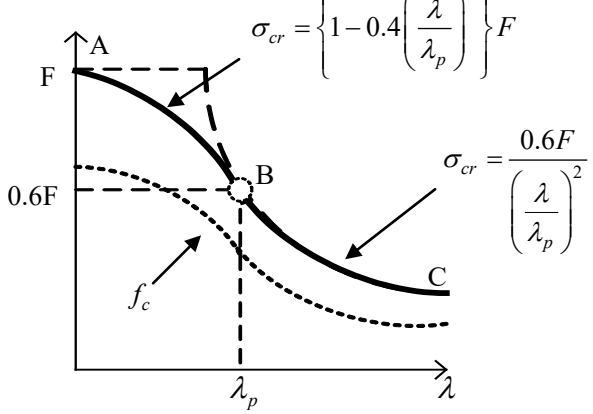


図 13 設計基準と許容応力度

ここではオイラー座屈を示す柱を用いて、固有値問題を学んだ。線形座屈解析は、オイラー座屈のような座屈前に座屈モードの変位が生じない、いわゆる分岐問題に対し適切な解を与える。つまり固有値問題は座屈前で非線形挙動を生じない構造に対して有効である。一方、座屈前で非線形挙動を生じる場合は、増分解析による方法を用いることになる。

基礎１３１話 No.1　非弾性座屈
接線係数理論と等価係数理論

今回は、非弾性座屈についてお話しする。非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されており、例えば Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論が有名である。前者の座屈時応力 σ_t は接線係数 E_t を用いて求められ、後者の座屈時応力 σ_r は、引張側で除荷を考慮した等価係数 E_t を用いて求められる。この 2 つの理論の間で長い論争があったが、圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley である。ここでは、この論争について簡単に説明しよう。図 1 には、接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力が示されており、2 つの座屈時応力と Euler 応力との関係は次式で与えられる。

$$\sigma_{Euler} > \sigma_r > \sigma_t \qquad \cdots\cdots(1)$$

まず、座屈荷重あるいは座屈時の応力と歪の関係を考える。一般に、降伏応力 σ_y を有する材料では断面内応力はこの降伏応力を超えることはない。従って、座屈荷重も $P_{cr} = \sigma_y A$ 以上にはならない。さらに、図 3 では比例限応力 σ_P を超えると、接線弾性係数によって座屈耐力も低下していることを示す。

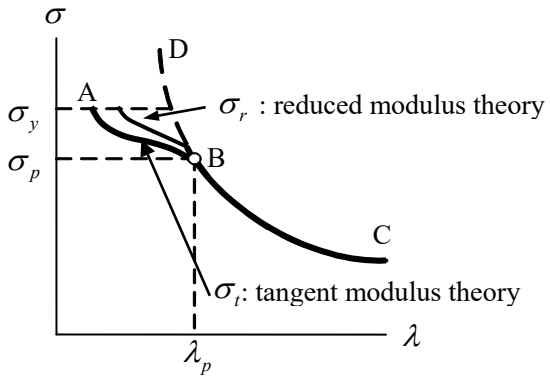


図 1 接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力

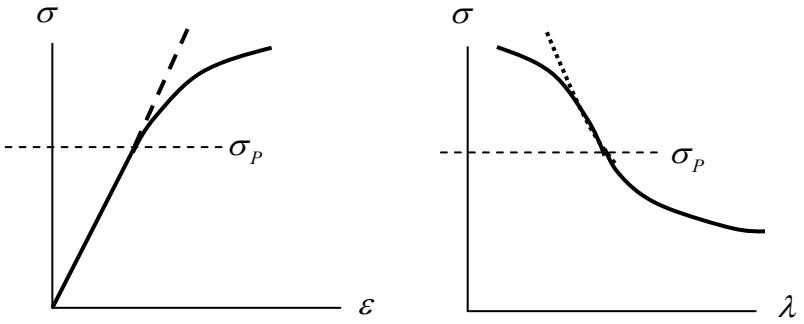


図 3 比例限以上の鋼材の応力と歪関係と座屈時応力

次に、比例限応力 σ_P を超えた非弾性座屈に関する 2 つの理論と Shanley モデルについて概説する。実験によると降伏応力に達していないにもかかわらず、座屈荷重が Euler 座屈荷重より低く得られることがある。この場合、材料のヤング係数が比例限を越えて剛性が低下していることによると説明され、かなりの説得力を有していた。この説明を理論的に解明するために、古くから二通りの説が存在する。そのひとつが、

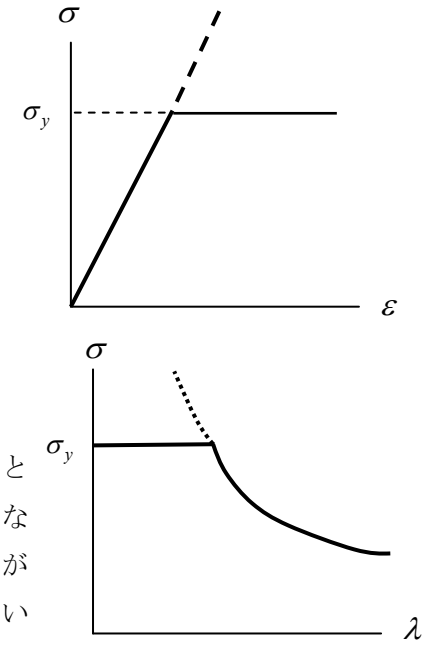


図 2 降伏応力を示す応力と歪関係と座屈時応力

Engesserによる接線係数理論(tangent modulus theory)である。柱が完全系であるとすると、座屈を生じるまで柱は直線を保ち、曲げ変形は生じていない。従って、不安定になる瞬間で発生する曲げモーメントは、図 4 のように歪の増分に対する応力の増分を用いて計算される必要がある。応力が比例限を超えていれば、弾性係数としてその瞬間における応力―歪曲線の勾配：$E_t = d\sigma / d\varepsilon$ を、弾性域のヤング E の替わりに用いなければならない。図 4 に示すこの係数 E_t を接線弾性係数という。つまり、比例限を超える応力状態では、座屈荷重はヤング係数 E の替わりに接線弾性係数 E_t を用いて求めれば良い。ただし、座屈前の挙動が非線形性を現すことから、線形座屈解析から求められず、増分論によって求めることになる。この説より得られた結果は実験結果と良い一致を示すことが確かめられている。

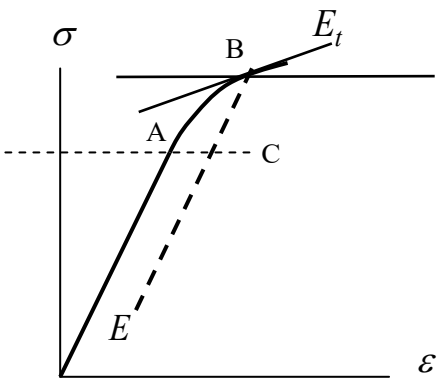


図 4 鋼材の応力と歪の関係

実験結果と良い一致を示すにもかかわらず、接線係数理論には理論的に疑わしい点があると指摘されていた。今、図 4 において圧縮状態で点 A の比例限の応力を超え、点 B に示す応力の状態に進んだとする。そこで、荷重が一定の状態で曲げ変形が発生するものとすると、断面内には曲げモーメントが生じ、断面の一部では圧縮応力は増加するが、残りの領域では圧縮応力に除荷が起きる。また荷重が一定であることから、増分時の圧縮応力と除荷分の応力の和はゼロでなくてはならない。さて、このような状態で圧縮応力が増加する領域では接線弾性係数 E_t が用いられるが、一方、除荷領域では図 4 の点 C に移動するため、除荷弾性係数を使わなければならない。その剛性は接線弾性係数より大きく、多くの場合ヤング係数 E に等しい。従って、圧縮応力が増加する領域では E_t を、また減少する領域では E を使用するのが正しいということになる。Engesser と Von Karman によるこの方法は等価係数理論（reduced modulus theory）と呼ばれている。当然、得られる座屈荷重は接線係数理論によって求めた座屈荷重より高くなる。

理論的には、より完全に思われる等価係数理論は実験結果と比べたとき多少過大となり、接線係数理論に劣るといわれていた。そのため、実験との一致か、理論的な完全さかで長い間、論争が続けられてきた。接線係数理論の欠点は座屈時に生じる除荷を無視している点であり、また、等価係数理論の欠点は、$\delta P = 0$ という重要な仮定の根拠が曖昧に使用されている点である。この論争は次回で説明する Shanley モデルによって決着が図られることになる。

基礎１３２話 No.2　シャンレイモデルと分岐座屈

今回も、非弾性座屈についてお話しする。非弾性座屈に関する理論として、Engesser による**接線係数理論**と Engesser-Karman による**等価係数理論**があり、理論的には、より完全に思われる等価係数理論は実験結果と比べたとき多少過大となり、接線係数理論に劣るといわれていた。そのため、実験との一致か、理論的な完全さかで長い間、論争が続けられてきた。その論争に決着を付けたのが Shanley である。ここではこのモデルと得られた結果について簡単に説明しよう。

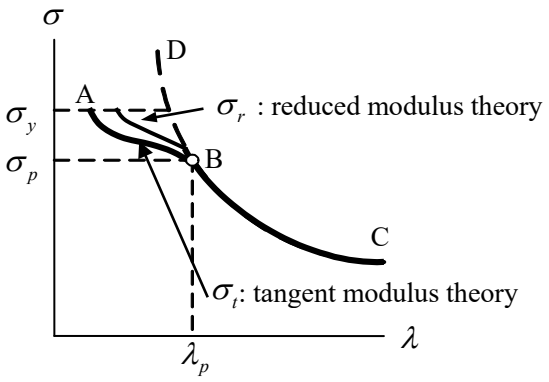


図 1 接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力

Shanley モデルは単純な構造で、図 5 のように 2 つの棒状剛体の間に 2 つのバネが取り付けられている。棒状剛体の長さは L であり、バネの長さは $2h$、断面積は A とする。バネはヒンジで結合されており、バネ間は $2r$ の間隔となっている。また、荷重は材上部に集中荷重 P が作用している。

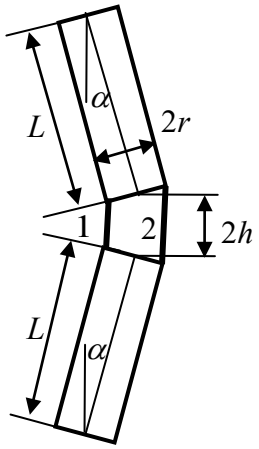


図 5 Shanley モデル

今、剛体が角度 α だけ傾いたものとすると、バネ上部の水平変位 v は

$$v = L\sin\alpha$$

となる。ここで、バネの平均圧縮ひずみを $\bar{\varepsilon}$ とすると荷重作用点における軸方向変位 u は次式で与えられる。ただし、ここでは圧縮を正とする。

$$u = 2L(1-\cos\alpha) + 2h\bar{\varepsilon}$$

上式の第 1 項は剛体が角度 α で傾くことによる変位であり、第 2 項はバネのひずみによる変位である。これらの関係式を利用して、任意の釣合状態における全ポテンシャルの変分 δV を求める。釣合状態では全ポテンシャルの変分がゼロとなり、次の e_1, e_2 関する静的釣合式が得られる。

$$(2AE_1 - \frac{PLh}{2r^2\cos\alpha})e_1 + \frac{PLh}{2r^2\cos\alpha}e_2 = P - 2A\sigma_0$$

$$\frac{PLh}{2r^2\cos\alpha}e_1 + (2AE_2 - \frac{PLh}{2r^2\cos\alpha})e_2 = P - 2A\sigma_0$$

上の釣合式で、増分荷重がゼロのとき変位が生じる条件、つまり不安定となる条件として、増分ひずみ e_1, e_2 に関する係数行列の行列式の値をゼロとする。この条件から、座屈荷重 P_{cr} が以下のように求められる。

$$P_{cr} = \frac{(4AE_1r^2\cos\alpha)(4AE_2r^2\cos\alpha)}{Lh(4Ar^2\cos\alpha(E_1+E_2)} = \frac{4r^2AE_1E_2\cos\alpha}{Lh(E_1+E_2)}$$

ここで、両バネの弾性係数が同じで、$E_t = E_1 = E_2$ であるとすると、上の座屈荷重は次式となる。

構造力学では、変分はあまりなじみがないが、微分に似ている。関数の関数である汎関数、ここでは全ポテンシャルであるが、この汎関数の極値が静的釣合式となるため、この汎関数の変分を求めている。詳細は、変分法に関するテキストを読まれたい。

紙面の都合で、Shanley モデルの解説は、式の変換などを多く省いている。詳細は、「SPACE で学ぶ構造力学　静的解析編」付 1.6.3 を参照されたい。

$$P_{cr}=\frac{2r^2AE_t}{Lh}=P_t$$

この座屈荷重は、接線係数理論による座屈荷重P_tに対応する。この系では荷重がP_tに達すると分岐座屈を生じ、そのまま軸方向変位が増加する。その釣合経路では、接戦剛性行列の行列式の値は負となり、不安定な釣合状態を示す。

次に、分岐後の釣合経路を分析する。まず、荷重を$P=P_t+\lambda$と置き、また$E_1=E,E_2=E_t$及び$\beta=E_t/E$とすると、λ/P_tと部材中央の変位との関係は、次式として得られる。

$$\frac{\lambda}{P_t}=\frac{(2\sqrt{1-(\frac{v}{L})^2}-(1+\beta))\frac{v}{r}}{(1-\beta)\sqrt{1-(\frac{v}{L})^2}+(1+\beta)\frac{v}{r}}$$

さらに、横方向変位vが長さLに比較して十分に小さいとすると、$v/l\to 0$と置いても良く、上の荷重と部材中央の変位との関係は下式となる。例えば$\beta=3/4$として傾向を検証すると、下式右となる。

$$\frac{\lambda}{P_t}=\frac{(1-\beta)\frac{v}{r}}{(1-\beta)+(1+\beta)\frac{v}{r}}\rightarrow\quad \frac{\lambda}{P_t}=\frac{v/r}{1+7v/r}=\frac{1}{r/v+7}$$

ここでは、横変位vが大きくなると$\lambda/P_t=1/7$に漸近する。その値は等価係数理論よる座屈荷重P_rに相当する。その釣合曲線の定性的傾向は図 6 に示される。まず、軸力によって軸方向変位uが生じるが、荷重がP_tに達すると分岐座屈を起こす。その後、横方向変位vが発生し、横方向にたわむ。その釣合経路は安定となり、荷重は座屈荷重P_rに漸近する。

Shanley モデルは、鉄骨非弾性座屈の実験結果を見事に説明している。このモデルによれば、真っ直ぐな棒材において応力が非弾性になる場合、tangent modulus theory による座屈荷重時で、釣合経路に分岐座屈が生じる。真っ直ぐな釣合経路は不安定釣合となるが、一方、分岐した釣合経路では安定釣合となり、水平変位が増加するに従って荷重も増加する。荷重は reduced modulus theory による座屈荷重に漸近する。つまり、分岐座屈した瞬間を捉えることができれば、実験結果は tangent modulus theory による座屈荷重に近くなる。実験結果は、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示すことになる。

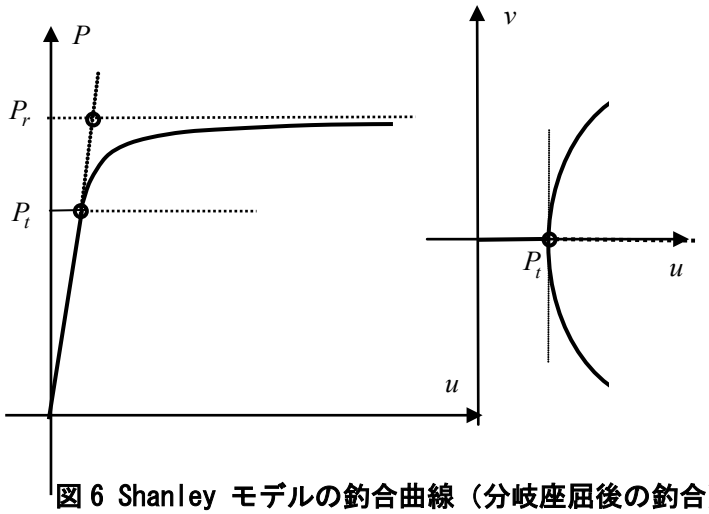


図 6 Shanley モデルの釣合曲線（分岐座屈後の釣合）

基礎１３３話 No.1　曲げによる全塑性モーメント

今回は、純曲げ状態における断面内の弾塑性応力状態、特に断面内の全応力が塑性となる状態について考察し、断面の全塑性モーメントについて学ぶ。ここでは、理論を単純化するために、**完全弾塑性材料**(ヤング係数 E、降伏応力 σ_y、塑性後第 2 勾配はゼロ、図 2 参照)で構成された長方形断面の梁(幅：b、梁せい：D)について考える。なお、**材料が塑性状態に入っても平面保持の仮定が成り立つ**ものとする。

最初に、梁が曲げられたとき、断面内に生じる軸方向歪と応力について考えよう。

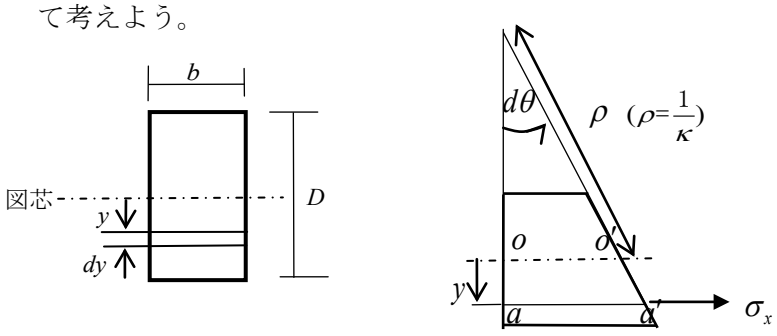


図 1 曲げによる断面内の軸方向歪

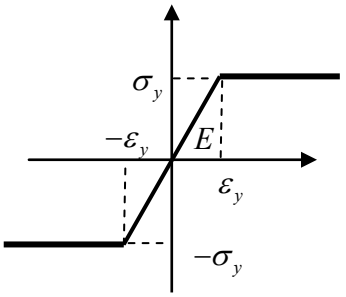


図 2 完全弾塑性材料の応力と歪の関係

平面保持の仮定により、図芯から y だけ離れた点の歪は、曲率 κ が小さいとすると次式で表される。

$$\frac{\overline{aa'}-\overline{oo'}}{\overline{oo'}}=\varepsilon_b=\frac{(\rho+y)d\theta-\rho d\theta}{\rho d\theta}=\frac{y}{\rho}=\kappa y \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、ρ は曲率半径である。まず、曲げモーメントが小さい間、つまり断面内の軸方向応力が弾性の場合、次のフックの法則が成り立ち、式(1)を用いると応力 σ_x (以後は σ と表記する)は次式で与えられる。

$$\sigma=E\varepsilon_b=E\kappa y \qquad \cdots\cdots(2)$$

曲げモーメント M は、図 1 の微小部分 dy に作用する力 $b\sigma dy$ の図芯（ここでは純曲げ状態であることから中立軸と図芯は一致する）に関するモーメント $b\sigma dy\cdot y$ を断面全体について積分し、式(2)を考慮することで次のよう得られる。

$$M=\int_{-D/2}^{D/2} b\sigma y dy=E\kappa\int_{-D/2}^{D/2} by^2 dy=EI_z\kappa \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで I_z (以後 I と表記)は次式で示される断面二次モーメントである。

$$I=\int_{-D/2}^{D/2} by^2 dy \qquad \cdots\cdots(4)$$

M と σ の関係を式(2)と(3)より導くと以下のように示される。

ここでは、ベルヌーイ・オイラー梁理論の復習であり、さらに拡張して、断面内が塑性化した状態の理論を学ぶ。

$$\sigma(y)=\frac{M}{I}y \qquad \cdots\cdots(5)$$

上式のように、曲げモーメントを受ける梁断面要素の弾性応力は中立軸からの距離に比例し、断面の上下端で最大となることが理解できる。

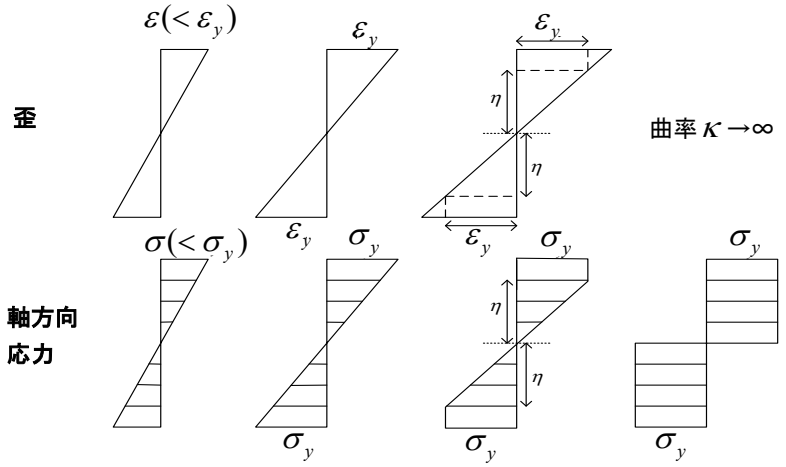


図 3 塑性状態を含む歪と軸方向応力

次に、曲げモーメントがさらに大きくなった場合について考えよう。断面内の歪と応力状態は、図 3 を参照されたい。曲げモーメント M が増大すると、最初に断面の上下端の歪はやがて降伏歪 ε_y に到達する。このときの曲げモーメントの値を M_y で表し、弾性限曲げモーメントという。また、このとき κ の値を κ_y で表し、さらに降伏歪 ε_y に最初に達する位置は $y=\pm D/2$ であるため、次の関係が、式(1)より

$$\varepsilon_y=\kappa_y\frac{D}{2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

として得られる。また、弾性域での応力と歪の関係より、κ_y は

$$\kappa_y=\frac{2\varepsilon_y}{D}=\frac{2\sigma_y}{ED} \qquad \cdots\cdots(7)$$

となり、従って、M_y は、式(3)と(7)より

$$M_y=EI\kappa_y=\frac{I}{D/2}\sigma_y=\frac{\sigma_y bD^2}{6} \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる。上式は、断面係数 Z を用いると次式で表すことができる。

$$M_y=\sigma_y Z \qquad \cdots\cdots(9)$$

ここで、長方形断面では、断面係数は $Z=bD^2/6$ である。

曲げモーメントがさらに増大すると、ε_y を越える領域が断面の内部に次第に広がっていく。$|\varepsilon|=\varepsilon_y$ である位置を $y=\pm\eta$ で表すと、$|\varepsilon|$ が ε_y より小さい領域 $|y|<\eta$ では応力は弾性であり、図 4 を参考にすると、この領域の応力は次式で表される。また、$|\varepsilon|$ が ε_y を越える領域 $|y|\geq\eta$ では、先に完全弾塑性を仮定したことより、応力は降伏応力に等しい。

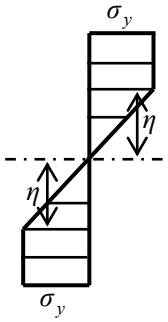


図 4 断面内の弾塑性応力状態

$$\sigma=E\kappa y=\sigma_y\frac{y}{\eta}\leftarrow\ |y|<\eta \quad \cdots\cdots(10) \qquad \sigma=\sigma_y\leftarrow\ |y|\geq\eta \quad \cdots\cdots(11)$$

このように、断面内には弾性領域と塑性領域が混在することになる。

基礎１３４話 No.2　塑性断面係数と断面の形状係数

今回は、前回の続きで、純曲げ状態における断面内の弾塑性応力について考察する。図 4 に示す応力状態の場合、曲げモーメントは、2 つに分けて図芯からのモーメントを計算することで、次のように得られる。

$$M = 2b\left(\int_0^{\eta}\frac{\sigma_y y}{\eta}ydy + \int_{\eta}^{D/2}\sigma_y ydy\right) \qquad \cdots\cdots(12)$$

上式の積分を実行すると、曲げモーメントは次式となる。

$$M = 2b\sigma_y\left(\left[\frac{y^3}{3\eta}\right]_0^{\eta} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\eta}^{D/2}\right) = 2b\sigma_y\left(\frac{\eta^2}{3}+\frac{D^2}{8}-\frac{\eta^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\sigma_y b\left(D^2-\frac{4}{3}\eta^2\right) \qquad \cdots\cdots(13)$$

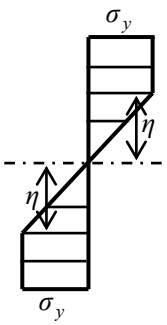


図 4 断面内の弾塑性応力状態

さらに、曲げモーメントが増加するにつれて、全断面塑性状態に漸近する。その極限として、弾塑性境界面 $y=\pm\eta$ は $\eta=0$ となり、断面の上半分は圧縮、下半分は引張の降伏応力に達する。断面の曲げ耐力は、弾塑性状態で求めた曲げモーメント式(13)に、$\eta=0$ を代入することによって次のように求められる。

$$M_P = \frac{1}{4}\sigma_y bD^2 \qquad \cdots\cdots(14)$$

このときの曲げモーメント M_P を**断面の全塑性モーメント**という。ここで、全塑性モーメントを**塑性断面係数** Z_P で表すと、

$$M_P = \sigma_y Z_P \qquad \cdots\cdots(15)$$

となり、長方形断面の塑性断面係数は式(14)と(15)より、

$$Z_P = \frac{bD^2}{4} \qquad \cdots\cdots(16)$$

で与えられる。この塑性断面係数は断面固有の値となる。

全塑性モーメントを弾性限曲げモーメントで割った係数 f は、これも断面に特有な値となり、これを**断面の形状係数**という。

$$f = \frac{M_P}{M_y} = \frac{\sigma_y Z_P}{\sigma_y Z} = \frac{Z_P}{Z} \qquad \cdots\cdots(17)$$

例えば長方形断面では、f は次のように 1.5 となる。

$$f = \frac{Z_P}{Z} = \frac{bD^2/4}{bD^2/6} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad \cdots\cdots(18)$$

図 5 の $M-\theta$ 関係から分かるように、形状係数は断面内が最初に塑性化した時の曲げモーメントから全塑性モーメントに達するまでの倍率を表す。代表的な断面の塑性断面係数と形状係数が次回の表 1 にまとめられている。図 5 で示す実際の $M-\theta$ 関係は複雑であるため、後で説明する増分法や仮想仕事法などでは、簡略化して点線で示したバイリニアで表す場合が多い。

長方形断面
断面係数
$$Z = \frac{bD^2}{6}$$
塑性断面係数
$$Z_P = \frac{bD^2}{4}$$
断面の形状係数
$$f = \frac{Z_P}{Z} = 1.5$$

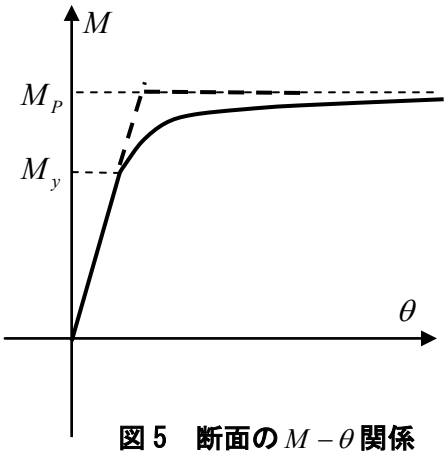


図 5　断面の $M-\theta$ 関係
点線部はバイリニア型履歴

骨組の塑性崩壊荷重を求めるには、骨組を構成する全部材の全塑性モーメントを求めなければならない。例えば、1 軸対称断面の全塑性モーメントは、次の方法で求められる。

R54：全塑性モーメントの計算法

１）図芯位置の算定

断面一次モーメントが零の条件より、図芯を求める。ただし、断面が均質な材料であり、形状が 2 軸対称で構成されている場合は、断面積の 2 等分線となる

２）図芯回りのモーメントの算定

図芯より上側全断面が圧縮降伏応力、下側全断面が引張降伏応力としてモーメントを算定する。この値が全塑性モーメントという

ここで、長方形断面と H 型断面を例として、部材断面の全塑性モーメントを求めてみよう。

１）長方形断面

最初に、長方形断面について求める。長方形断面は前に求めたが、ここでは上に示した方法で全塑性モーメントを求める。なお、断面内は全て均質材料で構成されており、図 6(b)に示す応力状態とする。

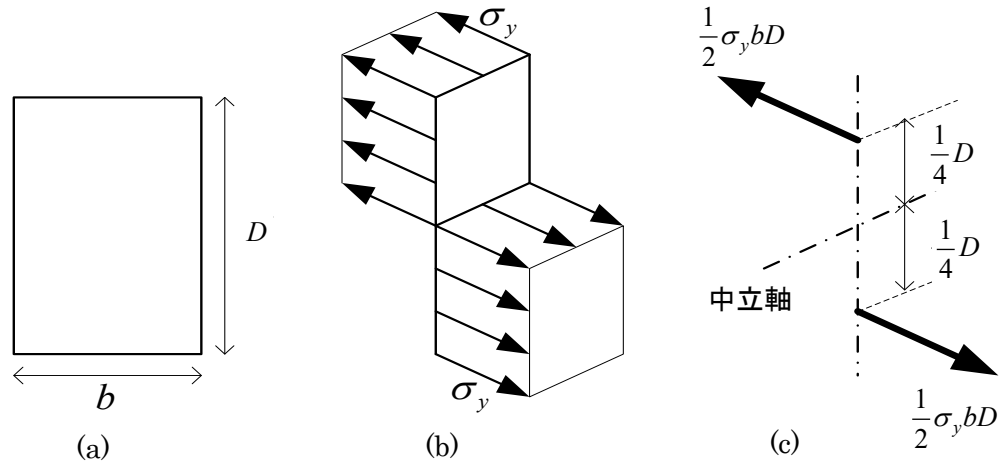


図 6 長方形断面の全塑性応力状態

断面は 2 軸対称断面であるため、図芯位置は断面積を 2 等分する位置に存在する。応力分布は図 6(b)のようになり、各方向の合力と作用点は同図(c)となる。上記応力状態で、図芯位置でのモーメントを計算することで全塑性モーメント M_P が以下のように求められる。

$$M_P = 2\frac{1}{2}\sigma_y bD \cdot \frac{1}{4}D = \frac{1}{4}\sigma_y bD^2 \qquad \cdots\cdots(19)$$

他の断面については、次回お話しする。

基礎１３５話 No.3　荷重―変位関係とバイリニアモデル

前回に続いて、断面の全塑性モーメントについてのお話しである。ここでは、前回お話しした方法でH型断面の全塑性モーメントを求める。

2）H 型断面

次の図に示すH型断面の全塑性モーメントを求める。

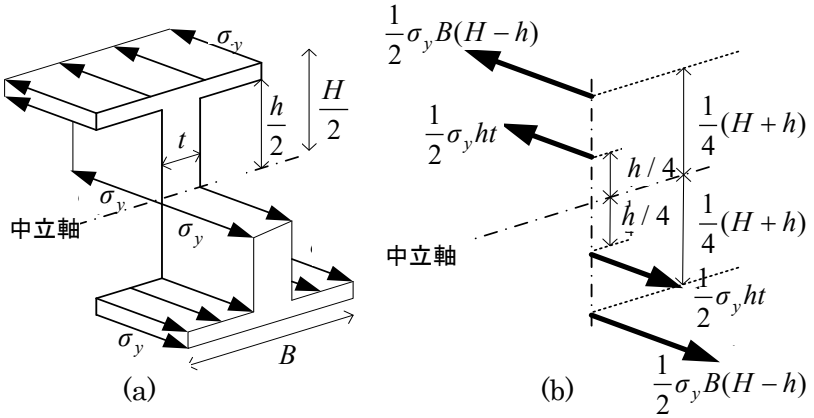


図 7 H 断面の全塑性応力状態

H 型断面の場合も長方形断面と同様に、図芯位置は容易に求めることができる。応力分布は図 7(a)のようになり、フランジ部分とウェブ部分に分け、同図(b)のように合力とその作用位置を求める。これら合力を用いて、図心位置でのモーメントを計算すると以下のように全塑性モーメントが得られる。

$$M_P = 2\{\frac{1}{2}\sigma_y B(H-h)\cdot\frac{1}{4}(H+h)+\frac{1}{2}\sigma_y ht\cdot\frac{1}{4}h\} = \frac{1}{4}\sigma_y\left\{B(H^2-h^2)+th^2\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

H 形断面
断面係数
$$Z=\frac{BH^2-(B-t)h^2}{6}$$
塑性断面係数
$$Z_P=(B(H^2-h^2)+th^2)/4$$
断面の形状係数
$$f=\frac{Z_P}{Z}\approx 1.09\sim 1.12$$
H 型の形状によって、形状係数は変化するが、その値は断面係数の約 1.1 倍程度である。

表 1 代表的断面の塑性断面係数と断面の形状係数

断面形状	塑性断面係数 Z_P	断面係数 Z	形状係数 $f=Z_P/Z$	断面形状
長方形	$bD^2/4$	$bD^2/6$	1.5	円形
	$D^3/6$	$\pi D^3/32$	1.70	
三角形	$(2-\sqrt{2})bD^2/6$	$bD^2/24$	2.34	菱形
	$\sqrt{2}a^3/6$	$a^3/(6\sqrt{2})$	2	

これまでは、部材断面内の弾塑性状態について学び、全塑性モーメントを求める方法について学習した。ここでは、この知識を利用して簡単な骨組の最終耐力、及び塑性崩壊に至る過程について学ぶことにしよう。例題として用いる部材の断面は長方形断面とし、骨組は部材中央に集中

荷重 P が加わる単純梁で、材長は l である。また使用材料の応力と歪の関係は完全弾塑性とする。

最初に荷重が増加し、単純梁が崩壊に至るまでの過程を追ってみよう。中央に集中荷重が加わると、単純梁に生じる曲げモーメント分布は図 8 となる。従って、最も大きな軸方向応力が生じる位置は、部材中央断面内の上端と下端である。荷重が増加し、曲げモーメントが大きくなると最初にこの位置で応力が σ_y に達し、塑性状態となる。さらに荷重が増加すると、図 9(a)のように塑性域が梁中央から拡大していく。この状態でも、力の釣合から部材の曲げモーメント分布は変化せず、荷重に比例して大きくなる。ただし、部材中央部分の曲げ剛性が低下し、弾性状態に比べて曲率の増加率が大きくなる。

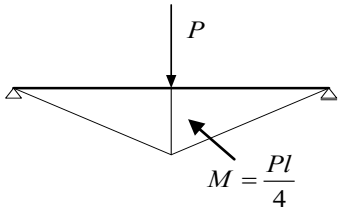


図 8 曲げモーメント図

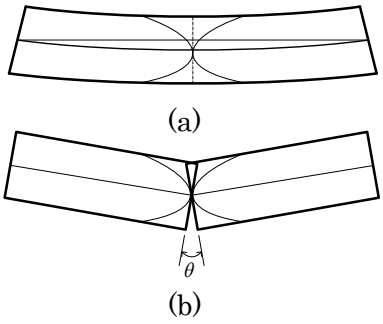


図 9 単純梁に生じる塑性域

さらに荷重が増加し、図 9(b)のように部材の中央断面が全て塑性域となると、ここでは曲げ剛性はゼロとなり、以後ヒンジと同様の挙動を示すことになる。そのためこのような部位は**塑性ヒンジ**と呼ばれる。

単純梁では、中央に塑性ヒンジが生じると、骨組全体は不安定となり、崩壊メカニズムとなる。このときの荷重を P_u とし、**終局荷重**あるいは**塑性崩壊荷重**と呼ぶ。メカニズムが形成されると、骨組の変形は塑性ヒンジの回転角が増加することによって進み、他の部分、例えば弾性部分などは剛体変位するのみである。

上の例題を用いて荷重と変位の関係を分析してみよう。図 10 に示すように、部材中央の断面内の上端と下端に塑性域が発生し、弾性限界荷重 P_y となる。この位置より曲げ剛性が低下し、最終的に最大曲げモーメント $Pl/4$ が全塑性モーメント M_P に漸近するとき、塑性メカニズムとなる。このときの塑性崩壊荷重 P_u は、力の釣合より、

$$P_u = \frac{4M_p}{l} \qquad \cdots\cdots(21)$$

となる。以前示した $M-\theta$ 関係をバイリニアに仮定すると、荷重変位関係は図 10 の点線で示される。崩壊荷重に達するまでは線形的に荷重・変位が共に増加し、達した後はメカニズムが形成され、荷重は増加しないことが分かる。

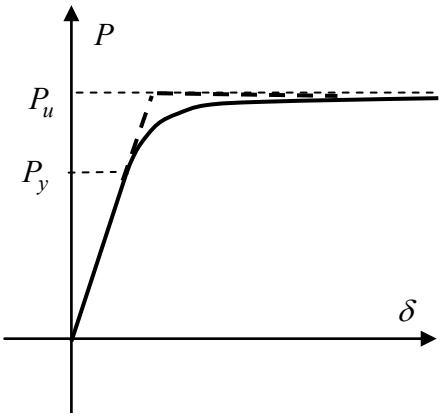


図 10 荷重—変位関係

一般の静定梁や静定骨組では、**崩壊メカニズム**(崩壊機構)は一つの塑性ヒンジが発生することで形成される。そのため、**崩壊荷重**は容易に求めることができる。まず、線形解によって生じる各部材の最大曲げモーメントと全塑性モーメントの比率を求める。骨組を構成する各部材で、この比率が最も小さい部位に塑性ヒンジが発生するため、その比率に線形解の荷重を掛けることで、崩壊荷重が求められることになる。

基礎１３６話 No.1　一端ピン・他端固定支持梁の崩壊荷重

付 28 話参照
ex135_1

今回は、骨組の崩壊荷重や崩壊機構を仮想仕事の原理を応用して求めてみよう。仮想仕事の原理(principle of virtual work)とは、「ある物体に複数の力が作用し、釣合状態にある場合、その物体が十分小さい仮想変位を受けるとき、その力の為す仕事はゼロである」である。言い換えると、「複数の外力が作用し、構造物が釣合状態にあるとき、境界条件を満足する任意の微小変形に対して、外力と内力のなす仕事は等しい」。この仮想仕事の原理は、1725 年ごろヨハン・ベルヌーイが創始したと言われており、その子のダニエルと弟子のオイラーが材料力学に応用した。これらは既に学んでおり、この原理を応用して骨組の任意の点の変位を求める手法を学習した。

特に、この原理を利用して崩壊荷重を求める場合、微小変形として先に示した崩壊メカニズムを考えることになる。骨組によっては異なったメカニズムが存在することがあり、どのメカニズムを使用するかによって異なった崩壊荷重が得られてしまう。これについては、次回、検討することにしよう。ここでは、1 つの崩壊メカニズムが得られる場合について考察する。塑性ヒンジが生じている部分には全塑性モーメント M_P が発生しており、また、微小変形として、図 1(b)に示される崩壊メカニズムが仮定される。

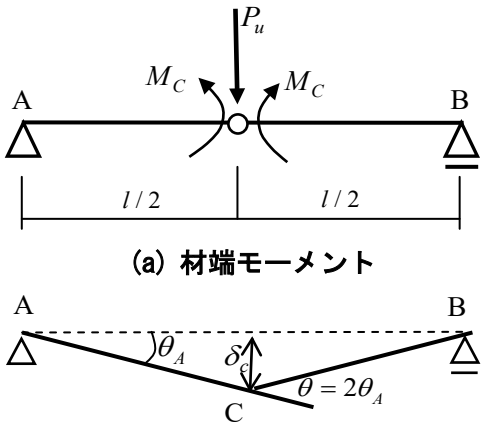


図 1 単純梁の崩壊メカニズム

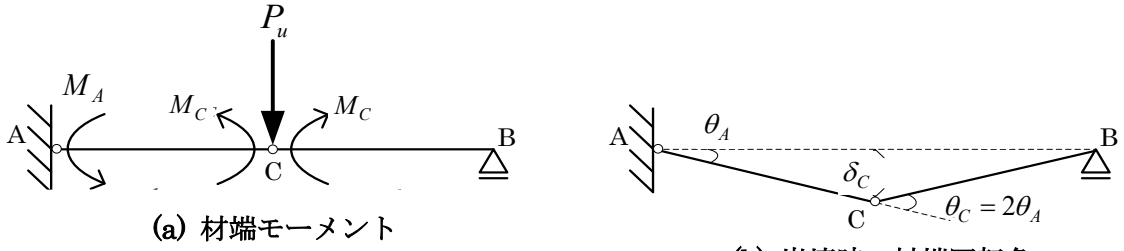
図 1 を参考にして、内力と外力を計算してみよう。外力については、P_u が変位 δ_c に対してなす仕事 $P_u\delta_c$ で与えられ、荷重直下の変位 δ_c は、幾何学的条件より $\theta_A l/2$ である。また、機構状態では、部材は全て剛体変位であることから、部材内部の内力仕事はゼロである。ただし、塑性ヒンジ位置では全塑性モーメントとなっており、このモーメントとヒンジの回転よって仕事が発生する。ヒンジに加わっているモーメントとヒンジに仮想的に生じる回転の方向が同じ場合は正の仕事をし、また逆の場合は負となる。同方向か否かが分からない場合、同図（c)のように材端モーメントと変位後から元の位置までの回転を考えると良い。この例では、同方向であることから内部仕事は正となり、また、回転角は両端共に θ_A である。

仮想仕事の原理より崩壊荷重が次のように求められ、前回求めた崩壊荷重と同じとなる。

$$P_u\delta_c = 2M_P\theta_A \rightarrow \quad P_u = \frac{2M_P\theta_A}{\delta_c} = \frac{2M_P\theta_A}{\theta_A l/2} = \frac{4M_P}{l}$$

1）一端固定・他端ピン支持梁の崩壊解析　　ex135_1

次に、図 2 の一端固定・他端ピン支持の梁について、仮想仕事の原理を用いて崩壊荷重を求めてみよう。この梁でも、全塑性モーメントは M_P とする。



(a) 材端モーメント　　(b) 崩壊時の材端回転角

図 2　一端固定・他端ピン支持梁の崩壊メカニズム

図 2 に示す材端モーメントと崩壊メカニズムによる微小変位を用いて各仕事を計算し、仮想仕事の原理を適用すると次式が得られる。

$$P_u \delta_c = M_P \theta_A + 2M_P \theta_A$$

ここで、上式に $\delta_c = \theta_A l / 2$ を代入すると崩壊荷重が次のように得られる。

$$P_u \frac{\theta_A l}{2} = 3M_P \theta_A \rightarrow \quad P_u = \frac{6M_P}{l}$$

この値は次回以降で示す増分法の崩壊荷重と一致する。

仮想仕事の原理を一般骨組に適用してみよう。任意節点 j に集中荷重 P_j を受ける骨組があるとする。この骨組が荷重 $\rho_u P_j$ で崩壊したと仮定したとき、塑性ヒンジ i における曲げモーメントを M_i とし、また仮定された崩壊メカニズム時における点 i の荷重方向の変位を δ_j、塑性ヒンジ i の回転角を θ_i とすれば、仮想仕事式は

$$\rho_P \sum_j P_j \delta_j = \sum_i M_i \theta_i$$

で表される。従って、ρ_P は次式となり、崩壊荷重が得られる。ここで、ρ_P は**崩壊荷重係数**と呼ばれる。

$$\rho_P = \sum_i M_i \theta_i / \sum_j P_j \delta_j$$

R55：骨組の仮想仕事式と崩壊荷重係数

崩壊メカニズム時の仮想仕事式と崩壊荷重係数は次式で与えられる

$$\rho_P \sum_j P_j \delta_j = \sum_i M_i \theta_i \rightarrow \quad \rho_P = \sum_i M_i \theta_i / \sum_j P_j \delta_j$$

基礎１３７話 No.2　骨組の塑性崩壊条件 極限解析の上界定理と下界定理

付 28 話参照
ex135_2

前回、断面の全塑性モーメントと仮想仕事の原理を用いて単純梁の塑性崩壊について学んだ。今回からは、それらを応用して骨組の崩壊に関する基本的な理論を学習し、理論から求めた崩壊荷重や骨組の崩壊機構（崩壊メカニズム）について理解する。一般的解析方法として、コンピュータの使用を前提とする数値解析では増分法を用いるが、手計算では仮想仕事の原理による方法が便利である。ただし、両手法の仮定の違いや解析手法の相違によって、得られる結果に如何なる影響があるかを、知ることが重要である。

まず、仮想仕事の原理を適用するために必要な条件を学ぶ。骨組が塑性崩壊するためには、次の 3 条件を満たす必要がある。

R56：骨組の塑性崩壊条件

(i)　釣合条件:荷重とモーメントが釣合っている

(ii)　塑性条件:曲げモーメントの絶対値は全塑性モーメントを越えない

$$-M_P \le M \le M_P$$

(iii)　機構条件:崩壊機構が形成されている。すなわち、骨組が崩壊するために十分な数の塑性ヒンジが出現している

上記の 3 つの条件を全て満たす崩壊荷重、曲げモーメント分布及び崩壊メカニズムを求めることは、複雑な骨組では一般的に難しい。そのような場合、**極限解析（リミットアナリシス）の定理**が有用である。

R57：極限解析の上界定理と下界定理

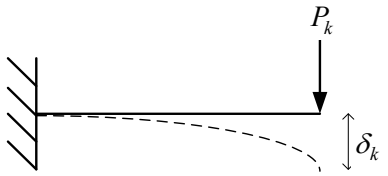
１）上界定理：(i)、(iii)を満たす解　→　崩壊荷重係数の上界

２）下界定理：(i)、(ii)を満たす解　→　崩壊荷重係数の下界

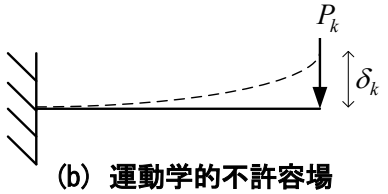
最初に、上界定理について考える。まず、ある崩壊機構が形成され、釣合状態にある骨組に対し、作用している荷重を $\rho^+ P_k$ とする。荷重 P_k の作用点 k の作用方向変位 δ_k に対して、

$$\sum_k P_k \delta_k > 0 : \text{(外力仕事が正)}$$

を満たすとき、このような変位場を運動学的許容場といい、ρ^+ のことを**運動学的許容倍数**と呼ぶ。言い換えれば、「運動学的許容倍数は崩壊荷重係数の上界である」と言える。これを極限解析における上界定理と言う。



(a) 運動学的許容場



(b) 運動学的不許容場

図 3 運動学的許容

R58：極限解析の上界定理とは

考えられる種々の崩壊機構から得られる運動学的許容倍数 ρ^+ のうち、最小のものが崩壊荷重係数 ρ_P に一致する

$$\rho^+ \geq \rho_P$$

次に下界定理について考える。荷重 $\rho^- P_k$ と釣合い、しかも、あらゆる点で全塑性モーメントを越えないような曲げモーメント分布が存在するとき、このような応力場を静的許容場と言い、崩壊荷重係数の下界である」と言える。これを極限解析の下界定理と言う。

R59：極限解析の下界定理とは

考えられる種々の静的許容場から得られる静的許容倍数 ρ^- のうち、最大のものが崩壊荷重係数 ρ_P に一致する

$$\rho^- \leq \rho_P$$

骨組の崩壊荷重を求めるには上下界定理を応用し、次の手順に従って求めることになる。

R60：崩壊荷重を求める手順

(i)　種々の可能な崩壊機構を考え、崩壊荷重係数の上界を求める
(ii)　最小値を与える崩壊機構に対応する曲げモーメント分布が静的許容であることを確認する

上記の手順を参考にしながら、例題として図 4 に示す固定支持、鉛直荷重と水平荷重を同時に受ける単純な門型ラーメンの崩壊荷重と崩壊機構を求めてみよう。

2）両端固定支持門型ラーメンの崩壊解析　ex135_2

鉛直荷重として、$2\rho P$ が梁の中央に集中荷重として、また水平荷重として、ρP が柱頭に加わっている。部材の断面は全て同一とし、全塑性モーメント M_P とする。ここでは、パラメータ ρ は荷重係数であり、骨組崩壊時におけるこの荷重係数を具体的に求める。

まずは、読者は崩壊機構を想定し、仮想仕事式、及び極限解析の上界定理と下界定理を用いて、崩壊荷重を求めてみよう。

解説は次回以降、行うことにする。

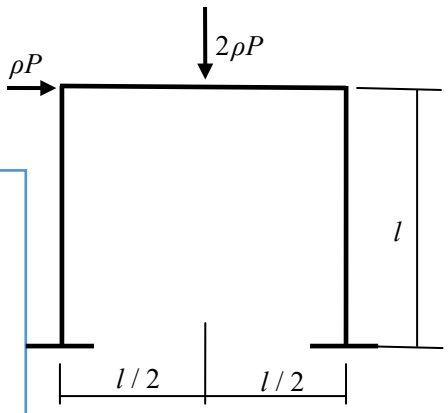


図 4 支持部固定・集中荷重を受ける門型ラーメンの崩壊荷重

基礎１３８話 No.3　門型ラーメンの崩壊荷重 同時増加の鉛直・水平荷重

付 28 話参照
ex135_2

2）両端固定支持門型ラーメンの崩壊解析　　同時増化する鉛直荷重と水平荷重　　ex135_2

今回は、図 4 に示す集中荷重を受ける固定支持門型ラーメンの崩壊荷重を求める。鉛直荷重として、$2\rho P$ が梁の中央に集中荷重として、同時に水平荷重 ρP が柱頭に加わっている。部材の断面は全て同一で、全塑性モーメント M_P とする。ここでは、崩壊時における荷重係数 ρ を求める。

この門型ラーメンでは、図 5 に示すような 3 つの崩壊メカニズムが考えられる。それぞれの崩壊メカニズムに対して、仮想仕事の原理を用いて崩壊荷重係数を求めると次のようになる。

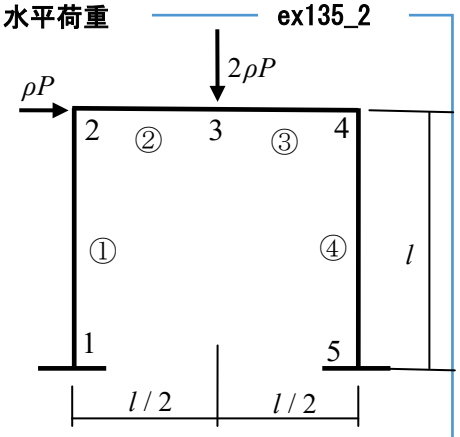


図 4 支持部固定・集中荷重を受ける門型ラーメンの崩壊荷重

１）梁機構に対して(図 5(a))

$$2\rho^{+}P\frac{\theta l}{2}=M_P\theta+2M_P\theta+M_P\theta\rightarrow\quad \rho^{+}=\frac{4M_P}{Pl}$$

２）層機構に対して(図 5(b))

$$\rho^{+}P\theta l=M_P\theta+M_P\theta+M_P\theta+M_P\theta\rightarrow\quad \rho^{+}=\frac{4M_P}{Pl}$$

３）複合機構に対して(図 5(c))

$$\rho^{+}P\theta l+2\rho^{+}P\frac{\theta l}{2}=M_P\theta+2M_P\theta+2M_P\theta+M_P\theta\rightarrow\quad \rho^{+}=\frac{3M_P}{Pl}$$

上で求めた崩壊荷重係数 ρ^{+} を比較すると、複合機構での荷重係数が最小の値を示している。従って、極限解析の上界定理によって、この複合機構が崩壊メカニズムであることが分かる。

次に、複合機構とその値が、真の崩壊メカニズムと崩壊荷重係数であることを確認するために、釣合を満たす曲げモーメント分布を求めてみよう。複合機構における材端曲げモーメントは、一部の材端部分を除いて既に決定している。未定の材端曲げモーメントは部材番号①の節点 2 側と同じく部材番号②の節点 2 側である。節点におけるモーメントの釣合より、未定の曲げモーメントは次式を満足しなければならない。

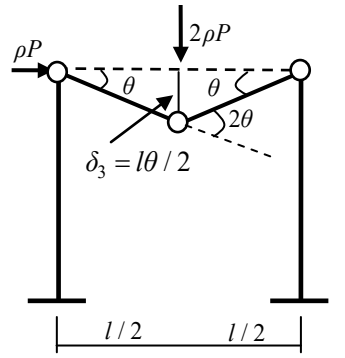
$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow M_{21}=-M_{23}$$

この未定の曲げモーメントを求めるために、次に示す層せん断力と水平外力との力の釣合を考える。

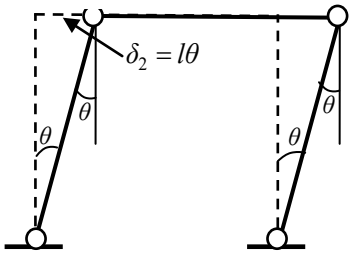
$$\rho^{+}P=\frac{M_{21}+M_P}{l}+\frac{M_P+M_P}{l}$$

上式に、複合崩壊メカニズムの荷重係数を代入すると、未定の曲げモーメントが次のように得られる。

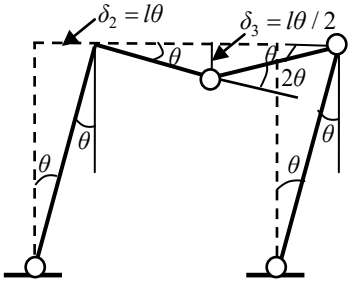
$$\frac{3M_P}{Pl}P=\frac{M_{21}+M_P}{l}+\frac{M_P+M_P}{l}\rightarrow\frac{M_{21}}{l}=\frac{3M_P}{l}-\frac{2M_P}{l}-\frac{M_P}{l}\rightarrow M_{21}=0$$



(a) 梁機構



(b) 層機構



(c) 複合機構

図 5 崩壊機構

得られた曲げモーメントから、曲げモーメント図を描くと図 6 のようになる。骨組全体で曲げモーメントが M_P を越えていないので、この崩壊機構は静的許容である。従って、複合機構での ρ^+ は正解の崩壊荷重係数であると言える。

この場合は正解の崩壊機構(複合機構)を仮定したため、静的許容曲げモーメント分布が得られた。しかし、正解でない崩壊機構を仮定する場合も考えられる。その場合、どのような曲げモーメント分布が得られるか、ここで確認してみよう。例えば、図 5(b)の層機構を仮定した場合を考える。ここでは、梁中央の節点番号 3 における曲げモーメントが未定であり、一方、崩壊メカニズムから他の節点における曲げモーメントは全て決定されている。

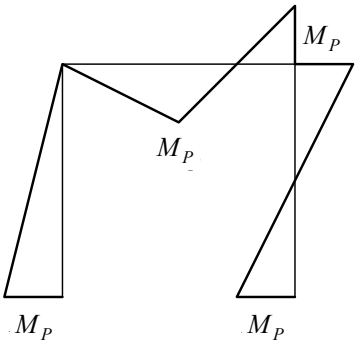


図 6 塑性崩壊時の曲げモーメント分布

まず、この層崩壊時における層せん断力と外力の釣合を考えてみよう。水平方向の力の釣合は次式で与えられ、崩壊荷重係数 ρ^+ が得られる。

$$\rho^+ P = 2\frac{M_P + M_P}{l} \rightarrow \quad \rho^+ = \frac{4M_P}{Pl}$$

前にも示したように、実際の崩壊荷重係数に比較して、求めた荷重係数は高い値となっている。次に、節点 3 での曲げモーメントを求めるために、最初に、図 7(a)を参考に節点 5 での反力を求める。この節点での水平反力とモーメント反力は、部材番号④の曲げモーメント分布より次のように得られる。

$$M_5 = M_P; \quad H = \frac{M_P + M_P}{l} = \frac{2M_P}{l}$$

鉛直方向反力 R は、節点 1 におけるモーメントの釣合より求められる。まず、節点 1 における外力と反力によるモーメントの釣合は

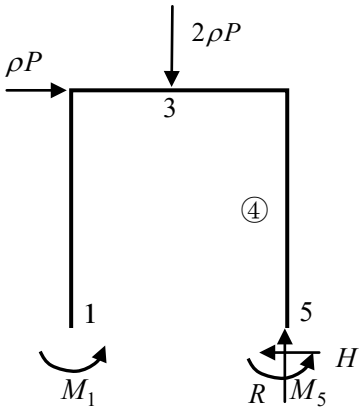
$$-M_1 - M_5 + \rho^+ Pl + 2\rho^+ Pl/2 - Rl = 0$$

であり、節点 1 と 5 のモーメント反力は柱端部とのモーメントの釣合より M_P である。この値を上式に代入すると、反力 R は次式となる。

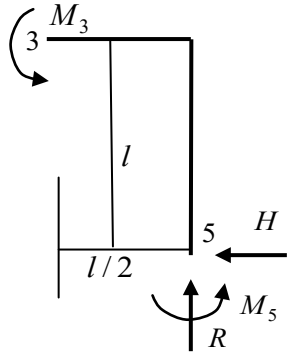
$$R = 2\rho^+ P - \frac{2M_P}{l} = \frac{8M_P P}{Pl} - \frac{2M_P}{l} = \frac{6M_P}{l}$$

さらに、節点 3 の位置で切断し、節点 5 を含む閉曲線での外力と反力との釣合より、節点 3 での曲げモーメントは、図 7(b)を参照すると次式で与えられる。

$$M_3 = -M_5 - R\frac{l}{2} + Hl = -M_p - \frac{6M_P}{2l} + \frac{2M_P}{l} = -2M_P$$



(a) 節点 1 における外力と反力とのモーメントの釣合



(b) 閉曲線内のモーメントの釣合

図 7 骨組内の力の釣合

得られた結果を元に、曲げモーメント図を描く。この曲げモーメント図から、どのような事が言えるか検討しよう。次回は、この曲げモーメント図の分析と、新たな例題を用いて、崩壊荷重と崩壊機構を求める。

基礎１３９話 No.4　門型ラーメンの崩壊荷重 定鉛直荷重＋増加水平荷重

付 28 話参照
ex135_3

前回の最後でお話しした結果を元に、曲げモーメント図を描くと図 8 となる。同図から分かるように、曲げモーメントが節点 2-4 間で M_P を越えているため、これは静的許容ではない。図 8 の曲げモーメント分布を 1/2 倍すると、静的許容曲げモーメント分布を得ることができる。これと釣合う荷重は層機構の値を 1/2 倍することによって得られる。荷重係数は、

$$\rho^- = \frac{1}{2}\cdot\frac{4M_P}{Pl} = \frac{2M_P}{Pl} < \rho_P = \frac{3M_P}{Pl}$$

となり、崩壊荷重係数より低い値であることが分かる。このモーメント図は静的許容場であるが、極限解析の下界定理より、真の崩壊荷重を表していないことが分かる。

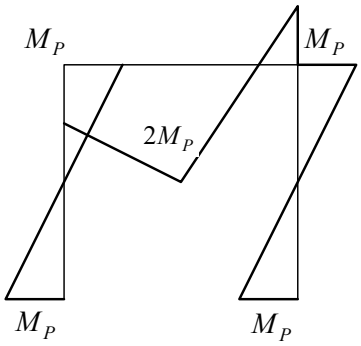


図 8 静的許容でない曲げモーメント分布

前例では比例荷重を受ける骨組の極限解析法について、上下界定理を応用して崩壊荷重係数を求めた。しかし、実際の建築構造は固定荷重、積載荷重など、一定の鉛直荷重を常時受けており、これに地震力や風圧力が付加されることになる。従って、激震時や暴風時などの極限荷重を求めるには、定鉛直荷重と比例水平荷重を受ける骨組の極限解析を行う必要がある。定荷重と比例荷重が混在する場合にも、前例と同様、上下界定理を用いて崩壊荷重係数を求めることができる。

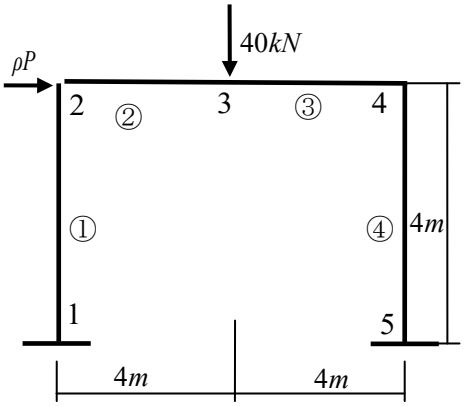


図 9 支持部固定で、定鉛直荷重と水平荷重を受ける骨組の崩壊荷重

R61：定荷重と比例荷重がある場合の極限定理

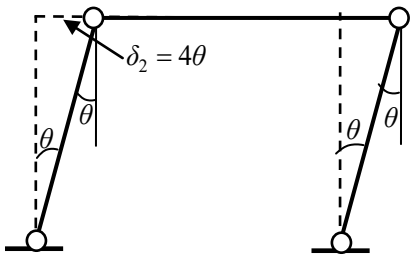
1 組の定荷重に対して塑性崩壊しない骨組が、その定荷重の元で比例荷重を受けるとき、その崩壊状態についても極限解析の上下界定理が成立する

3) 両端固定支持骨組の崩壊解析　定鉛直荷重と増加水平荷重　　ex135_3

ここでは、図 9 の定鉛直荷重と増加水平荷重を受ける骨組を用いて、崩壊荷重係数を求める方法を学ぶ。部材の全塑性モーメントとして、左柱は $M_P = 40kNm$ 、右柱は $M_P = 30kNm$ 、梁は $M_P = 90kNm$ とする。また、水平荷重 ρP で、ここでは $P = 1kN$ としており、崩壊時における荷重係数 ρ が崩壊荷重の値に等しくなる。

最初に、上図の骨組が定鉛直荷重によって、梁機構で崩壊しないことを確かめる。崩壊を梁機構と仮定し、図 5(a)を参考にすると、外力仕事と内力仕事は次式で表される。

外力仕事：　$W_o = \bar{\rho}40\cdot 4\theta = \bar{\rho}160\theta$



(a) 層機構

内力仕事： $W_i = M_P(\theta + 2\theta + \theta) = 90 \cdot 4\theta = 360\theta$

上記の外力仕事の項では、水平荷重は仕事をしないことに注意されたい。また、鉛直荷重に荷重係数 $\bar{\rho}$ を掛けて外力仕事を計算しており、外力仕事と内力仕事が等しいことより、荷重係数は $\bar{\rho} = 2.25$ となり、崩壊するためには $P_{cr} = P\bar{\rho} = 40 \cdot 2.25 = 90kN$ 必要となる。このことは、実際の鉛直荷重が定荷重の $40kN$ であることから、この骨組は鉛直荷重によって崩壊しないことが分かる。

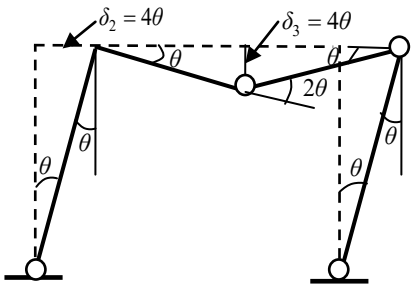
次に、図 10 の層機構と複合機構の 2 種の崩壊機構に対して、仮想仕事の原理を用いて崩壊荷重係数の上界を求める。崩壊荷重係数は、まず層機構について、仮想仕事の原理より

$$\rho^+ \cdot 4\theta = 40\theta + 40\theta + 30\theta + 30\theta \rightarrow \quad \rho^+ = 35$$

となり、また、複合機構についても同様に、

$$\rho^+ \cdot 4\theta + 40 \cdot 4\theta = 40\theta + 90 \cdot 2\theta + 30 \cdot 2\theta + 30\theta \rightarrow \quad \rho^+ = 37.5$$

として得られる。ただし、節点 4 では柱の全塑性モーメントが梁のそれを下回っていることから、柱に塑性ヒンジが先に生じるものとしている。上記 2 つの解から、層崩壊による値が最小の上界を与えることが分かる。



(b) 複合機構

図 10 定鉛直荷重と水平荷重を受ける骨組の崩壊機構（メカニズム）

次に、層崩壊時における曲げモーメント分布を求めてみよう。未定は節点 3 の曲げモーメントであり、この値を力の釣合から求める。まず、支持点 1 と 5 における反力を求める。水平反力及びモーメント反力は、柱脚の断面力との釣合より、次式で与えられる。

$$M_1 = 40kNm; \quad M_5 = 30kNm; \quad H_1 = 20kN; \quad H_5 = 15kN$$

また、節点 5 の鉛直反力 R_5 は、節点 1 でのモーメントの釣合より、次式で与えられる。

$$M = -M_1 - M_5 - 8R_5 + 40 \cdot 4 + \rho \cdot 4 = 0 \rightarrow$$
$$8R_5 = -40 - 30 + 160 + \rho \cdot 4 \rightarrow$$
$$R_5 = (90 + 35 \cdot 4) / 8 = 28.75kN$$

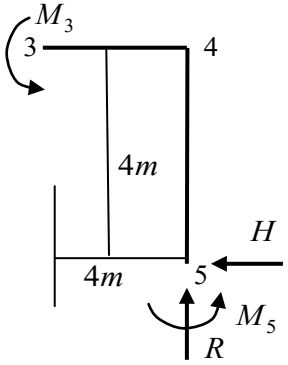


図 11 閉曲線内のモーメントの釣合

次に、節点 3 で切断し、節点 5 を含む閉曲線で囲まれた外力と反力及び切断された部材の断面力との釣合より、図 11 の M_3 は

$$M_3 = M_5 + 4R_5 - 4H_5 = 0$$
$$= 30 + 4 \cdot 28.75 - 4 \cdot 15 = 85kNm < 90$$

となり、これによって静的許容であることが確認できる。従って、崩壊荷重係数は次式となり、

$$\rho_P = 35$$

骨組が崩壊する際の水平外力は $P_{cr} = \rho_P P = 35kN$ となることが理解できる。崩壊時の曲げモーメント分布は図 12 のようになる。

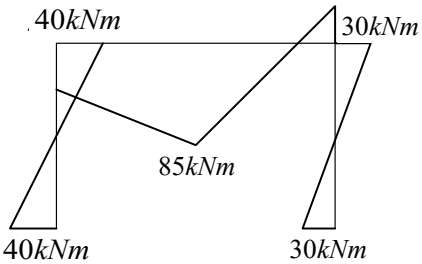


図 12 塑性崩壊時の曲げモーメント図

基礎１４０話 No.1　増分法の考え方 一端ピン・他端固定梁の崩壊過程

付 28 話参照
ex135_1

静定梁や静定骨組では、**崩壊メカニズム**(崩壊機構)は一つの塑性ヒンジが発生することで形成され、仮想仕事法を用いると、**崩壊荷重**は容易に求めることができる。ただし、不静的次数の高い構造では、解析的に崩壊荷重を求めることはそれほど容易ではない。やはり、コンピュータを前提にした増分法を用いることになる。今回は、最も簡単な解析モデルを用いて、増分法の解説を行う。

このモデルの弾性応力状態は、「基礎６６話」を参照されたい。

図 1 に示す一端固定・他端ピン支持で、中央集中荷重を受ける不静定梁について考える。この骨組は 1 次の不静定であることから、2 つの塑性ヒンジが発生すれば、崩壊メカニズムが形成される。ここでは、増分法を用いて、この骨組の弾塑性過程を追跡する。なお、各部材断面の $M-\theta$ 関係は前に示したバイリニア型であるとする。

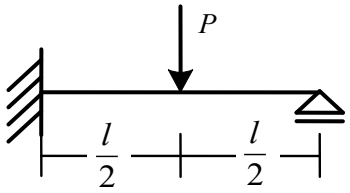


図 1 一端固定・他端ピン支持で、中央集中荷重を受ける不静定梁

解析を行う前に、図 2 を使い、荷重の増加に従って骨組の弾塑性状態を追跡してみよう。まず、状態(a)では、部材は全て弾性であり、固定端で最大曲げモーメントが生じている。(a)の状態から荷重が増加していくと、固定端における曲げモーメントが M_P に達し、状態(b)に示すように節点 A に塑性ヒンジが生じる。

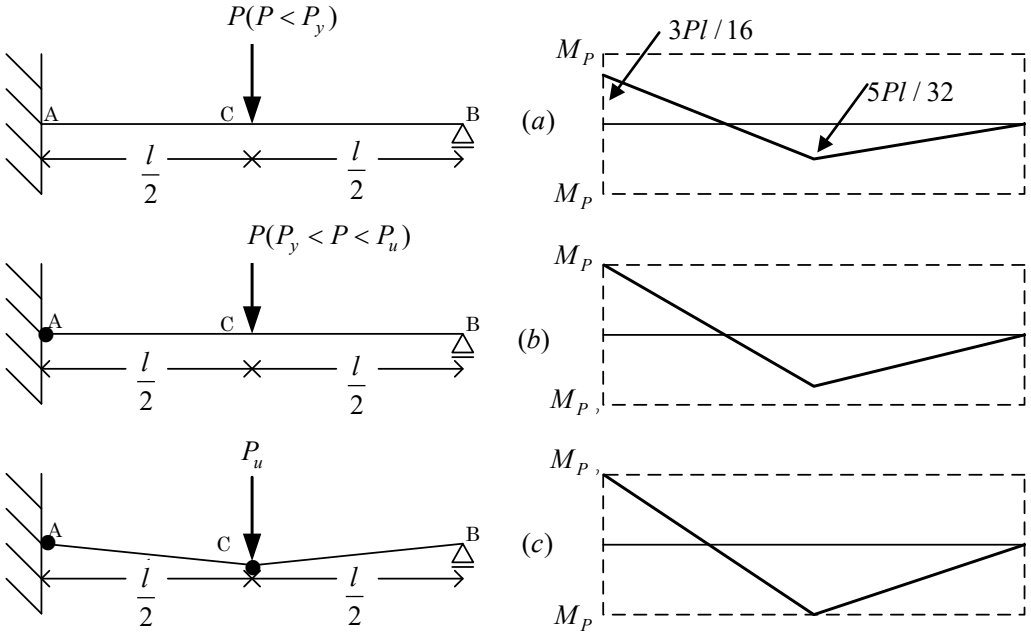


図 2 不静定構造物の崩壊メカニズムに至る過程

節点 A に塑性ヒンジが生じても、梁は直ちに崩壊せず、塑性ヒンジ

を有する新たな構造は両端ヒンジとなり、この骨組はさらに増分荷重を支持することができる。この状態の剛性を**接線剛性**という。さらに荷重が増加すると、梁中央に塑性ヒンジが生じ、塑性メカニズムが形成される。一つ目のヒンジ発生以後と 2 つ目のヒンジ発生までは、剛性が変化することなく、接線剛性と増分荷重を用いると線形解析で応力が求められる。実際の応力は、図の(b)の状態と、この増分荷重より求められた応力状態を加えたものとなる。

静定梁では塑性ヒンジが 1 つ生じると、直ちに骨組は崩壊するのに対し、不静定梁では塑性ヒンジが 1 つ形成されても、応力の再分配が行われて、直ぐには崩壊しない。ただし、このような応力の再分配が行われるためには、材料が降伏しても強度は低下せず、しかも変形に耐え得る十分な靭性を有していなければならない。増分法による骨組の崩壊解析では、このように塑性ヒンジの出現ごとに接線剛性が変化し、その間の応力解析を行う必要がある。そのため、不静定次数の大きい骨組では、解析的に崩壊荷重を求めることはかなり難しい。

ここで、増分法に従って崩壊荷重を求めてみよう。この梁の全塑性モーメントはM_Pとする。まず、第 1 ステップである A 点と C 点における曲げモーメントと全塑性モーメントとの比率μ_1を求める。

$$\mu_{A1}=\frac{16M_P}{3Pl};\quad \mu_{C1}=\frac{32M_P}{5Pl}$$

上式より A 点での比率が小さいこと、つまり、塑性ヒンジに達するまでの余裕度が小さいことより、A 点に一つ目の塑性ヒンジが生じる。A 点に塑性ヒンジが生じる状態の荷重P_1は、弾性時の荷重にこの比率をかけることによって次のように求められる。

$$P_1=P\mu_{A1}=\frac{16M_P}{3l}$$

上記の荷重が加わったときの A 点と C 点の曲げモーメントを求める。

$$M_A=\frac{3P_1l}{16}=\frac{3l}{16}\frac{16M_P}{3l}=M_P$$

$$M_C=\frac{5P_1l}{32}=\frac{5l}{32}\frac{16M_P}{3l}=\frac{5M_P}{6}$$

上式から分かるように A 点の曲げモーメントは当然全塑性モーメントになっており、また、C 点では、全塑性モーメントの 5/6 となっている。

さらに、次ステップの状態を考えよう。ここでは、この状態は図 2 の(b)から(c)に移るまでを意味する。A 点が塑性ヒンジであることより、両端ピン支持の梁に中央集中荷重が加わっている状態を考え、図 2(c)の状態に移るまでの増分荷重P_2を求めることになる。

以降の解析は次回お話しする。

基礎１４１話 No.2　荷重増分法と崩壊荷重

今回は、増分法の続きをお話しする。前回に続いて、C 点が全塑性モーメントになる比率 μ_2 を求める。ここでは、梁中央の曲げモーメントは $Pl/4$ であることと、現時点での全塑性モーメントに達するまでの余力が $M_P/6$ であることを考慮すると、比率 μ_2 は

$$\mu_{C2}=\frac{M_P/6}{Pl/4}=\frac{2M_P}{3Pl}$$

となる。従って、増分荷重 P_2 は、次式で与えられる。

$$P_2=P\mu_{C2}=P\frac{2M_P}{3Pl}=\frac{2M_P}{3l}$$

図 2(c)の状態における C 点の曲げモーメントを求めてみよう。図 2 (b)での C 点の曲げモーメントが $5M_P/6$ であることを考慮すると、この時点の C 点の曲げモーメントは

$$M_C=\frac{5M_P}{6}+\frac{P_2l}{4}=\frac{5M_P}{6}+\frac{l}{4}\frac{2M_P}{3l}=(\frac{5}{6}+\frac{1}{6})M_P=M_P$$

となり、全塑性モーメントとなっている。これで、この骨組は 3 ヒンジ状態となり、塑性メカニズムが形成され、崩壊する。このように崩壊メカニズムの形成とは、塑性ヒンジの出現で安定構造から不安定構造になることである。次に、この時点での荷重、つまり崩壊荷重 P_u を求めてみよう。この荷重は、先に求めた 2 ステップの増分荷重を加えれば良く、次式で与えられる。

$$P_u=P_1+P_2=P(\mu_{A1}+\mu_{C2})=\frac{16M_P}{3l}+\frac{2M_P}{3l}=\frac{18M_P}{3l}=\frac{6M_P}{l}$$

簡単な例題で、増分法による崩壊荷重や崩壊機構を求めた。ここで用いた増分法は、塑性ヒンジの出現を追跡し、ヒンジの発生ごとに接線剛性を再構築して増分断面力を求める。従って、増分荷重の大きさは不規則となり、また不静定次数の高い骨組では計算コストがかかる。一方、コンピュータを前提とした増分法では、増分荷重を固定し、その間に発生する塑性ヒンジを適切に処理する方法である。これを荷重増分法と呼ぶ。同様に、変位を増分させる方法もあり、これを変位増分法という。これらについては、専門書を参照されたい。

コンピュータが使用可能となると、精度良く崩壊荷重と崩壊モードが求められるようになる。ここでは、増分法による鉄骨構造の弾塑性解析の歴史を簡単に振り返ってみよう。まず、たわみ角法を拡張した手法で崩壊解析が行われた。塑性ヒンジは、長期の軸力を考慮した全塑性モー

メントを先に計算して与え、両端と梁 3 分点にヒンジを仮定し、全ての組み合わせで、たわみ角法の基本式を導く。長期荷重を 3 分点に加えた後、短期用の水平荷重を加える。荷重の増加に従って塑性ヒンジが次々と現れ、発生パターンに合わせて剛性行列を作り直す手法である。最終的にメカニズムが形成され、骨組が崩壊するまで水平荷重を増加させる。水平荷重によって柱には付加軸力が発生するが、この手法は全塑性モーメントの評価に付加軸力を含めておらず、精度的に少し劣る。

固体の力学で発展した数理塑性論を、部材断面力の塑性理論に応用し、降伏則・流れ則・硬化則などを使用して、部材の構成則としたアナロジーモデルがある。部材端部と荷重直下には、同モデルによるバネを付加し、骨組全体の弾塑性解析を行う。なお、鉄骨構造の塑性論アナロジーモデルの降伏条件として、次の 3 つの型が良く用いられる。

$$f=\left(\frac{N}{N_p}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2+\left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2}-1;\quad f=\left(\frac{N}{N_p}\right)^2+\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2+\left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2-1;\quad f=\left|\frac{N}{N_p}\right|+\sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2+\left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2}-1$$

ここで、N_p, M_{yp}, M_{zp} は各々降伏軸力、y、z 軸に関する降伏曲げモーメントである。ここでは付加軸力を考慮することができる。

断面内の塑性化進行状況を考慮できるモデルとしてファイバーモデルがある。同モデルは、部材断面を細かく分割し、平面保持とその分割された小さな断面の応力－歪関係を 1 軸状態で仮定することで、部材全体の弾塑性挙動を模擬する。応力状態を 1 軸で表す小さな断面をファイバーと呼び、このファイバーで構成される部材をファイバーモデルと呼ぶ。一般に用いられるファイバーモデルの仮定として、「断面内の歪は平面保持を用い、せん断変形は無視する」、「部材間の力の釣合は断面力で行い、接する位置における断面内部の応力の釣合はとれていない」、「ファイバーの 1 軸応力－歪関係は、各ファイバー独自に設定して良い」などがあり、鉄骨以外の断面にも広く応用可能である。同モデルでは、短期荷重による付加軸力を自動的に評価し、またファイバー要素を数個並べることで、塑性領域の拡がりも測定し得る。ファイバーの応力－歪関係は 1 軸であることから、複雑な履歴特性を容易に設定でき、歪硬化やバウジンガー効果をも考慮できる。

高層骨組における P-Δ 効果とブレースの座屈後挙動は幾何学的非線形問題に属する。しかし同種の解析では稀に不安定な挙動を伴うこともあり、これを嫌って弾塑性解析用に釣合式を変更する手法が開発されている。解析手法もプッシュオーバー解析といって、骨組が崩壊するまで水平荷重で押し切る解析や、逆に塑性状態になってから除荷し、塑性履歴を求める解析も可能となっている。

基礎１４２話　非線形構造力学の基礎 まとめ

今回は、これまで学んだ構造力学の中で、非線形に関する基礎的な項目について、以下にまとめておこう。

１：弾性論の基礎として応力と歪の関係と変位と歪の関係がある。前者の関係が非線形の場合、**材料非線形問題**、後者が非線形の場合、**幾何学的非線形**という。材料非線形では、応力と歪の関係は履歴に依存する非線形関数になるが、増分式では下式右のように表され、係数項は歪の関数となる。建築構造力学で良く用いられる幾何学的非線形とは、以下のようにたわみによる 2 次の項が軸方向歪に加わる場合が多い。この項を加えることで、座屈や不安定現象の解析が可能となる。

応力と歪の関係：$\sigma_x = F(\sigma_x, \varepsilon_x) \rightarrow \quad \Delta\sigma_x = E_x(\varepsilon_x)\Delta\varepsilon_x$

変位と歪の関係：$\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 - y\dfrac{d^2v}{dx^2}$

２：非線形解析と不安定現象

応力と歪の関係が非線形であると、増分式 $\Delta\sigma_x = E_x\Delta\varepsilon_x$ で係数 E_x が非線形となり、骨組の弾塑性状態を表す。弾塑性特性は一般に**骨格曲線**（バックボーンカーブ）と**履歴ループ則**によって表され、鋼やコンクリート、木材など使用する構造材料によって異なる。解析の目的や部材の状態、例えば床や耐震壁、面材を線材に置換した部材などには、骨格曲線と履歴ループ則を拡張し、特別な弾塑性履歴を設定する必要がある。さらに材と材との接合部のゆるみやすべり、基礎の浮き上がり、壁面との衝突など、材料特性とは異なる履歴も材料非線形特性として表現する。これらの特性は、実験や特別な解析から骨格曲線と履歴ループ則を決めることになる。

荷重が微小である場合、荷重―変位関係は線形挙動を示す。逆に、変位が大きくなると構造種別によって大きくその挙動が異なることになる。これを非線形挙動、あるいは大変位による挙動と呼ぶ。その際、釣合曲線上に各種の座屈挙動が生じることがある。座屈形態は**屈服型**(snap-through buckling)と**分岐型**(bifurcation buckling)に分類され、分岐型は対称分岐と非対称分岐に分かれる。また、対称分岐には安定型と不安定型があり、座屈時には座屈前の変形と全く異なる変形状態で不安定となる。特に不安定型分岐座屈の座屈後挙動は、変形モードが大きくなるに従って耐荷能力が低下する。屈服型では、座屈前の変形状態と同種の変形で不安定となる。屈服点(limit point)を越えるとその変形状態が大きくなり、荷重も低下する。リミットポイントに達した後も荷重を

増加させると、釣合状態は大きく変形し、部材の応力は圧縮状態から引張状態に瞬時に移行する。この現象は**飛び移り**と呼ばれ、実際の現象にも見られる。

３：オイラー座屈と非弾性座屈

非線形解析で、最も単純な問題は棒材の弾性座屈である。一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平方向拘束）支持で、材軸方向に集中荷重 P が作用し、横方向に撓む場合、モーメントの釣合は変形後の変位 $v(x)$ を用いて行う。このように座屈後の変位を用いて釣合状態を考えることは、幾何学的非線形問題を扱うことになり、**次の**ように**座屈荷重と座屈モード**が得られる。実際に生じる座屈は、$n=1$ でオイラー座屈と呼ばれる。

$$P_{cr}=EI_z k^2=(\frac{n\pi}{l})^2 EI_z;\quad (n=1,2,3\cdot\cdot)\qquad v=B\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad (n=1,2,3\cdot\cdot)$$

非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されており、Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論が有名である。圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley であり、提案したモデルによれば、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示した。

４：断面の全塑性モーメントと形状係数

曲げモーメントが増加するに従って、全断面塑性状態に漸近する。その極限として、断面の上半分は圧縮、下半分は引張の降伏応力に達する。このときの曲げモーメント M_P を**断面の全塑性モーメント**という。ここで、**塑性断面係数** Z_P を用いると、全塑性モーメントは $M_P=\sigma_y Z_P$ として表される。全塑性モーメントを弾性限曲げモーメントで割った値は、断面に特有な値となり、これを**断面の形状係数** f という。

$$f=\frac{M_P}{M_y}=\frac{\sigma_y Z_P}{\sigma_y Z}=\frac{Z_P}{Z}$$

$M-\theta$ 関係から分かるように、形状係数は断面内が最初に塑性化した時の曲げモーメントから全塑性モーメントに達するまでの倍率を表す。

５：仮想仕事の原理による骨組の崩壊解析と増分法による崩壊解析

崩壊メカニズム時の仮想仕事式と崩壊荷重係数は次式で与えられる。

$$\rho_P\sum_j P_j\delta_j=\sum_i M_i\theta_i\rightarrow\quad \rho_P=\sum_i M_i\theta_i/\sum_j P_j\delta_j$$

上式を応用して、崩壊荷重や骨組の崩壊機構（崩壊メカニズム）が求められる。その際、極限解析の上界・下界定理が有用である。コンピュータの使用を前提とする数値解析では増分法を用いるが、手計算では仮想仕事法による方法が便利である。ただし、両手法の仮定の違いや解析手法の相違によって、得られる結果に如何なる影響があるか、などを知ることが重要である。

基礎１４３話　建築物の構造設計法について

今回は、構造物の弾性設計と塑性設計について、また、近年における建築物の構造設計変遷の概略をお話しする。これらを理解することで、高度な構造力学を学ぶ第一歩となれば良いと思う。

構造物に加わる荷重は長期荷重と短期荷重とに分けられる。長期荷重は構造物の自重や積載荷重であり、常に構造物に加わる荷重の総称である。一方、短期荷重は地震時の荷重や台風などの風荷重、あるいは雪荷重など一時的に加わる荷重の総称である。この 2 つ荷重が同時に加わったとき、その応力や歪が弾性限度内であれば、短期荷重が取り除かれたとき、構造物は元の健全な状態に戻り、損傷が生じることはない。構造物の応力が弾性限度内に抑えることを目標に設計する方法が**弾性設計**といわれる。ただし、そこには多くの不確実性が存在し、統計量としての荷重、材料強度のばらつき、施工時の誤差、設計時の解析誤差などが考えられる。そこで、降伏応力度(ここでは学会規準の文言に合わせて応力度を用いる)を 1 より大きな材料安全係数で割ることで許容応力度を定め、骨組各部の応力度が許容応力度以下であることを確認する。このような設計法を**許容応力度設計法**と呼ぶ。

鉄骨など多くの構造用材料は降伏後、強度を低下させずに大きな変形に耐える能力を有している。これらの材料で構築された構造物の塑性変形能力に期待して、構造物が部分的に弾性限度を超えても全体的な耐力の限界、つまり崩壊に至らなければ良いとする設計法がある。この種の設計法を**塑性設計**と呼ぶ。ここでも、先に述べた不確実性を考慮し、設計荷重に 1 より大きな荷重安全係数を乗じて必要保有耐力を定め、構造物の保有耐力がこれを上回ることを確認する。このような設計法を**保有耐力設計法**と呼ぶ。この設計法では、応力や歪が弾性限度を超えると、荷重が除去されても構造物は元の状態に戻らず、塑性化した部分に永久歪が残る。つまり骨組に損傷が生じることになる。

2000 年 6 月に施行された耐震設計法は、1981 年制定された新耐震設計法を基本としており、上記の 2 つの設計法の考え方を取り入れた 2 段階方式を採用している。以下に両設計法の設計目標を示す。

一次設計：建築物が耐用年限中に数度以上遭遇する、比較的発生頻度の高い中小規模の地震に対して、建築物に被害がほとんど生じないこと、つまり、**機能保持を目標**に許容応力度設計を行う。

二次設計：極めてまれに遭遇するかもしれない大地震に対して、建物に

多少の損傷が生じてもやむを得ないが、建物の崩壊、損傷その他派生する災害により、人身に危険が生じてはならない。また、震災直後の生活の安定に必要な重要建築(病院、学校、放送・通信施設、消防署、行政中心など) については地震後にその機能を確保しなければならない。つまり、**人命保護を目標**に保有耐力設計を行う。

中小地震とは地表面の水平加速度が 80－100 ガル(cm^2 / sec)程度であり、震度では 5 から 6 弱を指す。この程度の比較発生頻度の高い地震に対しては、建築物を無被害に留めるために、応力を弾性限度内に抑えるのが一次設計である。また大地震とは地表面の水平加速度が 300－400 ガル程度であり、震度では 6 強から 7 程度を指す。このような大地震では床応答加速度は 1000 ガル以上にもなり得る。このような大きな応答に対し、許容応力度設計を行うことは極めて不経済な設計となる。そこで、最低限人命の安全だけは保証し、建築物に多少の損傷が残ることはやむを得ないとする立場が、二次設計である。そのため、二次設計では、変形制限、形状制限、耐力・靭性の確保、大地震に対する保有水平耐力の検討などの一連の耐震性の検討を行う。

近年の建築構造設計は性能指定型設計法と呼ばれる新しい設計体系に移行しようとしている。1995 年の阪神・淡路大震災では、多数の建築物が倒壊・半壊し、甚大な被害を受けたが、その大半は 1980 年以前に建築された旧耐震基準により設計されたものである。極めて稀にしか起こらない大地震に対しては多少の損傷が生じても崩壊しなければ良いとする設計思想をさらに進化させ、建築物の重要度や地震動のレベルに応じて建築物に要求される耐震性能をきめ細かく指定する性能指定型設計法への移行が検討された。2000 年 6 月施工の改正建築基準法ではその考え方を部分的に導入して、**限界耐力設計法**が規定化された。建築物の重要度を表 1 のように 4 段階に区分し、レベルに応じて重要度が高くなり、より高い目標性能が設定されている。

表 1　重要度レベルと建物の例

重要度レベル	建物種別	例
第 1 レベル	入居者が特定できる一般的な建物	戸建住宅、集合住宅、マンション、オフィス、倉庫等
第 2 レベル	不特定多数が使用する公共性の高い建物	小中学校、公民館、美術館、博物館、図書館、集会場、体育館、ホール、ホテル、蝶構造建築、銀行、コンピューターセンター、病院、高齢者施設、老人福祉施設、危険物倉庫、文化財等
第 3 レベル	防災活動の中核的機能を担当する公共上必須の建物	本庁舎、防災センター、消防署、警察署、防災拠点(中央病院、地区センター)、避難施設、重要なコンピューターセンター
第 4 レベル	地球規模での安全施設	原子力施設

基礎１４４話　耐震構造と免震・制振構造

最終回となる今回は、読者の知識を構造力学の基礎から応用へ、と導くためのお話しである。前回は構造設計の変遷について概略学んだが、ここではさらに、建築構造の設計が、自動車や機械と同様に、振動の制御・抑制に向かっていることを学ぶ。特にここでは、免震・制振構造における振動制御の基本的な考えや、耐震構造との地震対策に対する考え方の違いを学習する。地震や台風などに対し、いずれの構造形式も安全設計は同じであるが、異なる安全対策が成されており、ここではそれらの特徴を概観する。

免震・制振構造の振動制御・抑制の理論的根拠を以下に示す。外乱周期が建物の固有周期に近接すると共振現象を起こし、大きく揺れる。構造物の固有周期を、地震動の応答スペクトルの小さな個所に移動可能であれば、応答は小さくなる。また減衰が大きいと揺れは抑えられるため、構造物の内部に減衰機構を付加することで応答を小さくすることもできる。前者に基づく機構が免震構造であり、後者が制振構造である。これら 2 種の機構はデバイスとして構造物に組み込まれることになる。

応答スペクトルは、地震波の特性を表す。地震波によって異なるが、その特性に顕著な定性的傾向が見られる。これについての詳細は、「SPACE で学ぶ構造力学　動的解析編」を参照されたい。

１）耐震構造

耐震構造は、いわゆる剛構造（超高層建築は除く）であり、これまで主流となってきた構造形式である。強固な基礎により地面に固定されており、地震のエネルギーを、建物を構成する主要構造部材の変形能力(靭性)と強さで吸収する。大地震動を受けた建物は崩壊に至らないが、大きく変形し、上層階ほど大きな加速度が発生する。また下層階では部材は塑性化し、変形が残ることになる。そのため、再利用が難しくなる。

２）免震構造

免震構造は、基礎部あるいは中間部に、水平方向に柔らかい免震装置を挿入した構造である。免震構造の動特性は柔構造と似ており、固有周期は非常に長い。地震動を受けると、この免震装置が水平方向に大きく変形し、減衰装置によって地震のエネルギーをほとんど吸収する。上部の建物には地震のエネルギーがあまり伝わらず、そのため層間変位もほとんど発生せず剛体的に長周期で揺れることになる。免震装置としてアイソレータとダンパーが用いられる。

３）制振構造

制振構造は、主要構造体（ブレースや壁パネル）に振動エネルギーを吸収する制振装置（ダンパーや低降伏部材等）を付加するか、もしくは

同調型質量などを付加し、地震や強風によって建物に揺れが生じた時、振動を低減する構造である。

図 1 に、標準地震波の一つであるエル・セントロ NS 地震波の加速度応答スペクトルを示す。同図から分かるように応答加速度は、周期が 1.2 秒以下では大きな値を示すが、周期が 2 秒以上になると極端に小さくなる。また、減衰が大きくなると応答値が小さくなる。長周期の外乱エネルギーが小さく、固有周期が長いとこの種の地震動(一般には海洋型地震動と呼ばれる)ではほとんど揺れないことが分かる。

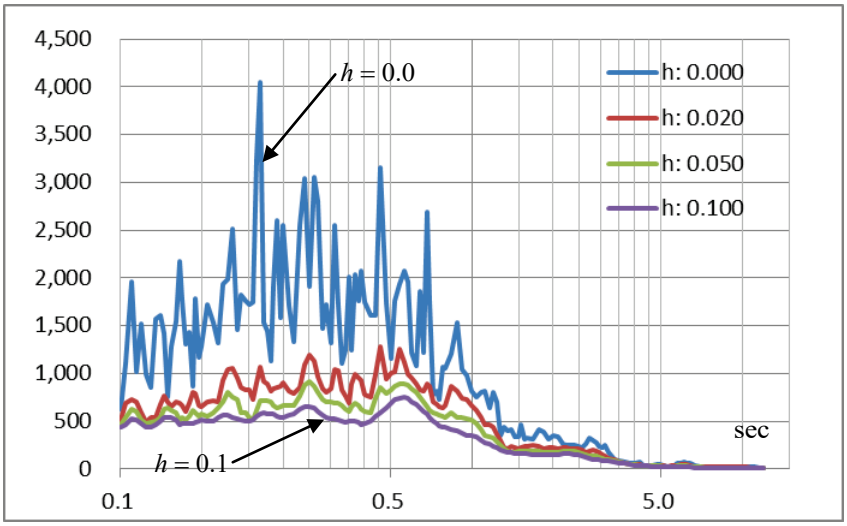


図 1 エル・セントロ NS 地震波の加速度応答スペクトル

横軸：周期(秒)
縦軸：加速度(cm/sec²)
h ：減衰定数

一方、図 2 の地震時の変位応答スペクトルでは、周期が長くなると最大値はそれに伴い大きくなる傾向にある。相対的に免震構造の剛性が小さくなった分、それだけ変形が大きくなっている。しかしながら、周期が長い領域（赤い四角で囲まれた「免震」となっている部分）では、減衰効果が大きく、変形を抑える効果が大きいことも分かる。周期を長くすることによって生じる変形量の増大を、減衰力を付加することで抑制できることを意味している。

以上のように免震構造とは、①水平剛性を小さくし周期を長くすることで応答加速度を下げ、②それにより増加した水平変位を、減衰力を付加することで抑制する構造である。このような免震構造として、アイソレータとダンパーを骨組に組み込むことで実現する。

横軸：周期(秒)
縦軸：変位(cm)
耐震：周期 0.1～1.2
免震：周期 3.0～5.5

地震に対し安全な構造物を設計するためには、地震の特徴・特性を学ぶことが大切である。地震動の特性と構造物の動的挙動との関連を学習し十分に理解することが、免震構造や制振構造など新しい構造形式を学ぶための第一歩となる。

耐震工学や免震・制振構造に関する知識の獲得は、**SPACE で学ぶ構造力学　動的解析編**を学習し、その後、専門書を読むと良い。

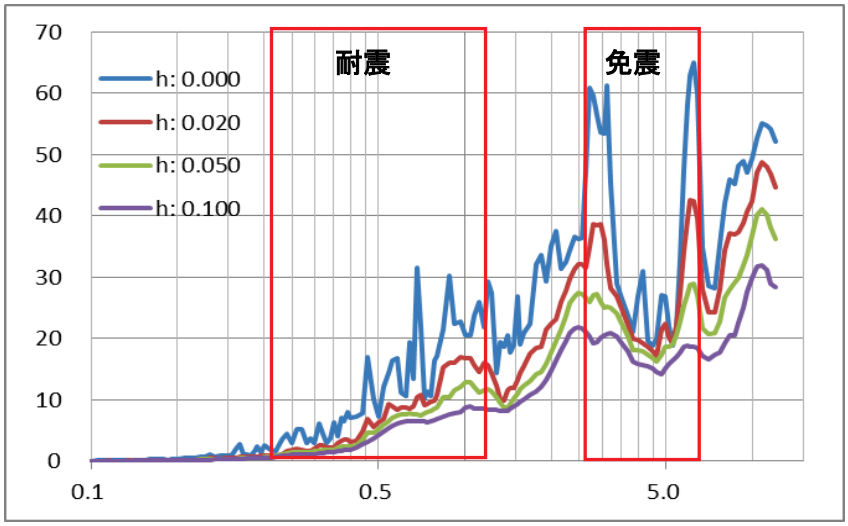


図 2 エル・セントロ NS 地震波の変位応答スペクトル

あとがき

構造力学の教育は難しい。40 年以上大学に在籍し、主として構造力学の講義を受け持ってきましたが、満足したという実感がなかなか得られません。近頃ではデザイナー志望の学生が多くて構造力学を学ぶというモチベーションが維持できず、途中で挫折する学生が続出です。専門的知識を得るまでには時間がかかり、強い動機付けがないと途中で脱落します。私が若かった頃の教育法は、基礎から順に専門科目に進み、知識と能力を積み上げていく手法が全てでした。しかし、今の学生にはこの種の教育法は合わないのかもしれません。

上記の教育法と対極的位置に総合的学習法があります。この種の学習法が現在の建築学科に取り入れられ、教育手法が変化しています。課題を決め、自ら考えて主体的に判断し、問題を解決する資質や能力を育成することを目標としています。体験型学習や参加型学習あるいはアクティブ・ラーニングの必要性も叫ばれています。ただ、これらの教育法は基礎的知識がないと問題解決の糸口や、課題すら見つけられないという指摘もあります。両者の教育法には一長一短があり、どちらが優れているかは、私には分かりません。多分、どちらが適しているかは、その教育内容によるのでしょう。

建築デザイナーを志す学生あるいは構造技術者から、「習得に時間のかかる構造力学を学ぶ必要があるのか」、という質問を受けることが良くあります。確かに、コンピュータが発達し、応力解析が直ぐに実施できる現在では、実利的な効果はないのかもしれません。しかし、構造力学を学ぶことは、力学のトレーニングと共に力のバランスや理論解を応用する技術の習得、実際の骨組を簡単なモデルに置き換え、理論解を用いて考察するなど、この種の感覚を養うことができます。卓抜な建築はデザインだけでなく力学的にも優れています。

構造力学は、基礎から知識を積み上げなくては、より高度な理論や解析手法を理解できません。モチベーションを維持し、地道な学習が、結局は構造力学や構造工学を理解する近道だと思います。「構造力学　基礎の初歩」は、私が大学在籍時に講義した内容をまとめ直したテキストです。構造力学の基礎といった分野を大枠含んでいます。是非、最後まで読み通し、理解してください。きっと、次のステップに進む足掛かりになるはずです。読み終えた後、初歩から数歩、前に進んだように思え、自信が持てるようになるでしょう。

2020 年　4 月　1 日

村田　賢